Mathematik für BiologInnen
WS 2005

A.o. Univ.-Prof. DI Dr. Michael Hintermüller

michael.hintermueller@uni-graz.at

Karl-Franzens Univeristät Graz

Institut für Mathematik und Wissenschaftl. Rechnen

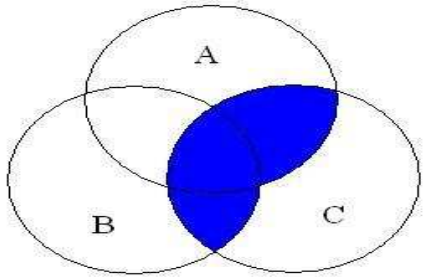
Mengen

- Menge $=$ Gesamtheit von Dingen oder Objekten, den Elementen der Menge.
- Definition kann durch Aufzählung oder durch eindeutige Beschreibung erfolgen.
- $a \in M$, $M \ni a$ ... a ist Element der Menge M.
- $a \notin M$ ... a ist nicht in der Menge M.
- $\emptyset$ ... leere Menge.
- $B \subseteq A$ ($B \subset A$) ... B ist (echte) Teilmenge von A. Bemerkung: $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge.
- $A = B$: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.
- Seien A, B gegebene Mengen.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}, \quad A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

- Veranschaulichung mittels VENN-Diagrammen.

Mengen, Aussagen, Quantoren



$(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

- Sei M gegeben. $A' = \{x : x \in M$ und $x \notin A\}$ ... Komplement von A in M.
- $A \setminus B = \{x : x \in A$ und $x \notin B\} = A \cap B'$ ... Mengendifferenz.
- $\mathcal{P}(M)$ ... Potenzmenge: Familie aller Teilmengen von M.
- $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ ... Produktmenge. Bemerkung: Auch möglich: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Aussagen, Quantoren.

- $E_A \Rightarrow E_B$ ... "aus Aussage E_A folgt E_B". Beachte: "Ex falso quodlibet".
- $E_A \Leftrightarrow E_B$ ... "Aussage E_A ist äquivalent zu E_B".
- $\forall a \in A$ ... "für alle Elemente a der Menge A".
- $\exists a \in A$ ... "es existiert (mindestens) ein a in A".

Abbildungen

- Abbildung: Jedem Element $x \in A$ wird genau ein Element $y \in B$ zugeordnet. Notation:

$$\begin{aligned} f : & A \to B \\ & x \mapsto f(x) = y. \end{aligned}$$

  A ist der Definitionsbereich.

- Sei $f : A \to B$ eine Abb. und $C \subseteq A$, dann heißt

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\} \subseteq B$$

  das Bild von C. $f(A)$ ist der Wertebereich von f.

- Sei $D \subset B$. Die Menge

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : \exists y \in D \text{ mit } f(x) = y\} \subseteq A$$

  heißt das Urbild von D.

- Die Menge

$$\{(x, f(x)) : x \in A\} \subset A \times B$$

  heißt der Graph von f.

Abbildungen, Folgen, Zahlenmengen

- Ist $f(A) = B$, so ist f eine Abb. von A auf B. Wenn zu jedem $y \in f(A)$ genau ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ existiert, dann heißt f eineindeutig.

Folgen.

- Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $A \neq \emptyset$. Die Abb. $f : \mathbb{N} \to A$ definiert eine Folge von Elementen aus A.

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots$$

  kürzer: $a_1, a_2, \ldots$ oder $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Zahlenmengen.

- Natürliche Zahlen. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0$.
- Ganze Zahlen. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Rationale Zahlen. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$.
- Reelle Zahlen. $\mathbb{R}$.

Zahlenmengen

- Ordnungsrelation in $\mathbb{R}$. Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ stets $a \leq b$ oder $b \leq a$.
  - $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$.
  - $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (Transitivität).
  - $a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0, a \cdot b \geq 0$ (algebraische Struktur).
- Betrag.

$$|a| = \begin{cases} a \text{ falls } a \geq 0, \\ -a \text{ falls } a < 0. \end{cases}$$

- Intervalle sind Teilmengen von $\mathbb{R}$. Sei $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
  - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ... abgeschlossenes Intervall.
  - $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ... offenes Intervall.
  - Weiter $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$,...

Potenzen, Wurzeln, Binome

Seien $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

- $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (Vorsicht mit Vorzeichen!).
- Gesetze.
  - $a^n a^m = a^{n+m}$.
  - $a^n b^n = (ab)^n$.
  - $(a^n)^m = a^{nm}$.
  - $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
- Potenzen von Binomen.
  - $(a+b)^0 = 1a^0b^0$.
  - $(a+b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$.
  - $(a+b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$.
  - $(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$.
  - $\ldots$.

Potenzen, Wurzeln, Binome

- $(a+b)^n$ besteht aus $n+1$ Summanden. Jeder Summand enthält Potenzen a^{n-k}, b^k und eine Zahl, den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

- Pascal'sches Dreieck.

Nochmals Folgen

- Der Punkt a heißt Häufungspunkt der Folge $\{a_n\}$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgeglieder in $(a - \epsilon, a + \epsilon) =: U_\epsilon(a)$ liegen.
- Der Punkt a heißt Grenzwert der Folge $\{a_n\}$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein Index n_ϵ existiert, sodass $a_n \in U_\epsilon(a)$ für alle $n \geq n_\epsilon$. Man schreibt

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

- Gibt es eine Konstante $C \geq 0$, sodass $|a_n| \leq C \; \forall n \in \mathbb{N}$, so heißt die Folge $\{a_n\}$ beschränkt.
- Eine Folge $\{a_n\}$ ist monoton wachsend (fallend), wenn $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$ ($a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$).
- Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent.