

VORLESUNGEN ÜBER SCHULMATHEMATIK

Kapitel 1: WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND STATISTIK

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Definition 1. Sei Ω eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(\Omega)$ heißt σ -Algebra, wenn gilt:

S1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

S2) Aus $A \in \mathcal{A}$ folgt $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

S3) Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{A} ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Folgerungen. Sei $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(\Omega)$ eine σ -Algebra.

1) Aus $A, B \in \mathcal{A}$ folgt $A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$ und $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Insbesondere ist $\emptyset \in \mathcal{A}$.

2) Der Durchschnitt jeder Folge in \mathcal{A} liegt wieder in \mathcal{A} .

Definition 2. Sei Ω eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(\Omega)$ eine σ -Algebra. Ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf \mathcal{A} ist eine Abbildung $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

(M1) Für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{A} ist

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n).$$

(M2) $P(\Omega) = 1$.

Definition 3. Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Tripel (Ω, \mathcal{A}, P) , bestehend aus einer nicht-leeren Menge Ω , einer σ -Algebra $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(\Omega)$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$.

Die Elemente von Ω heißen *Ergebnisse* oder *Ausfälle* (eines "Zufallsexperiments"). Die Elemente von \mathcal{A} heißen *Ereignisse*. Ist $E \in \mathcal{A}$ und $a \in E$, so sagt man, beim Ergebnis a tritt das Ereignis E ein oder das Ergebnis a ist für das Ereignis E günstig. Für $E \in \mathcal{A}$ heißt $P(E)$ die Wahrscheinlichkeit von A . Sie ist ein Maß für die Erwartung des Eintretens eines Ergebnisses $a \in E$.

Folgerungen. Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \in \mathcal{A}$.

1) Aus $A \subset B$ folgt $P(A) \leq P(B)$ und $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$. Insbesondere ist $P(\emptyset) = 0$.

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Beispiele. 1. Ist Ω abzählbar (endlich oder unendlich) und $\mathcal{A} = \mathbb{P}(\Omega)$, so heißt $(\Omega, P) = (\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum*. In diesem Falle nennt

man die einelementigen Teilmengen von Ω die *Elementarereignisse* und schreibt $P(a) = P(\{a\})$.

2. Sei Ω endlich, $\mathcal{A} = \mathbb{P}(\Omega)$ und P definiert durch

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ausfälle}}{\text{Anzahl der möglichen Ausfälle}}$$

Dann heißt $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein *Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum*.

3. Sei $\Omega = \mathbb{R}$, \mathcal{A} die Menge aller Lebesgue-messbaren Teilmengen von \mathbb{R} und

$$P(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Dann ist (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dazu hat man nachzurechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$$

(Berechnung als Doppelintegral mit Polarkoordinaten).

Bemerkung. Warum nimmt man nicht immer $\mathcal{A} = \mathbb{P}(\Omega)$? Das geht nicht!

Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Dann gibt es kein Wahrscheinlichkeitsmaß $P: \mathbb{P}(S^1) \rightarrow [0, 1]$, so dass $P(\rho A) = P(A)$ für alle $A \subset S^1$ und $\rho \in S^1$ (es gibt kein rotationsinvariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf S^1 , das alle Teilmengen misst).

Korrespondenz zwischen Logik und Mengenlehre. Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Das Ereignis $E = \Omega$ heißt *sicheres Ereignis* (es tritt bei jedem Ausfall ein). Es ist $P(\Omega) = 1$.

Das Ereignis $E = \emptyset$ heißt *unmögliches Ereignis*. Es ist $P(\emptyset) = 0$. Ist E ein Ereignis, so heißt $\neg E = \Omega \setminus E$ das *Gegenereignis* oder die *Negation* von E . Es ist $P(\neg E) = 1 - P(E)$. Sind E_1, E_2 Ereignisse, so heißt $E_1 \vee E_2 = E_1 \cup E_2$ die *Disjunktion* von E_1 und E_2 ("E₁ oder E₂") und $E_1 \wedge E_2 = E_1 \cap E_2$ die *Konjunktion* von E_1 und E_2 ("E₁ und E₂"). Es ist

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$$

Definition 4. Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $E, F \in \mathcal{A}$ und $P(F) > 0$. Dann heißt

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit von E unter der Hypothese F*. Es ist insbesondere $P(E|\Omega) = P(E)$.

Rechenregeln. Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $E, F \in \mathcal{A}$.

1) (Satz von der bedingten Gegenwahrscheinlichkeit) Sei $P(F) > 0$. Dann ist

$$P(E|F) + P(\neg E|F) = 1.$$

2) (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit) Sei $0 < P(F) < 1$. Dann ist

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|\neg F)P(\neg F).$$

3) (Satz von BAYES) Sei $P(E) > 0$ und $0 < P(F) < 1$. Dann ist

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)} = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F|E)P(E) + P(F|\neg E)P(\neg E)}.$$

4) Sei $0 < P(E) < 1$ und $0 < P(F) < 1$. Dann sind äquivalent:

a) $P(E|F) = P(E)$ ("E ist von F stochastisch unabhängig").

b) $P(F|E) = P(F)$ ("F ist von E stochastisch unabhängig").

c) $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ (Multiplikationssatz).

5) Seien $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ und $P(E_1 \cap \dots \cap E_n) > 0$. Dann gilt:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) = \prod_{i=1}^n P\left(E_i \mid \bigcap_{\nu=1}^{i-1} E_\nu\right)$$

(beachte: $\bigcap_{\nu=1}^0 E_\nu = \Omega$ und $P(E|\Omega) = P(E)$).

6) Seien $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ und $P(E_1 \cap \dots \cap E_n) > 0$. Dann sind äquivalent:

a) $P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) = \prod_{i=1}^n P(E_i)$ (Multiplikationssatz)

b) Für jede Teilmenge $J \subset \{1, \dots, n\}$ und alle $i \in \{1, \dots, n\} \setminus J$ ist

$$P\left(E_i \mid \bigcap_{j \in J} E_j\right) = P(E_i).$$

(E_1, \dots, E_n sind stochastisch unabhängig).

Bemerkung. Aus stochastischer Abhängigkeit kann nicht auf kausalen Zusammenhang geschlossen werden ("Geburten und Störche").

1.2 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Im Vorverständnis ist die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses E eine Maßzahl für die Erwartung, dass E eintritt. Dabei ist $P(E) \in [0, 1]$; $P(E) = 0$ bedeutet, E tritt (fast sicher) nicht ein; $P(E) = 1$ bedeutet, E tritt (fast sicher) ein.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E wird häufig in Prozenten angegeben. An Stelle von $P(E) = p \in [0, 1]$ sagt man auch, das Ereignis tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $(100p)\%$ ein.

Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit. Das Ereignis E sei ein mögliches Ergebnis eines (zum mindesten prinzipiell) beliebig wiederholbaren Experiments mit nicht exakt vorhersehbarem Ausgang. Führt man eine lange Versuchsserie durch, so nennt man

$$h_n(E) = \frac{\text{Anzahl des Eintretens von } E \text{ in den ersten } n \text{ Versuchen}}{n}$$

die *relative Häufigkeit* von E in dieser n -stufigen Versuchsserie.

Das **empirische Gesetz der großen Zahlen** besagt: *Ideale Versuchsbedingungen (Gleichartigkeit und beliebige Wiederholbarkeit) vorausgesetzt, stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten $h_n(E)$ für $n \rightarrow \infty$ um einen bestimmten Wert (der sogenannten statistischen Wahrscheinlichkeit des Ereignisses).*

Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Vorhersage dieser statistischen Wahrscheinlichkeit auf Grund eines mathematischen Modells. Diese mathematische Modell muss sich dadurch bewähren, dass die relativen Häufigkeiten in einer langen Versuchsserie zum mindesten ungefähr mit den berechneten Wahrscheinlichkeiten übereinstimmen ("Modellierung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen").

Methoden zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten:

1) Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil auf Grund von Überlegungen a priori (Symmetrieüberlegungen im Zusammenhang mit "Wahrscheinlichkeitsgeräten" wie Würfel, Münze und andere sog. Laplace-Geräte, geometrische Modelle).

2) Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit von experimentellen Daten (medizinische Statistiken, Sterbetafeln odere andere Erfahrungstatsachen).

3) Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen (Wettquotienten).

Lektüre: BFM, Bd. 3, Kap. 7.5, 7.6.

Motivation der bedingten Wahrscheinlichkeit. Bedingte Wahrscheinlichkeiten modellieren relative Anteile und dienen zur Beschreibung der Unabhängigkeit von Ereignissen. Die entsprechenden Überlegungen sind im Rahmen der Prozentrechnung vorzubereiten.

Beispiel 1. Bedingte Wahrscheinlichkeiten (Drogendealer und Schwarzafrikaner). 10% der Grazer Bevölkerung sind Schwarzafrikaner. 0,5% der Grazer Bevölkerung dealt mit Drogen, und 80% der Drogendealer sind Schwarzafrikaner. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein (zufällig gewählter) Schwarzafrikaner ein Drogendealer ist?

Lösung 1: mit einem naiven Wahrscheinlichkeitsbegriff und Bayes'scher Formel.

Lösung 2: mit einem Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{SD, \bar{S}D, S\bar{D}, \bar{S}\bar{D}\}$.

Lösung 3: mit Vierfeldertafel im Rahmen der Prozentrechnung (6./7. Schulstufe).

Beispiel 2. Baumdiagramme. Darstellung mehrstufiger Ereignisse mit jeweils mehreren möglichen Ausfällen durch Baumdiagramme. Charakteristische Beispiele.

a) In einer Lade befinden sich fünf braune und sieben graue Socken. Der Besitzer hat es eilig und holt ohne zu schauen hintereinander zwei Socken heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

- 1) zwei graue Socken
- 2) mindestens eine graue Socke
- 3) zwei Socken gleicher Farbe

erwischt?

Modellierung mit bedingten Wahrscheinlichkeiten, Visualisierung in einem zweistufigen binären Baum.

1. *Pfadregel*: Die Wahrscheinlichkeit der Konjunktion der Ereignisse längs eines Pfades ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades (Pfadwahrscheinlichkeit).

2. *Pfadregel*: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten (erstreckt über alle Pfade, die zu diesem Ereignis führen).

Vorsicht mit den Pfadregeln! Der Begriff des Wahrscheinlichkeitsbaumes wurde nie präzise definiert, seine Verwendung vielmehr durch Beispiele nahegelegt! Im Einzelfall ist eine Verifikation mittels der Rechenregeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten möglich.

b) In einer Klasse mit 18 Schülern werden drei Klassenordner zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zwillinge Claudia und Selina beide Klassenordner werden?

Modellierung in einem zwei- bis dreistufigen Baum, Lösung unter Verwendung beider Pfadregeln.

Einfacher: Kombinatorik. Jede dreielementige Menge von Schülern ist gleichwahrscheinlich, das sind $\binom{18}{3}$ Möglichkeiten. Günstig sind diejenigen Auswahlen, die Claudia und Selina enthalten, davon gibt es 16. Also erhalten wir (unter Zugrundelegung der Laplace-Annahme)

$$P = \frac{16}{\binom{18}{3}} = \frac{1}{51}.$$

c) Wetterprognose (Modellierung einer einfachen Markoff-Kette) Auf einen Regentag folgt mit Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0,3$ ein Sonnentag, auf einen Sonnentag folgt mit Wahrscheinlichkeit $p_2 = 0,25$ ein Regentag. Heute scheint die Sonne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es

- 1) morgen
- 2) übermorgen und überübermorgen

regnet? Modellierung in einem dreistufigen binären Baum.

Beispiel 3. Werfen homogener Würfel. Theoretische Annahme: Jeder Ausfall eines Wurfes ist gleichwahrscheinlich (Wahrscheinlichkeit a priori). Modell: Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum mit 6 Elementen, $\Omega = [1, 6]$.

Beispiel: $E = \{2, 4, 6\}$ ist das Ereignis "Werfen einer geraden Zahl", $P(E) = \frac{3}{6} = 0,5$.

Mehrmaliges Werfen eines homogenen Würfels. Theoretische Annahme: Der Würfel hat kein Gedächtnis. Ergebnis einer Serie von N Würfeln ist ein N -tupel

$(a_1, \dots, a_N) \in [1, 6]^N$. Modellierung im Laplac'schen Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega_N = [1, 6]^N$.

Werfen mehrerer homogener Würfeln. Theoretische Annahme: Die Würfel kommunizieren nicht miteinander. Daher wie vorhin Modellierung im Laplac'schen Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega_N = [1, 6]^N$.

Das Werfen von N Würfeln ist vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung dasselbe wie das N -malige Werfen eines Würfels.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 6 Würfeln mit einem Würfel mindestens einmal "6" zu würfeln? (Trugschluss des Anfängers: $6 \times \frac{1}{6} = 1$).

Darstellung im Laplace-Raum Ω_6 : $E = \{(a_1, \dots, a_6) \in \Omega_6 \mid 1 \in \{a_1, \dots, a_6\}\}$, $\neg E = \{(a_1, \dots, a_6) \in \Omega_6 \mid 1 \notin \{a_1, \dots, a_6\}\} = [1, 5]^6$. Also:

$$P(E) = 1 - P(\neg E) = 1 - \frac{|\neg E|}{|\Omega_6|} = 1 - \frac{5^6}{6^6} = 0,665.$$

Das ist natürlich auch inhaltlich-naiv ohne Verwendung eines Wahrscheinlichkeitsraumes argumentierbar.

b) Betrachte eine Serie von N Würfeln.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, jedesmal "6" zu würfeln? $P = 1/6^N$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im N -ten Wurf "6" zu würfeln? $P = 1/6$ (der Würfel hat kein Gedächtnis).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im N -ten Wurf "6" zu würfeln, falls alle bisherigen Würfe auch bereits "6" waren? Behandlung mit bedingter Wahrscheinlichkeit: Betrachte die Aussagen

V : "Bei den ersten $N - 1$ Würfeln fällt "6".

E : "Beim N -ten Wurf fällt "6".

$$P(E|V) = \frac{P(E \wedge V)}{P(V)} = \frac{1/6^N}{1/6^{N-1}} = \frac{1}{6}.$$

Reflexion: Unterscheide zwischen einer "Wahrscheinlichkeit a priori" und einer "Wahrscheinlichkeit a posteriori". A priori ist die Wahrscheinlichkeit für das N -malige Auftreten von "6" nur $1/6^N$. Ist aber bereits $(N - 1)$ -mal "6" gefallen, so ist die Wahrscheinlichkeit für das N -te Auftreten von "6" wieder $1/6$.

Analoge Beispiele: Serien im Roulette, Mitführen einer Bombe im Flugzeug etc.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Serie von $6N$ Würfeln genau N Einsen zu werfen. Das zugehörige Ereignis E_N besteht aus allen Folgen $(a_1, a_2, \dots, a_{6N})$, die genau N Einsen enthalten. Also ist

$$P(E_N) = \frac{\binom{6N}{N} 5^{5N}}{6^{6N}}.$$

Für $N = 1; 2; 3; 4; 5$ erhält man $P(E_N) = 0,402; 0,296; 0,245; 0,214; 0,192$.

Wie berechnet man $\binom{n}{k}$ für großes n und k ?

Stirling'sche Formel. Für $n \rightarrow \infty$ ist

$$n! \sim S_n = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{genauer: } 1 \leq \frac{n!}{S_n} \leq e^{\frac{1}{12n}}.$$

Daraus folgt (für $n, k, n-k \rightarrow \infty$)

$$\binom{n}{k} \sim S_{n,k} = \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k},$$

genauer:

$$e^{-\frac{1}{12k(n-k)}} \leq \frac{\binom{n}{k}}{S_{n,k}} \leq e^{\frac{1}{12n}}.$$

In unserem Beispiel gilt

$$P(E_N) \sim \sqrt{\frac{3}{5\pi N}} \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Beispiel 4. Junge oder Mädchen? Theoretische Annahme: Beide Geschlechter treten mit derselben Häufigkeit auf, sind also "gleichwahrscheinlich". Hat Familie Müller nur ein Kind, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um einen Jungen handelt, $1/2 = 0,5$. Modellierung in einem Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{J, M\}$ mit $P(J) = P(M) = 1/2$.

Hat Familie Müller 2 Kinder, so gibt es drei Möglichkeiten, wenn man die Reihenfolge nicht berücksichtigt. Man könnte in einem mathematischen Modell die drei Möglichkeiten als gleichwahrscheinlich erklären, ohne dass daran mathematisch etwas falsch wäre (man macht Aussagen über einen Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsraum mit drei Elementen). Dieses Modell liefert aber Voraussagen, welche nicht mit der statistischen Wahrscheinlichkeit übereinstimmen, ist also zwar in sich widerspruchsfrei, aber "ungeeignet" (Analog: Werfen zweier Münzen).

Eine der Realität besser entsprechende Modellierung erhält man, wenn man die Geschlechter aufeinanderfolgender Geburten als voneinander unabhängig und damit jede (geordnete) Geschlechtsfolge in der Geschwisterreihe als gleichwahrscheinlich annimmt (analog: Werfen mehrerer Münzen, Würfeln mit mehreren Würfeln etc.). Diese Vorstellung modelliert man durch einen Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega = \{JJ, JM, MJ, MM\}$$

(die Bezeichnungen erklären sich in diesem Falle selbst).

Dann ist beispielsweise $S = \{JJ, JM, MJ\}$ das Ereignis, dass die Familie mindestens einen Sohn hat, und $P(S) = 3/4$.

Nun sehe ich Herrn Müller auf der Straße mit seinem Sohn, und ich weiß, er hat zwei Kinder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Kind auch ein Junge ist?

1. Lösung: Da die Geschlechter von Geschwistern voneinander unabhängig sind, ist das Geschlecht des zu Hause verbliebenen Kindes von der des mitgeführten unabhängig, und daher ist die Wahrscheinlichkeit $1/2$.

2. Lösung: Ich weiß, dass die Konstellation der Geschlechter der Kinder bei Familie Müller eine der drei gleichwahrscheinlichen Konfigurationen JJ, JM, MJ ist. Nur im ersten Fall ist das zweite Kind auch ein Junge. Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür $1/3$. In bedingter Wahrscheinlichkeit formuliert:

$$P(\text{JJ}|S) = \frac{P(\text{JJ})}{P(S)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Beide Lösungen sind "richtig", sie modellieren verschiedene relative Häufigkeiten. Annahme: 100 Familien, je 25 mit den Konstellationen JJ, JM, MJ, MM. Dann haben wir:

75 Väter mit Jungen, davon 25 mit JJ: die Wahrscheinlichkeit ist $1/3$.

100 Jungen, davon 50 mit Bruder: die Wahrscheinlichkeit ist $1/2$.

Es kommt also darauf an, was man zählt. Trotzdem spricht in unserer Formulierung mehr für die erste Lösung, da erzählt wurde, dass ein Vater mit einem Jungen gesehen wurde. Nimmt man nun noch an, dass Väter mehrerer Kinder mit jedem der Kinder gleich oft gesehen werden, so werde ich einen Vater zweier Jungen doppelt so oft mit einem Sohn sehen als einen Vater von Sohn und Tochter. Um diese letztere Vorstellung zu modellieren, betrachte ich wieder den Raum $\Omega = \{\text{JJ}, \text{JM}, \text{MJ}, \text{MM}\}$ und bezeichne mit $P^*(\text{AB})$ Wahrscheinlichkeit, einen Vater mit Kinderkonstellation AB gemeinsam mit einem Sohn zu treffen. Dann ist $P^*(\text{JJ}) = 1/2$, $P^*(\text{JM}) = P^*(\text{MJ}) = 1/4$ und $P^*(\text{MM}) = 0$. Der Kalkül liefert $P^*(S) = 1$ und $P^*(\text{JJ}|S) = 1/2$.

Nun formuliere ich das Problem etwas anders: Ich weiß, dass Herr Müller zwei Kinder hat und erfahre, dass er einen Sohn besitzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der noch einen zweiten Sohn besitzt? Nun ist wohl eher die Antwort $1/3$ angebracht. Frage ich aber nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass sein Sohn einen Bruder hat, so ist eher die Antwort $1/2$ angebracht (warum?).

Diese Diskussion zeigt die Notwendigkeit einer sorgfältigen sprachlichen Gestaltung von Wahrscheinlichkeitsaussagen. Entsprechend vorsichtig sind Umfrageergebnisse zu interpretieren ("Bei 5% der Verkehrsunfälle ist Alkohol im Spiel" - was kann das alles heißen?)

Andere Textierung: Familie mit zwei Kindern zieht in eine Wohnung ein. Die Wohnungsnachbarn sehen den Vater mit einem Sohn oder erfahren, dass die Familie einen Sohn hat (usw.).

Verwandtes Problem: BERTRANDSches Schubladenbeispiel. Diese Beispiele eignen sich natürlich nicht als Übungs- oder Prüfungsbeispiele. Ihr didaktischer Wert liegt darin, dass sie zeigen, wie vorsichtig mit der Wahrscheinlichkeitsbegriff des Alltages umgegangen werden muss.

Beispiel 5. Glücksrad. Auf einem wie eine Uhr beschriebenen Rad versetzt man einen Zeiger in Drehung, der dann an "zufälliger" Stelle stehenbleibt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen 11 und 12 Uhr stehenbleibt?

Modell 1 (kontinuierliches Modell): Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger in einem Winkelbereich W_α der Größe α stehenbleibt, ist proportional zu α . Man wählt $\Omega = S^1$ (für den Schulgebrauch $\Omega = [0, 360)$) und für P wieder das normierte Lebesgue'sche Maß (für den Schulgebrauch genügt es, Winkelräume W_α mit Zentriwinkel $\alpha \in [0, 360)$ zu messen, und dann setzt man $P(W_\alpha) = \alpha/360$). Dann ist $E = [330, 360]$ das Ereignis "zwischen 11 und 12 Uhr stehenbleiben" und $P(E) = 30/360 = 1/12$.

Da es kein rotationsinvariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf S^1 gibt, das alle Teilmengen misst, kann man in einer strengen mathematischen Behandlung nicht die σ -Algebra $\mathbb{P}(S^1)$ wählen.

In diesem Modell ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E = 330$ (der Zeiger auf bleibt auf 11 Uhr stehen) Null (das ist auch der Nachteil dieses Modells). Es zeigt aber auch: $P(E) = 0$ bedeutet nicht, dass das Ereignis unmöglich ist.

Modell 2 (diskretes Modell): Man nimmt an, dass der Ausgang eines Experiments immer in ganzen Minuten feststellbar ist. Dann ist das Modell ein Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{1, 2, \dots, 60\}$, $E = \{55, 56, 57, 58, 59, 60\}$ ist das Ereignis "zwischen 11 und 12 Uhr stehenbleiben" und $P(E) = 6/60 = 1/10$.

Welches Modell zu bevorzugen ist, hängt von "äusseren" Umständen ab: der physikalischen Beschaffenheit des Glücksrades, den Wettbedingungen etc.

Beispiel 6. Rendezvous. Zwei Personen A und B verabreden, einander zwischen 12 und 13 Uhr zu treffen. Jeder sollte zu einem beliebigen ("zufälligen") Zeitpunkt kommen, 10 Minuten warten und dann wieder gehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich treffen? Wie groß muß die Wartezeit sein, damit sie sich mit mindestens 50%-iger Wahrscheinlichkeit treffen? Andere Textierung: Nachtwächter und Einbrecher.

Modell: $\Omega = [0, 60] \times [0, 60] \subset \mathbb{R}^2$. $(a, b) \in \Omega$ bedeute das Ergebnis "A kommt nach a Minuten und B nach b Minuten". Das Ereignis "A und B treffen sich" ist dann

$$E = \{(x, y) \in \Omega \mid |x - y| \leq 10\}.$$

Als Maß wählt man wieder das normierte Lebesgue'sche Maß: $P(X) = \mu(X)/3600$.

Beispiel 7. Geburtstagspöblem. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von N Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?

Modell: Wir nehmen an, dass das Jahr 365 Tage hat und jedes N -tupel von Geburtstagen gleichwahrscheinlich ist. Wir betrachten den Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{1, \dots, 365\}^N$ und das Ereignis $E_N \subset \Omega$, bestehend aus allen Folgen $(x_1, \dots, x_N) \in \Omega$ mit mindestens zwei gleichen Gliedern. Gesucht ist $P(E_N)$. Betrachte die Menge $\neg E_N$ aller Folgen mit lauter verschiedenen

Gliedern. Es ist (mittels Stirling'scher Formel)

$$|\neg E_N| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - N + 1) = \frac{365!}{(365 - N)!}$$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi \cdot 365} \left(\frac{365}{e}\right)^{365}}{\sqrt{2\pi(365 - N)} \left(\frac{365 - N}{e}\right)^{365 - N}} = \frac{365^{365,5}}{(365 - N)^{365,5 - N}} e^{-N},$$

und $P(E_N) = 1 - P(\neg E)$. Man erhält $P(E_{20}) \approx 0,412$ und $P(E_{30}) \approx 0,706$.

Beispiel 8. BERTRAND'sches Paradoxon. In einem Kreis mit Radius r wird willkürlich ("zufällig") eine Sehne gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W , dass diese Sehne länger ist als die Seitenlänge a des dem Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks? Man kann o. E. $r = 1$ (also $a = \sqrt{3}$) annehmen.

Modell 1: Man kann einen festen Punkt P auf der Kreislinie auszeichnen und sich auf Sehnen durch P beschränken. Sei t die Tangente im Punkte P und $\alpha \in (0, 180)$ der Winkel zwischen der Sehne und t . Dann ist die Sehne durch α eindeutig bestimmt, und wir nehmen an, dass jede Richtung gleichwahrscheinlich sei. "Günstig" sind die Winkel $\alpha \in (60, 120)$, und daher folgt $W = 60/180 = 1/3$.

Modell 2: Man kann einen Durchmesser d des Kreises auszeichnen und sich auf Sehnen normal zu d beschränken. Wir identifizieren den Durchmesser mit $[0, 2]$ und bezeichnen mit $x \in [0, 2]$ den Schnittpunkt der Sehne mit d . Dann ist die Sehne durch x eindeutig bestimmt, und wir nehmen an, dass jeder Punkt $x \in [0, 2]$ gleichwahrscheinlich sei. "Günstig" sind die Punkte $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, und daher folgt $W = 1/2$.

Modell 3: Jede Sehne ist durch ihren Mittelpunkt M bestimmt. Wir nehmen an, dass jeder Punkt des Kreises als Mittelpunkt gleichwahrscheinlich ist. Die "günstigen" Mittelpunkte liegen im Inkreis eines eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, also in einem Kreis vom Radius $1/2$. Also ergibt sich

$$W = \frac{(\frac{1}{2})^2 \pi}{\pi} = \frac{1}{4}.$$

Die unterschiedlichen Ergebnisse sind die Folge verschiedener Annahmen über Gleichwahrscheinlichkeit. Welche die "richtige" ist, kann im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht entschieden werden. Es hängt vom Verwendungszweck des Modells ab.

1.3 Kombinatorik

Grundproblem. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Objekten k auszuwählen?

4 verschiedene Fragestellungen: Mit Berücksichtigung der Reihenfolge (k -Permutationen oder Variationen) oder ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (k -Kombinationen); in beiden Fällen mit oder ohne Wiederholungen. Terminologie uneinheitlich! Wir symbolisieren die Anzahlen in selbsterklärender Weise wie folgt:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\text{mW}}^{\text{mR}}, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\text{oW}}^{\text{mR}}, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\text{mW}}^{\text{oR}}, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\text{oW}}^{\text{oR}}.$$

Mathematische Präzisierung: Objektmenge $\Omega = [1, n]$. Ausgewählte Objekte mit Berücksichtigung der Reihenfolge sind k -tupel $(a_1, \dots, a_k) \in \Omega^k$. Ausgewählte Objekte ohne Berücksichtigung der Reihenfolge sind k -Multimengen $[a_1, \dots, a_k]$ (eine k -Multimenge ist eine Äquivalenzklasse von k -tupeln; dabei heißen zwei k -tupel äquivalent, wenn sie durch Permutationen auseinander hervorgehen). Jede k -Multimenge $[a_1, \dots, a_k]$ kann in eindeutiger Weise durch ein k -tupel (a_1, \dots, a_k) mit $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ repräsentiert werden.

Didaktische Bemerkungen. Erläuterung der Begriffe in aufsteigenden Abstraktionsstufen: 1) enaktiv (durch konkretes Handeln); 2) ikonisch (durch suggestive Skizzen); 3) symbolisch (durch abstrakte Formeln, Gleichungen etc.). Immer zuerst für kleine n und k . Verständiges Arbeiten an konkreten Problemen ist einem Formelschematismus vorzuziehen!

Formeln und Deutungen.

1) k -Permutationen mit Wiederholung.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\text{mW}}^{\text{mR}} = |\Omega^k| = n^k.$$

Deutung: Anzahl der Wörter der Länge k aus n Buchstaben; Anzahl der Totobanken ($k = 12, n = 3$), Anzahl der k -stelligen Telefonnummern ($n = 10$), Anzahl der möglichen Würfe mit k Würfeln ($n = 6$).

Argumentation (am Modell der Wörter der Länge k aus n Buchstaben): Es gibt n Möglichkeiten, den ersten Buchstaben zu wählen; zu jeder dieser gibt es n Möglichkeiten, den zweiten zu wählen, also n^2 Möglichkeiten für die ersten zwei Buchstaben etc.

2) k -Permutationen ohne Wiederholungen.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\text{oW}}^{\text{mR}} = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k > n, \\ \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!, & \text{falls } k \leq n. \end{cases}$$

Deutung: Anzahl der k -tupel $(a_1, \dots, a_k) \in \Omega^k$, bei denen a_1, \dots, a_k paarweise verschieden sind; Anzahl der injektiven Abbildungen $[1, k] \rightarrow [1, n]$; Anzahl der Möglichkeiten, dass k Personen auf n Stühlen Platz nehmen; Anzahl der geordneten Stichproben von k aus n Objekten; Anzahl der möglichen Anordnungen von n Objekten ($k = n$) und Deutung als Permutationen.

Argumentation (am Modell der k Personen auf n Plätzen): Die erste Person hat n Möglichkeiten. Hat sie gewählt, so hat die zweite Person $n - 1$ Möglichkeiten, die dritte Person hat dann noch $n - 2$ Möglichkeiten, ..., die k -te Person hat schließlich noch $n - k + 1$ Möglichkeiten. Produkt!

2a) k -Permutationen mit festgelegten Wiederholungen. Sei $k = k_1 + \dots + k_n$. Dann ist

$$\frac{k!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

die Anzahl aller $(a_1, \dots, a_k) \in \Omega^k$, bei denen die Zahl ν genau k_ν -mal vorkommt.

Deutung: Anzahl der Anordnungen von k Kugeln, von denen k_1 die Farbe F1, k_2 die Farbe F2 etc. haben; Anzahl des Vorkommens des Potenzproduktes $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdot \dots \cdot a_n^{k_n}$ beim Ausmultiplizieren von $(a_1 + \dots + a_k)^n$. Es gilt die Formel

$$(a_1 + \dots + a_n)^k = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ k_1 + \dots + k_n = k}} \frac{k!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!} a_1^{k_1} \cdot \dots \cdot a_n^{k_n}.$$

Speziell: Binomische Formel für $n = 2$.

Argumentation (am Modell der Kugeln): Man nimmt zunächst an, alle Kugeln wären unterscheidbar (etwa numeriert). Dann gibt es (wie wir bereits wissen) $k!$ Anordnungen. Dann gibt es $k_1!$ Möglichkeiten, die Kugeln der Farbe F1 zu permutieren und jede dieser Permutationen liefert dieselbe Anordnung der unnumerierten Kugeln. Zu jeder dieser gibt es $k_2!$ Möglichkeiten etc.

3) k -Kombinationen ohne Wiederholungen.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\text{ow}}^{\text{or}} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \begin{cases} 0, & \text{falls } k > n, \\ \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{falls } k \leq n. \end{cases}$$

Wir können im Folgenden $k \leq n$ annehmen.

Deutung: Anzahl der k -tupel $(a_1, \dots, a_k) \in \Omega^k$ mit $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge, Anzahl der Möglichkeiten, k Personen aus einer Gruppe von n Personen auszuwählen; Anzahl der möglichen Ausfälle im Lotto "6 aus 45", Anzahl der n -gliedrigen Null-Eins-Folgen mit genau k Einsen, Anzahl der Wege in einem n -stufigen binären Baum, bei denen k -mal nach links abgezweigt wird.

Argumentation (am Modell der Teilmengen): Man beschreibt eine k -elementige Teilmenge $A \subset \Omega$ durch die Folge $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ mit

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in A, \\ 0, & \text{falls } i \notin A. \end{cases}$$

Dann ist die gesuchte Anzahl gleich der Anzahl der n -gliedrigen Folgen in $\{0, 1\}$ mit k Einsen und $n - k$ Nullen, also nach **2a)**

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

4) k -Kombinationen mit Wiederholungen.

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{\text{mW}}^{\text{oR}} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Deutung: Anzahl der k -tupel $(a_1, \dots, a_k) \in \Omega^k$ mit $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$; Lotto "k aus n mit Zurücklegen der Kugeln"; Aufteilung von k nicht unterscheidbaren Objekten auf n Zellen (hier ist a_i die Zellennummer des i -ten Objektes; in der Zelle mit der Nummer ν befinden sich dann

$$k_\nu = \sum_{i=1}^k \delta_{\nu, a_i}$$

Objekte); konkret: 5 nicht unterscheidbare Hasen in 8 Käfige, k gleiche Kugeln in n Urnen.

Argumentation: Es besteht die bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} \phi: \{(a_1, \dots, a_k) \in [1, n]^k \mid a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k\} \\ \rightarrow \{(a_1^*, \dots, a_k^*) \in [1, n+k-1]^k \mid a_1^* < a_2^* < \dots < a_k^*\}, \end{aligned}$$

definiert durch

$$\phi(a_1, \dots, a_k) = (a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, \dots, a_k + k - 1)$$

Also folgt

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{\text{mW}}^{\text{oR}} = \left[\begin{matrix} n+k-1 \\ k \end{matrix} \right]_{\text{oW}}^{\text{oR}} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Beispiel. Ein Eissalon bietet 9 verschiedene Eissorten an. Wie viele Menüs aus drei Kugeln kann man sich zusammenstellen? ($k = 3$, $n = 9$).

- a) Alle Kugeln verschieden, mit Berücksichtigung der Reihenfolge: $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.
- b) Alle Kugeln verschieden, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: $\binom{9}{3} = 84$.
- c) Kugeln nicht notwendig verschieden, mit Berücksichtigung der Reihenfolge: $9^3 = 729$.
- d) Kugeln nicht notwendig verschieden, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: $\binom{9+3-1}{3} = \binom{11}{3} = 165$.
- e) Mindestens zwei verschiedene Sorten, mit Berücksichtigung der Reihenfolge: $729 - 9 = 720$ (keine Standardformel anwendbar!).

f) Mindestens zwei verschiedene Sorten, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: $165 - 9 = 156$.

g) Genau zwei verschiedene Sorten, mit Berücksichtigung der Reihenfolge:
 $\binom{9}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot 2 = 216$ (2 aus 9 Sorten auswählen, jedesmal 2 aus 3 Plätzen auswählen und das Ganze doppelt zählen: "Beispielgebundenes Nachdenken"). Damit neue Lösung von e): $216 + 504 = 720$.

h) Genau zwei verschiedene Sorten, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge:
 $\binom{9}{2} \cdot 2 = 72$ (2 aus 9 Sorten auswählen, jede Wahl zählt doppelt). Damit neue Lösung von f): $72 + 84 = 156$.

1.4 Zufallsvariable

Definition. Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Eine *Zufallsvariable auf* (Ω, \mathcal{A}, P) ist eine messbare Abbildung $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (messbar bedeutet: Für jedes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ ist $X^{-1}(J) \in \mathcal{A}$).

Die Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{A}, P) bilden einen \mathbb{R} -Vektorraum bei wertweise Verknüpfung. Ist X eine Zufallsvariable und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare Abbildung, so ist $g \circ X = g(X)$ wieder eine Zufallsvariable (jede Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen ist messbar).

Inhaltliche Vorstellung: X ist eine zu messende oder zu zählende Größe, die bei einem "zufälligen" Ereignis interessiert. Genau liegt der Wert von X in einer Menge $J \subset \mathbb{R}$, wenn das Ereignis $E = X^{-1}(J) \subset \Omega$ eintritt. Man sagt dann, dass X mit der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ in J liegt. Schreibweisen:

$$P(X \in J) = P(X^{-1}(J)), \quad P(X = a), \quad P(a \leq X < b) \quad \text{etc.}$$

Es ist $P(X \notin J) = 1 - P(X \in J)$, $P(X \in \mathbb{R}) = 1$, $P(X \in \emptyset) = 0$, und für jede Folge paarweise disjunkter Intervalle $(J_n)_{n \geq 0}$ ist

$$P\left(X \in \bigcup_{n \geq 0} J_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X \in J_n).$$

Eine Zufallsvariable X heißt *diskret*, wenn $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ diskret ist (zum Beispiel $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$ oder $X(\Omega) = [1, n]$). Eine Zufallsvariable X heißt *kontinuierlich*, wenn $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Diskrete Zufallsvariable beschreiben Zählvorgänge, kontinuierliche Zufallsvariable beschreiben Messvorgänge.

b) Seien X_1, \dots, X_n Zufallsvariable. X_1, \dots, X_n heißen *unabhängig*, wenn für alle Intervalle $J_1, \dots, J_n \subset \mathbb{R}$ die Ereignisse $X_1^{-1}(J_1), \dots, X_n^{-1}(J_n)$ stochastisch unabhängig sind, das heißt,

$$P(X_1 \in J_1 \wedge X_2 \in J_2 \wedge \dots \wedge X_n \in J_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in J_i).$$

Diskrete Zufallsvariable X_1, \dots, X_n sind genau dann unabhängig, wenn gilt: Für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ist

$$P(X_1 = a_1 \wedge X_2 = a_2 \wedge \dots \wedge X_n = a_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = a_i).$$

c) Sei X eine Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{definiert durch} \quad F(x) = P(X \leq x) = P\left(X^{-1}((-\infty, x])\right),$$

die *Verteilungsfunktion von X* .

Eigenschaften der Verteilungsfunktion. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F , und seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

- 1) $P(X > a) = 1 - F(a)$.
- 2) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.
- 3) F ist monoton wachsend, rechtsseitig stetig und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

4) Es ist

$$P(X < a) = \lim_{x \rightarrow a-} F(x).$$

5) Genau dann ist $P(X = a) \neq 0$, wenn F im Punkte a unstetig ist. Im allgemeinen ist

$$P(X = a) = F(a) - \lim_{x \rightarrow a-} F(x).$$

6) Ist F stetig, so ist $P(X = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

7) Ist $X_1 = \alpha X + \beta$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\beta \in \mathbb{R}$, und ist F_1 die Verteilungsfunktion von X_1 , so gilt

$$F_1(x) = F\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right).$$

Folgerung. Alle stochastisch relevanten Informationen über die Zufallsvariable X sind in ihrer Verteilungsfunktion codiert. Der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum spielt keine Rolle mehr.

Diskrete Zufallsvariable. Wir betrachten Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$. Die Funktion

$$Z: \begin{cases} \mathbb{N}_0 & \rightarrow [0, 1] \\ k & \mapsto P(X = k) \end{cases}$$

heißt *Zähldichte von X* . Die Verteilungsfunktion F von X ist dann gegeben durch

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} P(X = k).$$

1) Gleichverteilung auf $[1, n]$: Eine Zufallsvariable X heißt *gleichverteilt auf $[1, n]$* , wenn ihre Zähldichte gegeben ist durch

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } k \in [1, n], \\ 0, & \text{falls } k \notin [1, n]. \end{cases}$$

Beispiel. Die Augenzahl X beim Werfen eines Würfels ist gleichverteilt auf $[1, 6]$. Werfen von N Würfeln: X_i sei die Augenzahl des i -ten Würfels. Dann sind die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_N unabhängig, und die Zufallsvariable $X_1 + \dots + X_N$ beschreibt die Summe der Augenzahlen.

2) Null-Eins-Verteilung und Binomialverteilung. X heißt *Null-Eins-verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$* , wenn die Zähldichte gegeben ist durch

$$P(X = k) = \begin{cases} p, & \text{falls } k = 1, \\ 1 - p, & \text{falls } k = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist X Null-Eins-verteilt mit Parameter p , so ist $1 - X$ Null-Eins-verteilt mit Parameter $1 - p$. Inhaltlich beschreibt X ein einzelnes Ereignis, das mit der Wahrscheinlichkeit p eintritt, und $1 - X$ das zugehörige Gegenereignis.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$. X heißt *$B_{n,p}$ -verteilt* oder *binomial verteilt mit Parametern n und p* , wenn $X = X_1 + \dots + X_n$, wobei X_1, \dots, X_n unabhängige Null-Eins-verteilte Zufallsvariable mit Parameter p sind.

Zähldichte und Verteilungsfunktion einer $B_{n,p}$ -verteilten Zufallsvariablen X sind gegeben durch

$$B_{n,p}(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{und} \quad F_{n,p}(k) = P(X \leq k) = \sum_{j=0}^k B_{n,p}(j).$$

Insbesondere ist die Null-Eins-Verteilung mit Parameter p dasselbe wie die $B_{1,p}$ -Verteilung. Die Werte der Verteilungsfunktion $F_{n,p}$ für $p \leq 0,5$ sind tabelliert. Es ist

$$F_{n,p}(k) + F_{n,1-p}(n - k - 1) = 1.$$

Beweis: Ist $X = X_1 + \dots + X_n$ mit $B_{1,p}$ -verteilten Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n , so ist $X' = (1 - X_1) + \dots + (1 - X_n) = n - X$ eine $B_{n,1-p}$ -verteilte Zufallsvariable, und

$$\begin{aligned} F_{n,p}(k) + F_{n,1-p}(n - k - 1) &= P(X \leq k) + P(X' \leq n - k - 1) \\ &= P(X \leq k) + P(X \geq k + 1) = 1. \end{aligned}$$

Interpretation: Bei einem Versuch trete ein Ereignis E stets mit derselben Wahrscheinlichkeit p ein. Der Versuch wird n -mal wiederholt. $B_{n,p}(k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E genau k Mal eintritt. Die Zufallsvariable X zählt das Eintreten von E .

Typische Beispiele: $B_{n,1/6}(k)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Würfeln eines Würfels genau k Einsen fallen.

In einer Urne liegen N Kugeln, w weiße und $r = N - w$ rote. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei n -maligem Ziehen mit Zurücklegen genau k weiße Kugeln zu ziehen? $B_{n,p}(k)$ mit $p = w/N$.

Produktion mit einem Fehleranteil von p (meist in Prozenten angegeben). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Produktion von n Stücken genau k fehlerhafte hergestellt werden? $B_{n,p}(k)$.

Ein Medikament wirkt mit der Wahrscheinlichkeit p . Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von n Personen genau k auf die Behandlung ansprechen? $B_{n,p}(k)$.

In einer Produktion von N Werkstücken sind (wie etwa eine Kontrollstelle angezeigt hat) n Fehler aufgetreten. Dann ist $B_{n,1/N}(k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewähltes Werkstück genau k Fehler besitzt (die Unabhängigkeit der Fehler untereinander und deren Gleichverteilung auf die Werkstücke vorausgesetzt) (denn: die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück den i -ten Fehler hat, ist $1/N$; daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass es genau k von n Fehlern hat, gleich $B_{n,1/N}(k)$).

Beweisidee der Formel für $B_{n,p}(k)$ mit einem n -stufigen binären Baum. $B_{n,k}(p)$ ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses welches im Baum genau durch die Pfade mit k Verzweigungen nach "links" (mit Wert p). Für jeden solchen Pfad ist die Pfadwahrscheinlichkeit $p^k(1-p)^{n-k}$, und es gibt $\binom{n}{k}$ solche Pfade.

Didaktische Bemerkungen: Spätestens jetzt müssen die Binomialkoeffizienten zur Verfügung stehen (Deutungen: Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge, Anzahl der 0,1-Folgen der Länge n mit genau k Einsen, Permutationen mit Wiederholungen, Koeffizienten im binomischen Lehrsatz, Pascal'sches Dreieck).

3) Hypergeometrische Verteilung. Seien N, M, n natürliche Zahlen mit $M \leq N$ und $n \leq N$. Eine Zufallsvariable X heißt $H_{N,M,n}$ -verteilt oder *hypergeometrisch verteilt mit Parametern* (N, M, n) , wenn

$$H_{N,M,n}(k) = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{falls } k \leq n,$$

und $H_{N,M,n}(k) = 0$, falls $k > n$.

Interpretation: Ziehen ohne Zurücklegen. Entnahme von Stichproben.

In einer Urne sind N Kugeln, M rote und $N - M$ schwarze. Werden n Kugeln ohne Zurücklegen (oder "auf einmal") gezogen, so ist $H_{N,M,n}(k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen n Kugeln genau k rote sind. Die Zufallsvariable X zählt die roten Kugeln. Beweis mit Kombinatorik ("günstige durch mögliche").

Produktion mit einem Fehleranteil von p (meist in Prozenten angegeben). Aus einem Los von N Produkten wird eine Stichprobe von n Stück genommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Stichprobe genau k fehlerhaft Stücke enthält? $H_{N,M,n}(k)$ mit $M = Np$.

Approximation durch die Binomialverteilung: Ist $M = pN$ (wie eben), so folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} H_{N,pN,n}(k) = B_{n,p}(k).$$

„Rezept“: Im Falle $N > 10n$ ist $H_{N,M,n}(k) \approx B_{n,M/N}(k)$.

4) Poisson-Verteilung. Sei $\mu \in \mathbb{R}$. Eine diskrete Zufallsvariable X heißt P_μ -verteilt oder *Poisson-verteilt mit Parameter μ* , wenn

$$P_\mu(k) = P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}.$$

Poisson'scher Grenzwertsatz. Es ist

$$P_\mu(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{n, \frac{\mu}{n}}(k).$$

Der Beweis ist einfach und auch in der Schule durchführbar.

Verwendung der Poissonverteilung:

1. Zur Approximation der Binomialverteilung $B_{n,p}$ bei kleinem p und großem n .

„Rezept“: Im Falle $p \leq 0,05, n \geq 10$ oder $p \leq 0,1, n \geq 50$ ist

$$B_{n,p}(k) \approx P_{np}(k).$$

2. Zur Beschreibung der Zufallsvariablen *„Fehler pro Einheit“*: In einer Produktion treten durchschnittlich μ Fehler pro Einheit auf (Webfehler pro qm, Druckfehler pro Seite, etc.). In einer Produktion von N Einheiten treten dann $n = N\mu$ Fehler auf. Ist X die Zufallsvariable, die die Fehler pro Einheit zählt, so gilt (für großes N)

$$P(X = k) = B_{N\mu, 1/N}(k) \approx P_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}.$$

Weitere Anwendungen: Signale (z. B. Telefonanrufe) pro Einheit. Siehe auch das folgende Beispiel.

Beispiel (Geburtstagsproblem). Bei einer Betriebsfeier sind 300 Personen anwesend. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Personen an diesem Tag (= heute) Geburtstag haben?

Die Anzahl X der Personen, die heute Geburtstag haben, ist eine $B_{300, 1/365}$ -verteilte Zufallsvariable, $B_{300, 1/365}(k) \approx P_{300/365}(k)$, und $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$.

Mittels Binomialverteilung erhält man $P(X \geq 2) = 0,19902$ und mittels Poisson-Verteilung $P(X \geq 2) = 0,19911$.

5) Geometrische Verteilung. Eine diskrete Zufallsvariable X heißt *geometrisch verteilt mit Parameter* $p \in (0, 1)$, wenn die Zähldichte gegeben ist durch

$$G_p(k) = P(X = k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 0, \\ (1-p)^{k-1}p, & \text{falls } k \geq 1. \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion ist dann

$$P(X \leq k) = \sum_{j=1}^k (1-p)^{j-1}p = 1 - (1-p)^k.$$

Interpretation: Bei einem Versuch trete ein Ereignis E stets mit derselben Wahrscheinlichkeit p ein. Dann ist $G_p(k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E beim k -ten Versuch das erste Mal eintritt. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Versuche bis zum ersten Erfolg.

Der zugehörige Wahrscheinlichkeitsraum ist ein unendliches Produkt. Seine Konstruktion ist nicht einfach. Trotzdem hat die Zufallsvariable eine einfache Struktur!

Didaktische Konsequenz: Es ist sinnvoll, Zufallsvariable ohne die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsräume zu lehren. Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich dann (jenseits der Aufgaben zu einem naiven Wahrscheinlichkeitsbegriff) mit den verschiedenen Verteilungen zufälliger Größen.

Kontinuierliche Zufallsvariable. Sei X eine Zufallsvariable und $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Verteilungsfunktion von X . Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Dichtefunktion von X* , wenn f über \mathbb{R} (im Lebesgue'schen Sinne) integrierbar ist und

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz.$$

Wir setzen im Folgenden stets voraus:

$$f \text{ ist stetig, und das Integral } \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \text{ ist absolut konvergent.}$$

Dann ist F differenzierbar und $F' = f$. Wir setzen

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{und} \quad F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Dann gilt für $-\infty \leq a < b \leq \infty$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a).$$

Eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$ absolut konvergiert, ist genau dann die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen, wenn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 1$.

Ist f die Dichtefunktion von X und $X_1 = \alpha X + \beta$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\beta \in \mathbb{R}$, so besitzt X_1 die Dichtefunktion

$$f_1(x) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right).$$

Sind X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariable mit Dichtefunktionen f_1 und f_2 , so besitzt $X_1 + X_2$ die Dichtefunktion $f_1 * f_2$ (Faltung von f_1 und f_2), definiert durch

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z) f_2(x - z) dz.$$

Definiton. Eine Zufallsvariable X heißt *Standard-normalverteilt* oder $N(0,1)$ -verteilt, wenn X die Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \left(\text{es ist } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1 \right)$$

besitzt. Dann besitzt X die Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad \text{und es ist } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad \text{und} \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Die Bezeichnungen φ und Φ sind standardisiert, und die Werte $\Phi(x)$ für $x > 0$ sind tabelliert.

Eine Zufallsvariable X heißt *normalverteilt mit Parametern* $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ oder $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt, wenn die Zufallsvariable

$$X^* = \frac{1}{\sigma}(X - \mu)$$

$N(0,1)$ -verteilt ist. Dann ist $X = \sigma X^* + \mu$, und die Verteilungsfunktion F und die Dichtefunktion f von X sind gegeben durch

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{und} \quad f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Berechnungen mit der Normalverteilung. Sei X eine $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable und $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) \\ &= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \int_{\frac{a - \mu}{\sigma}}^{\frac{b - \mu}{\sigma}} \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Insbesondere ist für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$

$$P(|X - \mu| \leq \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1.$$

Einige Werte:

$$P(X \leq \mu + \sigma) = P(X \geq \mu - \sigma) = \Phi(1) = 0,841;$$

$$P(|X - \mu| \leq \sigma) = 2\Phi(1) - 1 = 0,682;$$

$$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) = 2\Phi(2) - 1 = 0,954;$$

$$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1 = 0,998.$$

1.5 Erwartungswert und Varianz

Definition. Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Ist X über Ω bezüglich P integrierbar, so sagt man, X besitzt einen Erwartungswert und nennt

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP$$

den Erwartungswert von X .

Andere Deutung desselben Integrals: X beschreibt die Massen-Dichteverteilung in einem Körper Ω und dP ist das Volumenelement. Dann ist das Integral die Gesamtmasse.

Wir beschreiben das nun explizit ohne Verwendung von Maß- und Integrationstheorie für diskrete und kontinuierliche Zufallsvariable.

a) Sei X diskret, $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ mit (endlicher oder unendlicher) Indexmenge I . Dann ist (im Falle eines unendlichen I die absolute Konvergenz vorausgesetzt)

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$$

der Erwartungswert von X . Ist $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, so ist (wieder Konvergenz im unendlichen Fall vorausgesetzt)

$$E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) P(X = x_i)$$

der Erwartungswert von $g(X) = g \circ X$.

b) Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Dichtefunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und fg über \mathbb{R} integrierbar, so ist

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) f(z) dz$$

der Erwartungswert von $g(X)$.

Deutung des Erwartungswertes: Ein Experiment produziere die Messwerte (Ergebnisse) x_i , beschrieben durch die diskrete Zufallsvariable X . In einer Serie von N Experimenten trete das Ergebnis x_i genau n_i -mal auf. Dann ist $\frac{n_i}{N}$ die relative Häufigkeit des Ergebnisses x_i , also (bei Zugrundelegen eines passenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Modells)

$$P(X = x_i) \approx \frac{n_i}{N}.$$

Der (gewichtete) Mittelwert der Ergebnisse ist dann

$$\sum_{i=1}^N \frac{n_i}{N} x_i \approx \sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i) = E(X).$$

Daher ist $E(X)$ ein (stochastischer) Schätzwert für den Mittelwert.

Sei nun allgemeiner $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine "Ertragsfunktion" für das Experiment, das heißt, $g(x)$ sei der zu erwartende Ertrag beim Ausfall x . Der bei obigen Ausfällen erzielte Gesamtertrag ist dann

$$G = \sum_{i=1}^N n_i g(x_i).$$

Daher ist der durchschnittliche Ertrag pro Ausfall

$$\frac{G}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{n_i}{N} g(x_i) = E(g(X)).$$

Daher ist $E(g(X))$ ein (stochastischer) Schätzwert für den durchschnittlichen Ertrag, gemessen mit der Ertragsfunktion g .

Beispiel 1. Wie oft muß man "durchschnittlich" würfeln, bis das erste Mal "6" fällt? Ist x die Anzahl der Würfe, so ist die Zufallsvariable X mit Wert x geometrisch verteilt mit Parameter $1/6$ und $E(X)$ die gesuchte Anzahl.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{S}{6} \quad \text{mit} \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

Wie summiert man diese Reihe?

Methode 1 ("Schulmethode"): Aus $S = 1 + 2\left(\frac{5}{6}\right) + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots$ folgt $\frac{5}{6}S = \frac{5}{6} + 2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 3\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots$ und $\frac{1}{6}S = S - \frac{5}{6}S = 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots = 1/(1 - \frac{5}{6}) = 6$ und daher $S = 36$.

Methode 2 ("Potenzreihen"): Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)' = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = (1-z)^{-2}$; $z = \frac{5}{6}$ liefert das Ergebnis.

Beispiel 2. Im Roulette setzt man auf "0". Wie hoch ist die Gewinnerwartung beim Einsatz G ? "0" kommt mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/37$ und zieht dann die Auszahlung des 36-fachen Einsatzes nach sich. Sei $X = 1$, falls "0" kommt, $X = 0$ sonst. Dann ist X Null-Eins-verteilt mit Parameter $p = 1/37$, und die Gewinnfunktion dieses Spiels ist gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 35G, & \text{falls } x = 1, \\ -G, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Damit berechnet man den zu erwartenden Gewinn pro Spiel als

$$E(g(X)) = g(1)P(X = 1) + g(0)P(X = 0) = 35G \cdot \frac{1}{37} + (-G) \cdot \frac{36}{37} = -\frac{1}{37}G.$$

Beispiel 3. Im Roulette setzt man den Einsatz G auf "Rot". Kommt "Rot", beendet man das Spiel, andernfalls wiederholt man das Spiel mit doppeltem Einsatz (dann ist $2^k G$ der Einsatz beim $(k+1)$ -ten Spiel). Der Höchsteinsatz sei $2^K G$ mit $K \in \mathbb{N}$. Bei "0" bleibe der Einsatz stehen (diese Ausfälle können also in der Serie vernachlässigt werden). Wie hoch ist die Gewinnerwartung? Sei x die Anzahl der Spiele bis zum ersten "Rot". Dann ist die Gewinnfunktion gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} G, & \text{falls } x \leq K + 1, \\ -(G + 2G + \dots + 2^{K-1}G), & \text{falls } x > K + 1. \end{cases}$$

Die Zufallsvariable X mit Wert x ist $G_{1/2}$ -verteilt, also folgt

$$E(g(X)) = \sum_{x=1}^{\infty} g(x)P(X = x) = \sum_{k=1}^{K+1} G\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=K+2}^{\infty} (G + \dots + 2^k G)\left(\frac{1}{2}\right)^k = 0.$$

Definition. Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $\mu = E(X)$. Dann heißt (Existenz vorausgesetzt)

$$\sigma^2(X) = V(X) = E((X - \mu)^2)$$

die *Varianz von X* .

Ist X diskret und $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$, so ist (im unendlichen Fall Konvergenz vorausgesetzt)

$$V(X) = \sum_{i \in I} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i).$$

Ist X kontinuierlich und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion von X , so ist (Existenz des Integrals vorausgesetzt)

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (z - \mu)^2 f(z) dz.$$

Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz. Seien X und Y Zufallsvariable und $a, b \in \mathbb{R}$.

- 1) Linearität: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
- 2) Für die konstante Zufallsvariable mit Wert a ist $E(a) = a$.
- 3) Ist $E(X) = \mu$, so ist $E(X - \mu) = 0$.
- 4) $V(aX + b) = a^2V(X)$.
- 5) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
- 6) Sind X und Y unabhängig, so ist $E(XY) = E(X)E(Y)$ und $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

In der Schule: Beweise ausgewählter Aussagen in charakteristischen Spezialfällen.
Beispiel: Beweis von 5) im Spezialfall $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$. Sei $\mu = E(X)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - \mu)^2) = \sum_{i \in I} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) \\ &= \underbrace{\sum_{i \in I} x_i^2 P(X = x_i)}_{=E(X^2)} - 2\mu \underbrace{\sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)}_{=\mu} + \mu^2 \underbrace{\sum_{i \in I} P(X = x_i)}_{=1} = E(X^2) - \mu^2. \end{aligned}$$

Deutung der Varianz als Schätzwert für Standardabweichung. Ein Experiment produziere die möglichen Messwerte (Ergebnisse) x_i , beschrieben durch die Zufallsvariable X . In einer Serie von N Experimenten trete das Ergebnis x_i genau n_i -mal auf, also $P(X = x_i) \approx n_i/N$. Dann sind der gewichtete Mittelwert m und die Standardabweichung s dieser Versuchsserie gegeben durch

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i x_i \approx E(X) = \mu \quad \text{und} \quad s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i (x_i - m)^2} \approx \sqrt{V(X)}.$$

In der statistischen Praxis verwendet man davon abweichend die *modifizierte Standardabweichung*

$$\tilde{s} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N n_i (x_i - m)^2}.$$

Modell zur Begründung der modifizierten Standardabweichung. Eine Serie, bestehend aus N gleichartigen und unabhängigen Experimenten liefere den Datenvektor (x_1, \dots, x_N) mit Mittelwert m , Standardabweichung s und modifizierter Standardabweichung \tilde{s} ,

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 \quad \text{und} \quad \tilde{s}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2.$$

Beschreibung durch eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler X_1, \dots, X_n mit demselben Mittelwert m und derselber Varianz σ^2 . Damit wird der Vorstellung, der i -te Messwert weiche zufällig vom Mittelwert ab, Rechnung getragen. Dann beschreibt die Zufallsvariable

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i$$

den mittleren Messwert der Versuchsserie. Es ist

$$E(\bar{X}) = m \quad \text{und} \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{N}, \quad \text{also} \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

(Deutung: Der Mittelwert hat denselben Erwartungswert, aber eine wesentlich geringere Streuung; die Formel heißt \sqrt{N} -Gesetz). Wir erwarten nun, dass die Zufallsvariable

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$$

die Streuung der Werte der Versuchsserie beschreibt. Mit Hilfe obiger Rechenregeln folgt leicht

$$E(S^2) = \frac{N-1}{N} \sigma^2,$$

und aus $E(S^2) = s^2$ folgt $\sigma = \tilde{s}$.

Explizite Werte von Erwartungswert und Varianz.

1) Sei X Null-Eins-verteilt mit Parameter p . Dann ist

$$E(X) = p \quad \text{und} \quad V(X) = p(1-p).$$

Ist X $B_{n,p}$ -verteilt, so ist $X = X_1 + \dots + X_n$ mit unabhängigen Null-Eins-verteilten Zufallsvariablen X_i mit Parameter p und daher

$$E(X) = np \quad \text{und} \quad V(X) = np(1-p).$$

2) Sei X eine standard-normalverteilte Zufallsvariable. Dann ist

$$E(X) = 0 \quad \text{und} \quad V(X) = 1.$$

Beweis:

$$\text{Aus } \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} = -x e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{folgt} \quad \sqrt{2\pi} E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

also $E(X) = 0$, und

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} V(X) &= \sqrt{2\pi} E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x (x e^{-\frac{x^2}{2}}) dx \\ &= \left[x (-e^{-\frac{x^2}{2}}) \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

2a) Sei X eine $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable. Dann ist $X = \sigma X^* + \mu$ mit einer $N(0,1)$ -verteilten Zufallsvariablen X^* , also folgt

$$E(X) = \mu \quad \text{und} \quad V(X) = \sigma^2.$$

1.6 Grenzwertsätze

Tschebyscheff'sche Ungleichung. Sei X eine Zufallsvariable, $\mu = E(X)$ und $\sigma^2 = V(X)$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Deutung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zufallsvariable vom Erwartungswert um mehr als ε abweicht, wird klein, wenn nur ε groß und σ klein wird.

Beweis im einfachsten Spezialfall: $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$. Es ist

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i \in I} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) \geq \sum_{\substack{i \in I \\ |x_i - \mu| \geq \varepsilon}} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) \\ &\geq \varepsilon^2 \sum_{\substack{i \in I \\ |x_i - \mu| \geq \varepsilon}} P(X = x_i) = \varepsilon^2 P(|X - \mu| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen. Sei $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler mit demselben Erwartungswert μ und derselben Varianz σ^2 (Unabhängigkeit einer unendlichen Folge bedeutet Unabhängigkeit jeder endlichen Teilfolge). Ist

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n),$$

so folgt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0.$$

Beweis: Nach der Tschebyscheff'schen Ungleichung ist

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = \frac{V(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Bernoulli-Experimente: Wir betrachten eine potenziell unendliche Folge unabhängiger Experimente, bei denen wir jedes Mal ein Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit $p = P(A)$ beobachten (ein solches beliebig oft wiederholbares Experiment mit einem zu beobachtenden Ausfall fester Wahrscheinlichkeit nennt man *Bernoulli-Experiment*. Standardbeispiel: Würfeln). Beschreibung durch eine Folge unabhängiger Null-Eins-verteilter Zufallsvariabler $(X_i)_{i \geq 1}$ mit Parameter p (es ist $X_i = 1$, falls der Ausfall A im i -ten Versuch beobachtet wird, und $X_i = 0$ sonst). Dann beschreibt die Zufallsvariable

$$r_n(A) = \bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

die relative Häufigkeit des Eintretens von A in einer Versuchsserie der Länge n . Das schwache Gesetz der großen Zahlen (mit $\mu = p$) besagt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|r_n(A) - p| < \varepsilon) = 1.$$

Deutung: Die relativen Häufigkeiten konvergieren "mit Wahrscheinlichkeit 1" (also "fast sicher") gegen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses. Da $nr_n(A)$ eine $B_{n,p}$ -verteilte Zufallsvariable ist, hat man die explizite Formel

$$P(|r_n(A) - p| < \varepsilon) = P(n(p - \varepsilon) < nr_n(A) < n(p + \varepsilon)) = \sum_{n(p - \varepsilon) < k < n(p + \varepsilon)} B_{n,p}(k).$$

Beispiel: Sei $W(n, \varepsilon)$ die Wahrscheinlichkeit in einer Serie von $6n$ Würfeln mit einem homogenen Würfel zwischen $n(1 - \varepsilon)$ und $n(1 + \varepsilon)$ Sechsen zu würfeln. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(n, \varepsilon) = 1.$$

Zentraler Grenzwertsatz. Sei $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler mit derselben Verteilungsfunktion, Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann gilt für $-\infty \leq a < b \leq \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2} dz = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Definition. Sei X eine Zufallsvariable mit $E(X) = \mu$ und $V(X) = \sigma^2$. Dann heißt die Zufallsvariable

$$X^* = \frac{1}{\sigma}(X - \mu)$$

die zu X gehörige *standardisierte* Zufallsvariable oder die *Standardisierung* von X . Es ist $E(X^*) = 0$, $V(X^*) = 1$ und $X = \sigma X^* + \mu$.

Ist X eine $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable, so ist ihre Standardisierung X^* standard-normalverteilt.

Im zentralen Grenzwertsatz ist

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = (X_1 + \dots + X_n)^*.$$

Wichtigster Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes: X_1, \dots, X_n sind Null-Eins-verteilte unabhängige Zufallsvariable mit Parameter p . Dann ist $X = X_1 + \dots + X_n$ eine $B_{n,p}$ -verteilte Zufallsvariable, und ihre Standardisierung ist

$$X^* = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

In diesem Falle gilt schärfer:

Grenzwertsatz von Berry-Esséen. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt: Ist X eine $B_{n,p}$ -verteilte Zufallsvariable und X^* ihre Standardisierung, so folgt

$$\left| P(a^* \leq X^* \leq b^*) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a^*}^{b^*} e^{-z^2/2} dz \right| < \frac{0,8}{\sqrt{np(1-p)}},$$

also

$$\left| P(a \leq X \leq b) - \left[\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \right] \right| < \frac{0,8}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Die Gleichwertigkeit der beiden Formeln folgt wegen

$$P(a \leq X \leq b) = P(a^* \leq X^* \leq b^*) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a^*}^{b^*} e^{-z^2/2} dz = \Phi(b^*) - \Phi(a^*)$$

mit

$$a^* = \frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \text{und} \quad b^* = \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Ist X eine $B_{n,p}$ -verteilte Zufallsvariable und sind $a, b \in \mathbb{N}$, so ist für jedes $\theta \in (0, 1)$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a - \theta \leq X \leq b + \theta) \approx \left[\Phi\left(\frac{b-np+\theta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np-\theta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \right],$$

und es hat sich bewährt, $\theta = 0,5$ für eine optimale Näherung zu wählen (*Stetigkeitskorrektur*). Die folgende "Regel" zur Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung hat sich bewährt (obwohl ihr in dieser Allgemeinheit kein scharfer Konvergenzsatz zugrundeliegt).

Approximationsregel für die Binomialverteilung. Sei X eine $B_{n,p}$ -verteilte Zufallsvariable mit $np(1-p) \geq 9$. Dann ist für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \leq b$

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-np+0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np-0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

$$P(X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-np+0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \quad P(X \geq a) \approx 1 - \Phi\left(\frac{a-np-0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Insbesondere gilt für $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$ die folgende Näherungsformel für die Abweichung vom Mittelwert ($a = np - \eta$, $b = np + \eta$):

$$P(|X - np| \leq \eta) \approx \Phi\left(\frac{\eta+0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{-\eta-0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\eta+0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1.$$

Satz von Moivre und Laplace. Sei $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$, $k \in \mathbb{N}$ und

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Dann gilt für jedes $A \in \mathbb{R}_{>0}$

$$B_{n,p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad \text{falls } |x| \leq A.$$

Beweisidee für den Satz von Moivre und Laplace. Approximiere die Binomialkoeffizienten durch die Stirling'sche Formel und erhalte

$$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{np}{k}\right)^{k+0,5} \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k+0,5}.$$

Unter Verwendung der *Mercator-Formel*

$$\log(1+z) \approx z - \frac{z^2}{2}$$

und nach Vernachlässigung aller Glieder mit mindestens \sqrt{n} im Nenner erhält man

$$\begin{aligned} & \log \left[\left(\frac{np}{k}\right)^{k+0,5} \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k+0,5} \right] \\ &= -(k+0,5) \log \left(1 + x \sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (n-k+0,5) \log \left(1 - x \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \approx -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung nach Anwendung von \exp .

Rechtfertigung der Approximationsregel mit dem Satz von Moivre-Laplace. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $a < b$. Betrachte die durch das Histogramm der Binomialverteilung definierte Treppenfunktion

$$B_{n,p}^*: \left[a - \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R},$$

definiert durch

$$B_{n,p}^*(t) = B_{n,p}(k), \quad \text{falls } k - \frac{1}{2} < t \leq k + \frac{1}{2}.$$

Nach Moivre-Laplace ist dann

$$B_{n,p}^*(t) \approx \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t - np}{\sqrt{npq}} \right)^2 \right\} \quad \text{für } t \in \left[a - \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2} \right],$$

also gilt für eine $B_{n,p}$ -verteilte Zufallsvariable X

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= \sum_{k=a}^b B_{n,p}(k) = \int_{a-0,5}^{b+0,5} B_{n,p}^*(t) dt \\ &\approx \int_{a-0,5}^{b+0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t - np}{\sqrt{npq}} \right)^2 \right\} dt = \int_{\frac{a-0,5-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{b+0,5-np}{\sqrt{npq}}} e^{-z^2/2} dz \\ &= \Phi \left(\frac{b+0,5-np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi \left(\frac{a-0,5-np}{\sqrt{npq}} \right). \end{aligned}$$

1.7 Testen von Wahrscheinlichkeitshypothesen

Getestet werden soll eine Wahrscheinlichkeitshypothese der Form

$$\mathbf{H}_0: P(E) = p_0$$

(*Nullhypothese*: Das Ereignis E tritt mit der Wahrscheinlichkeit p_0 ein).

Testverfahren: Versuchsserie der Länge n , bei der k -mal das Ereignis E eintritt.

Testvorschrift: Es wird zuerst ein Intervall $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, genannt *kritischer Bereich* oder *Annahmehereich* des Tests, festgelegt. Ist dann $k \notin I$, so wird die Hypothese \mathbf{H}_0 verworfen; ist $k \in I$, so wird die Hypothese ("mangels gegenteiliger Beweise") angenommen. Die Menge $\mathbb{N}_0 \setminus I$ heißt *Ablehnungsbereich* des Tests. Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit

$$\alpha = P(\mathbf{H}_0 \text{ wird verworfen} \mid \mathbf{H}_0 \text{ ist wahr})$$

heißt *Irrtumswahrscheinlichkeit* oder *Signifikanz* des Tests. Es ist

$$1 - \alpha = P(\mathbf{H}_0 \text{ wird angenommen} \mid \mathbf{H}_0 \text{ ist wahr}).$$

Ein Test mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ heißt *signifikant*, einer mit $\alpha = 0,003$ *hochsignifikant* (die Terminologie ist nicht einheitlich).

Man beachte: Wird \mathbf{H}_0 mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α angenommen, so bedeutet das nicht, dass \mathbf{H}_0 mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ wahr ist. Über die Wahrheit von \mathbf{H}_0 wird überhaupt keine Aussage gemacht gemacht. Die Signifikanz misst die Güte des Testverfahrens und nicht den Wahrheitsgehalt der Hypothese!

Die Nullhypothese \mathbf{H}_0 besagt, dass die Anzahl k eine B_{n,p_0} -verteilte Zufallsvariable ist, und der Test soll herausfinden, ob sie sich wirklich so verhält. Sei dazu X eine B_{n,p_0} -verteilte Zufallsvariable. Dann ist

$$\alpha = P(X \notin I).$$

Typen des Annahmehereichs:

$$I = \begin{cases} [0, np_0 + c], & \text{(linksseitiger Test)} \\ [np_0 - c, \infty), & \text{(rechtsseitiger Test)} \\ [np_0 - c, np_0 + c], & \text{(zweiseitiger Test)}. \end{cases}$$

Ein Annahmehereich ist durch Festlegen seines Typs und seiner Größe eindeutig bestimmt. Nach Festlegen des Annahmehereichs kann man die Signifikanz α berechnen. Umgekehrt kann man nach Festlegen der Signifikanz und des Typs für den Annahmehereich seine Größe (also den Parameter c) bestimmen wie folgt:

$c \in \mathbb{N}$ ist die kleinste natürliche Zahl derart, dass $P(X \notin I) \leq \alpha$. Beachte: Je kleiner c , desto größer $P(X \notin I)$.

Wird die Hypothese $\mathbf{H}_0: P(E) = p_0$ auf Grund eines linksseitigen Tests verworfen, so deshalb, weil das Ereignis E zu häufig eingetreten ist. Dann ist erst recht jede (schwächere) Hypothese $\mathbf{H}_0^-: P(E) \leq p_0$ zu verwerfen. Ein linksseitiger Test der Hypothese $\mathbf{H}_0: P(E) = p_0$ ist daher eigentlich ein Test der Hypothese $\mathbf{H}_0^-: P(E) \leq p_0$. In gleicher Weise ist ein rechtsseitiger Test der Hypothese $\mathbf{H}_0: P(E) = p_0$ eigentlich ein Test der Hypothese $\mathbf{H}_0^+: P(E) \geq p_0$.

Beispiel 1. Ein Test der Wirkung von Duftstoffen auf Ratten. Zwei Hypothesen:

A: Der Duftstoff A hält Ratten fern. Er wirkt auf 80% der Tiere abstoßend.

B: Ratten reagieren nicht auf den Duftstoff B.

Beide Hypothesen sollen signifikant (also mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$) getestet werden.

Testverfahren: Man schickt 50 Ratten in einen sich Y-förmig verzweigenden Gang, in dessen einem Ast sich der Duftstoff befindet und zählt die Anzahl k der Ratten, die dem Duftstoff folgen.

Nullhypothese und Typ des Annahmebereichs:

Für Hypothese **A.** $p_0 = 0,2$, linksseitig, $I = [0, 10 + c]$.

Für Hypothese **B.** $p_0 = 0,5$, zweiseitig, $I = [25 - c, 25 + c]$.

A. Sei X eine $B_{50;0,2}$ -verteilte Zufallsvariable. Dann ist $c \in \mathbb{N}$ minimal so zu bestimmen dass $P(X \notin I) = P(X \geq 11 + c) \leq 0,05$, also $P(X \leq 10 + c) \geq 0,95$. Tabellenwerte: $P(X \leq 14) = 0,939$, $P(X \leq 15) = 0,969$. Damit ist $c = 5$ und der Ablehnungsbereich gegeben durch $[16, 50]$.

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung: $np(1-p) = 8$, also schon kritisch. Trotzdem: Mittels Tabelle erhält man

$$P(X \leq 10 + c) \approx \Phi\left(\frac{c + 0,5}{\sqrt{8}}\right) \geq 0,95 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \frac{c + 0,5}{\sqrt{8}} \geq 1,65,$$

also $c \geq 4,25$ und damit wieder $c = 5$.

B. Sei X eine $B_{50;0,5}$ -verteilte Zufallsvariable. Dann ist $c \in \mathbb{N}$ minimal so zu bestimmen, dass $P(X \notin I) = P(X \leq 24 - c) + P(X \geq 26 + c) \leq 0,05$. Dazu bestimme man $c \in \mathbb{N}$ minimal so, dass $P(X \leq 24 - c) \leq 0,025$ und $P(X \geq 26 + c) \leq 0,025$. Tabellenwerte: $P(X \geq 33) = P(X \leq 17) = 0,016$, $P(X \geq 32) = P(X \leq 18) = 0,032$. Damit ist $c = 7$ und $[18, 32]$ der Annahmebereich.

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung: $np(1-p) = 12,5$. Mittels Tabelle erhält man

$$P(|X - 25| \leq c) \approx 2\Phi\left(\frac{c + 0,5}{\sqrt{12,5}}\right) - 1 \geq 0,95 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \frac{c + 0,5}{\sqrt{12,5}} \geq 1,96,$$

also $c \geq 6,4$ und damit wieder $c = 7$.

Alternativhypothesen. Getestet werden soll (wie oben) eine Wahrscheinlichkeitshypothese $\mathbf{H}_0: p = p_0$ mit einem Annahmebereich I . Zusätzlich liege eine Alternativhypothese $\mathbf{H}_1: p = p_1$ vor, welche angenommen wird, wenn \mathbf{H}_0 abgelehnt

wird. Bei einem solchen Test können prinzipiell die beiden folgenden Fehler vorkommen:

Fehler 1. Art (α -Fehler): \mathbf{H}_0 wird verworfen, obwohl \mathbf{H}_0 wahr ist. Die zugehörige bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\alpha = P(\mathbf{H}_0 \text{ wird verworfen} \mid \mathbf{H}_0 \text{ ist wahr})$$

heißt *Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art*. Ist X_0 eine B_{n,p_0} -verteilte Zufallsvariable, so ist $\alpha = P(X_0 \notin I)$.

Fehler 2. Art (β -Fehler): \mathbf{H}_1 wird verworfen, obwohl \mathbf{H}_1 wahr ist. Die zugehörige bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\beta = P(\mathbf{H}_1 \text{ wird verworfen} \mid \mathbf{H}_1 \text{ ist wahr})$$

heißt *Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art*. Ist X_1 eine B_{n,p_1} -verteilte Zufallsvariable, so ist $\beta = P(X_1 \in I)$.

Beispiel 2. Von einer Methode zur pränatalen Geschlechtsbestimmung wird behauptet, sie liefere 80%-ige Sicherheit. Andere wieder sagen, die Methode sei wertlos. Es wird folgender Test vereinbart: Die Methode ist in 20 Fällen anzuwenden. Führt sie mindestens 14 Mal zum Erfolg, will man die Behauptung akzeptieren, die Methode liefere 80%-ige Sicherheit. Andernfalls wird man die Methode für wertlos erklären.

Nullhypothese $\mathbf{H}_0: p_0 = 0,8$. Alternativhypothese $\mathbf{H}_1: p = 0,5$. Annahmehereich $I = [14, 20]$.

Sei X_0 eine $B_{20;0,8}$ -verteilte und X_1 eine $B_{20;0,5}$ -verteilte Zufallsvariable.

$\alpha = P(X_0 \notin I) = P(X_0 \leq 13) = F_{20;0,8}(13) = 0,09$: Das ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Methode ungerechtfertigt für wertlos erklärt wird.

$\beta = P(X_1 \in I) = P(X_1 \geq 14) = 0,06$: Das ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Methode akzeptiert wird, obwohl sie wertlos ist.

Man kann auch mit der Normalverteilung rechnen und erhält innerhalb der Rechengenauigkeit dieselben Ergebnisse (obwohl die Voraussetzungen für die Approximationsregel nicht erfüllt sind).

Didaktische Bemerkung. Verständiges Handhaben einzelner Beispiele ist dem Automatisieren verschiedenartiger Testverfahren vorzuziehen!

1.8 Einige Beispiele zu Bernoulli-Experimenten

In einer Serie unabhängiger Experimente der Länge n werde ein Ereignis E , das stets mit der Wahrscheinlichkeit p eintritt, genau k_n -mal beobachtet (es ist dann $r_n = k_n/n$ die relative Häufigkeit von E in dieser Versuchsreihe). Dann sollte $r_n \approx p$ sein, aber hier interessieren wir uns für die Wahrscheinlichkeit von möglichen Abweichungen $r_n - p$. Dabei unterscheidet man zwei Typen von Aufgaben:

- 1) p ist bekannt, und man will Aussagen über r_n machen (*Schluss von einer Gesamtheit auf eine Stichprobe*).
- 2) r_n ist bekannt, und man will Aussagen über p machen (*Schluss von einer Stichprobe auf die Gesamtheit*).

In allen Fällen handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment, die Anzahl k_n ist eine $B_{n,p}$ -verteilte Zufallsvariable. Weiß oder vermutet man (mit gutem Grund), dass $np(1-p) \geq 9$ ist, so kann man die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximieren. Es ist stets eine der folgenden Formeln anzuwenden:

Für $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a < b$ ist

$$P(a \leq k_n \leq b) = P\left(\frac{a}{n} \leq r_n \leq \frac{b}{n}\right) = F_{n,p}(b) - F_{n,p}(a-1) \\ \approx, \Phi\left(\frac{b - np + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np - 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

$$P(X \leq b) = P\left(r_n \leq \frac{b}{n}\right) = F_{n,p}(b) \approx \Phi\left(\frac{b - np + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

$$P(X \geq a) = P\left(r_n \geq \frac{a}{n}\right) = 1 - F_{n,p}(a-1) \approx 1 - \Phi\left(\frac{a - np - 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Insbesondere gilt für die Abweichung vom Mittelwert $E(k_n) = np$ bei Approximation durch die Normalverteilung für jedes $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$

$$P(|r_n - p| \leq \eta) = P(|k_n - np| \leq n\eta) \approx 2\Phi\left(\frac{n\eta + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1.$$

Beispiel 1. Eine Münze wird 1000 Mal geworfen, und es erscheint 550 Mal "Kopf". Ist das normal? In welchem Intervall $[500 - \eta, 500 + \eta]$ liegt die Anzahl der "Kopf"-Würfe mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%?

Es ist $n = 1000$, $p = 0,5$, $np = 500$ und $np(1-p) = 250$.

Zur ersten Frage: Gemeint ist hier natürlich, ob es normal ist, dass *so oft* "Kopf" erscheint. Daner berechnen wir

$$P(k_n \geq 550) \approx 1 - \Phi\left(\frac{550 - 500 - 0,5}{\sqrt{250}}\right) = 0,001.$$

Das Ergebnis ist höchst unwahrscheinlich!

In der zweiten Frage ist das kleinste $c \in \mathbb{N}$ gesucht, so dass

$$0,95 \leq P(|k_n - 500| \leq c) \approx 2\Phi(z) - 1 \quad \text{mit} \quad z = \frac{\eta + 0,5}{\sqrt{250}}.$$

Die Tabelle ergibt $z \geq 1,96$, also $c \geq 30,5$ und damit $c = 31$. Es ist also mit 95%-iger Sicherheit zu erwarten, dass die Anzahl der "Kopf"-Würfe zwischen 469 und 531 liegt.

Beispiel 2. Wie oft muss man (mindestens) würfeln, damit die relative Häufigkeit des Wurfes von "6" mit (mindestens) 95%-iger Wahrscheinlichkeit um nicht mehr als 0,02 von $1/6$ abweicht?

Bezeichnet r_n die relative Häufigkeit von "6" in n Würfeln. Dann ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$ gesucht, so dass

$$0,95 \leq P\left(\left|r_n - \frac{1}{6}\right| \leq 0,02\right) \approx 2\Phi\left(\frac{n \cdot 0,02 + 0,5}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) - 1.$$

Die Tabelle liefert

$$(n \cdot 0,02 + 0,5) \frac{6}{\sqrt{5n}} \geq 1,96.$$

Daher genügt $x = \sqrt{n}$ der quadratischen Ungleichung

$$0,02x^2 + 0,5 \geq 1,96 \cdot \frac{\sqrt{5}}{6}x = 0,73x,$$

und es folgt $n \geq 1282$. Man muss sich darüber im klaren sein, worauf man sich einlässt, wenn man in der Klasse würfeln lässt!.

Beispiel 3. Bei einer Produktion von Säcken hat man erfahrungsgemäß 15% Ausschuss. Wieviele Säcke muss man produzieren, um mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens 5000 fehlerfreie Säcke herzustellen?

Es ist $p = 0,85$ (Wahrscheinlichkeit der Herstellung eines gutes Sackes). Wir bezeichnen mit k_n die Anzahl der guten Säcke bei einer Produktion von n Säcken. Gesucht ist das kleinste n mit $P(k_n \geq 5000) \geq 0,95$. Es ist

$$P(k_n \geq 5000) \approx 1 - \Phi\left(\frac{5000 - 0,85n - 0,5}{\sqrt{n \cdot 0,85 \cdot 0,15}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{14001,4}{\sqrt{n}} - 2,38\sqrt{n}\right),$$

und wie in Beispiel 2 erhält man nach dem Lösen einer quadratischen Ungleichung $n \geq 5937$.

Beispiel 4. In X-Stadt (100.000 Einwohner) finden Wahlen statt, bei denen die A-Partei kandidiert und mittels einer Umfrage ihre Chancen zu erkunden sucht. Von 1000 Personen geben 311 an, A wählen zu wollen. Mit wie vielen Stimmen kann die A-Partei mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit rechnen?

Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit. Erhoben wurde die relative Häufigkeit $r_n = 0,311$ für $n = 1000$, und gesucht ist die Wahrscheinlichkeit p , mit der bei den Wahlen wirklich für die A-Partei gestimmt wird. Wegen $1000 \ll 100.000$ kann man die hypergeometische Verteilung durch die Binomialverteilung ersetzen, und da sicher $np(1-p) \geq 9$, kann man durch die Normalverteilung approximieren.

Es ist das größte $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$ derart zu bestimmen mit

$$P(|0,311 - p| \leq \eta) \geq 0,95.$$

Es ist

$$0,95 \leq P(|0,311 - p| \leq \eta) \approx 2\Phi(z) - 1 \quad \text{mit} \quad z = \frac{1000\varepsilon + 0,5}{\sqrt{1000p(1-p)}}.$$

Die Tabelle liefert $z = 1,96$, also

$$\eta \leq z\sqrt{\frac{p(1-p)}{1000}} - 0,0005$$

und damit (unter Vernachlässigung des Summanden $0,0005$)

$$(0,311 - p)^2 \leq \eta^2 \leq \frac{z^2}{1000} (p - p^2).$$

Wir erhalten die quadratische Ungleichung

$$p^2 \left(1 + \frac{z^2}{1000}\right) - p \left(2 \cdot 0,311 + \frac{z^2}{1000}\right) + 0,311^2 \leq 0$$

mit den Lösungen $p_+ = 0,341$ und $p_- = 0,282$. Die A-Partei kann also mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit mit einem Stimmenanteil zwischen 28,2% und 34,1% rechnen.

Man kann die quadratische Ungleichung vermeiden, wenn man (mit geringem Fehler) p durch den Näherungswert $\hat{p} = 0,311$ ersetzt. Dann liefert

$$\eta = z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1000}} - 0,0005 = 0,029$$

innerhalb der Rechengenauigkeit dasselbe Resultat.

Beispiel 4 (Fortsetzung). Wie viele Personen müssen befragt werden, um das Wahlergebnis mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit bis auf einen Fehler von einem Prozentpunkt vorauszusagen

a) wenn man keinerlei Vorinformationen besitzt?

b) wenn man aus der ersten Umfrage bereits weiß, dass man mit etwa 31% der Stimmen rechnen kann?

Gesucht ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit

$$0,95 \leq P(|r_n - p| \leq 0,01) \approx 2\Phi\left(\frac{0,01n + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1.$$

Nachschlagen in der Tabelle ergibt

$$\frac{0,01n + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}} \geq 1,96,$$

und daraus folgt die quadratische Ungleichung

$$0,01n + 0,5 \geq 1,96\sqrt{n}\sqrt{p-p^2}.$$

Ohne Vorinformation über p benutzt man die Trivialabschätzung $p - p^2 \leq 0,25$ und erhält aus der quadratischen Ungleichung $n \geq 9704$. Mit der Vorinformation $p \approx 0,31$ erhält man eine stärkere Ungleichung und daraus $n \geq 7644$.

Kapitel 2. BÜRGERLICHES RECHNEN UND FINANZMATHEMATIK

2.1 Allgemeines zum "Bürgerlichen Rechnen"

Die im folgenden dargelegten Grundprinzipien werden anschließend an ausgewählten Beispielen zu diskutieren sein.

Usancen und deren Mathematisierung. Die Hauptaufgabe des Mathematikunterrichtes im "Bürgerlichen Rechnen" besteht in der Analyse und Mathematisierung der Sachsituationen ("Phänomene"). Die Analyse besteht in einer präzisen Beschreibung der (kommerziellen oder technischen) Usancen, die dem Problem zu Grunde liegen. Häufig ist eine Präzisierung der Fragestellung erforderlich. Diese ist wesentlicher Teil des Mathematisierungsprozesses und darf nicht vernachlässigt werden.

Die Mathematisierung besteht in der Darstellung der Zusammenhänge innerhalb einer mathematischen Struktur (beim einfachen bürgerlichen Rechnen genügt meist der Körper \mathbb{Q}), dem sogenannten "Denkobjekt", das im Rahmen eines Kalküls durch "Zeichen" beschrieben wird (z. B. rationale Zahlen durch Brüche oder Dezimalzahlen). Mathematisierung sollte jedoch nicht mit Formalisieren verwechselt werden. Bei praktischen Beispielen ist häufig eine Argumentation am Problem einer Formalisierung in einen abstrakten Kalkül vorzuziehen, die Darstellung ist den Anwenderusancen anzupassen (kaufmännische Kalkulation und Rechnungslegung)

Den Zusammenhang zwischen Phänomen, Denkobjekt und Zeichen nennt man auch das *epistemologische Dreieck der Mathematik*. Es ist uns auch in der Stochastik bereits begegnet (Phänomene: empirisches Gesetz der großen Zahlen; Denkobjekte: Wahrscheinlichkeitsräume, Zufallsvariable; Zeichen: Wahrscheinlichkeitsbäume, Zufallsvariable, mathematischer Formalismus der Integralrechnung).

Rechentechnik und Rechengenauigkeit. Bei lebensnahen Aufgaben ist der Einsatz des Taschenrechners sinnvoll (und zwar von Anfang an). Rechenfertigkeiten und Zahlenverständnis sind unabhängig davon zu trainieren ("tägliches Kopfrechnen", Überschlagsrechnungen). Greifen die Schüler bei " 2×10 " zum Taschenrechner, so ist im Unterricht etwas schiefgelaufen, das sich nicht durch das Verbot des Taschenrechnergebrauchs korrigieren lässt!

Die erforderliche Rechengenauigkeit bei Sachaufgaben ist durch das Problem und die Genauigkeit der Eingabedaten vorgegeben. Ihre Festlegung ist Teil der Mathematisierung. Eine Überschlagsrechnung sollte stets der Aufgabenlösung vorangehen, ebenso eine "Variation der Daten" (Vorbereitung des Studiums funktionaler Zusammenhänge).

Genauigkeits-Konvention: In einer numerischen Angabe sollte die letzte wertanzeigende Stelle bis auf eine Einheit genau sei. Beispiele: $a = 6,783$ bedeutet $a \in [6,782; 6,784]$; $a = 1,3 \cdot 10^5$ bedeutet $a \in [1,2 \cdot 10^5; 1,4 \cdot 10^5]$; $a = 100000$

bedeutet $a \in [99000, 101000]$ (sollte hier größere Genauigkeit gemeint sein, ist dies explizit zu sagen).

Die Verwendung des Taschenrechners ist keine Entschuldigung für fehlendes Zahlenverständnis. Dazu ein Negativbeispiel aus einem taschenrechnerfreien Unterricht: Eine Fensterscheibe ist 79,7 cm breit, 128,3 cm hoch und 2,5 mm dick. Die Dichte des Glases beträgt $2,55 \text{ kg/dm}^3$. Wie schwer ist die Scheibe? Der Schüler multipliziert brav $79,7 \cdot 128,3 \cdot 2,5 \cdot 2,55$ und schreibt als Antwort: "Die Scheibe wiegt 65187,62625 kg."

In diesem Beispiel kulminieren mehrere Fehler: 1) Keine vernünftige Reflexion der Sachsituation; 2) Vermischen von Einheiten; 3) Unreflektierte Widrigkeit vieler Dezimalstellen.

Umgang mit Einheiten. Alle Daten aus angewandten Problemen sind dimensioniert (also von der Form "Zahl - Einheit"). Der mathematische Kalkül ist dimensionslos. Bei der Übersetzung des Problems in das mathematische Modell sollen die Einheiten weggelassen werden; dann erfolgt die Lösung der Aufgabe im Modell, das Ergebnis wird geeignet gerundet, mit Einheiten versehen und liefert in dieser Form die Antwort auf das gestellte Problem. Natürlich ist dabei darauf zu achten, dass die verwendeten Maßsysteme kommensurabel sind.

Beispiele für kommensurable Maßsysteme:

kg, S/kg, S (Menge, Preis, Betrag); analog: Stk., S/Stk., S; m, S/m, S.

cm, cm^2 , cm^3 (Länge, Fläche, Volumen); analog: m, m^2 , m^3

(aber nicht: LE, FE, VE; diese "Dimensionen" haben keine reale Bedeutung, im mathematischen Modell aber besteht keine Veranlassung, die Inhaltsbegriffe zu dimensionieren).

m^3 , kg/m^3 , kg (Volumen, Dichte, Masse); analog: cm^3 , g/cm^3 , g.

kg, m, sec, m/sec, m/sec^2 , $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/sec}^2$, $\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{sec}^2$, $\text{W} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{sec}^3$ (Masse, Länge, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Arbeit, Leistung).

Didaktische Bemerkungen: Für den Schüler ist das "Mitschleppen" der Einheiten in der Rechnung anfangs oft eine Hilfe und sollte nicht verboten sein. Der Lehrer aber sollte von Anfang an dimensionslos mathematisieren, spätestens in der Oberstufe sollte auch der Schüler dazu in der Lage sein (analytische Geometrie und Infinitesimalrechnung sind auf jeden Fall dimensionslos anzuwenden).

Eingekleidete Aufgaben und "echte" angewandte Aufgaben. "Eingekleidete" Aufgaben sind eigentlich Aufgaben der reinen Mathematik, die des Unterhaltungswertes oder der intellektuellen Freude wegen als Textaufgaben gestellt werden. Im Gegensatz dazu sind echte angewandte Aufgaben von praktischem Interesse. Charakteristischerweise sind deren Daten fehlerbehaftet, die Angabe erfolgt mittels Genauigkeitskonvention, und es ist die Genauigkeit des Ergebnisses zu diskutieren (Fehlerfortpflanzung!).

Aufgaben vom Typ "Wir rechnen auf zwei Dezimalen" sind niemals echte angewandte Aufgaben, auch wenn die Angabe diesen Anschein zu erwecken sucht ("Ein

Grundstück hat die Form ... und die Maße ..."). Bei diesen eingekleideten Aufgaben ist es auch völlig gleichgültig, ob die angegebenen Maße real sind oder nicht, es könnten auch "SKM" (Steirische Knödelmeter) sein.

Leistungskontrolle. Diese hat so zu erfolgen, dass klar wird, ob der Schüler die Sachsituation nicht verstanden hat oder wegen mangelnder Rechenfertigkeiten am Problem scheitert ("lernzielorientierte Leistungskontrolle").

2.2 Prozentrechnung

Phänomene: Anteile am Ganzen; relative Häufigkeiten (Vorbereitung der Wahrscheinlichkeitsrechnung); Skonto und Rabatt; Mehrwertsteuer; Kalkulation; Steigung und Gefälle. Darstellung und Interpretation von Daten.

Verwandte Begriffe: Promille; Prozentpunkte.

Darstellung. *Graphische Darstellungen:* Prozentkreis, Prozentstreifen.

Symbolische Darstellungen: 12% (Prozentdarstellung), 12 v. H. (Darstellung als Hundertstelanteil), 0,12 (Dezimaldarstellung), $\frac{12}{100}$ (Darstellung als Hundertstelbruch), $\frac{3}{25}$ (Darstellung als gekürzter Bruch).

Berechnungsmöglichkeiten: Sei G der Grundwert (= 100%). Dann ist
 12% von $G = 12 \cdot (1\% \text{ von } G) = \frac{G}{100} \cdot 12 = 0,12G = \frac{12G}{100}$ von $G = \frac{12G}{100} = \frac{3G}{25}$.

Ziel des Unterrichts. Erkennen der Gleichwertigkeit der verschiedenen Darstellungsweisen. Rechnerische Beherrschung einschließlich der Verwendung eines Taschenrechners mit und ohne Prozenttaste.

Darstellung als Schlussrechnung mit direkter Proportionalität (unter eventueller Verwendung der Rechenregel "Kreuzweises Multiplizieren"). Die Schlussrechnung mit direkter Proportionalität ist die Vorstufe zur Theorie der linearen Funktionen.

Mathematischer Hintergrund: Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$) sind äquivalent:

- a) Es gibt eine $k \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = kx$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- b) Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_2 \neq 0$ und $f(x_2) \neq 0$ ist

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_1}{x_2}.$$

- c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = f(1)x$.

Mathematisierung der Prozentrechnung. G : Grundwert; p : Prozentsatz (z. B. $p = 60\%$ oder $p = 0,6 = 3/5$); A : Prozentanteil. Man nennt die Angabe $p = 0,6$ auch "dezimalen Prozentsatz" und bezeichnet diesen häufig mit \hat{p} anstatt mit p . Aber die Bezeichnung ist nicht einheitlich!

Formel:

$$A = G \cdot p \quad \text{oder} \quad A = \frac{G \cdot p}{100}$$

(je nach Konvention).

Meine Empfehlung: Die bürgerliche Ausdrucksweise $p = 60\%$ ist durch $p = 0,6$ zu mathematisieren (demnach wird % wie eine "Dimensionsgröße" behandelt, die im mathematischen Modell weggelassen wird). Diese Konvention setzt sich in der Finanzmathematik fort.

Bei einfachen Aufgaben ist die Behandlung als Schlussrechnung vorzuziehen. Sie erlaubt eine einheitliche Behandlung aller einfachen Aufgabentypen. Die Mathematisierung wird erst sinnvoll, wenn Verfahren programmiert oder grundsätzliche Fragen diskutiert werden sollen.

Beispiel. Eine Maschine kostet Euro 1.000,- zuzüglich Mehrwertsteuer. Es wird ein Treuerabatt von 5% vereinbart. Ist zuerst die Mehrwertsteuer hinzuzurechnen und dann der Rabatt abzuziehen oder umgekehrt? Diskussion am Beispiel, dann allgemein mittels Formeln. Finanzrechtliche Konsequenzen.

2.3 Zins- und Zinseszinsrechnung

Nach kaufmännischen Grundsätzen bestimmt sich der Wert eines Kapitals aus Betrag und Fälligkeit. Die Berechnung des Wertunterschiedes zwischen verschiedenen Daten ist Aufgabe der Zinsenrechnung, welche die verschiedenen kaufmännischen Konventionen algorithmisch zu präzisieren hat.

Einfache Verzinsung. Angabe des Jahreszinssatzes als dezimalen Prozentsatz (d. h., ein Zinssatz von 3,5 % p. a. wird als $p = 0,035$ angegeben (andere Schreibweisen in Schulbüchern: $p = 3,5\%$, $\hat{p} = 0,035$ oder $i = 0,035$. K_0 : Grundkapital; Z : Zinsen; K : Endkapital (nach einer angegebenen Verzinsungsdauer). Formeln:

$$K = K_0 + Z.$$

$$\text{Zinsen für } n \text{ Jahre: } Z = K_0 p n.$$

$$\text{Zinsen für } m \text{ Monate: } Z = K_0 p \frac{m}{12}.$$

$$\text{Zinsen für } t \text{ Tage: } Z = K_0 p \frac{t}{360}.$$

In diesen Formeln ist die Bankenkonvention "1 Monat = 30 Tage, 1 Jahr = 360 Tage" zu Grunde gelegt. Natürlich können andere Bankkonventionen in analoger Weise mathematisiert werden.

Bei der Verzinsung von Spareinlagen ist die Kapitalertragsteuer (derzeit 25 % der Zinsen zu berücksichtigen). Effektiver Zinssatz $p_{\text{eff}} = (1 - \kappa)p$ (dabei ist κ der Kapitalertragssteuersatz, z. Zt. $\kappa = 0,25$). Auch hier sind die Bezeichnungskonventionen nicht einheitlich, es ist daher eine langschrittliche Fixierung der Konventionen und Bezeichnungen vor der Besprechung von Aufgaben zu empfehlen.

Zinseszinsen und gemischte Verzinsung. Bei langfristigen Anlagen werden die Zinsen am Ende eines jeden Jahres zum Kapital hinzugezählt (kapitalisiert) und in der Folge selbst verzinst.

Mathematisierung einer mehrjährigen Verzinsung: K_n sei das Kapital nach n Jahren (genauer: K_0 ist das Anfangskapital, für $n \geq 1$ ist K_n das Kapital am Ende des n -ten und am Beginn des $(n+1)$ -ten Jahres), Z_n seien die am Ende des n -ten Jahres anfallenden Zinsen. Dann gilt für alle $n \geq 1$: $Z_n = K_{n-1}p$ (dabei ist p der Zinssatz). Für alle $n \geq 0$ gilt

$$K_n = K_0(1+p)^n$$

(einfacher Induktionsbeweis, formal oder informal).

Gemischte Verzinsung. Bei Anlagen, welche über mehrere Jahre gehen, werden Zinseszinsen für volle Jahre und normale Zinsen für Teile des Jahres berechnet. Aber all das sind explizite oder implizite Konventionen. Sie genau zu hinterfragen und zu mathematisieren, ist Aufgabe des Mathematikunterrichts (nicht das "Lernen" irgendwelcher Konventionen!).

Beispiel. Einlage eines (Anfangs-)Kapitals K_0 am 15. 2. 88; Abhebung am 13. 5. 93; Verzinsung 6 % p. a.. Man berechne das Endkapital!

Effektiver Zinssatz $p = 0,75 \cdot 0,06 = 0,045$.

1) 15. 2. 1988 bis 31. 12. 1988: 10 m 16 t = 316 t; Zinsen: $Z = K_0 p \cdot 316/360$; Kapital am 31. 12. 1988 = 1. 1. 1989: $K = K_0 + Z = K_0 \cdot (1 + 316p/360)$.

2) 1. 1. 1989 bis 31. 12. 1992: 4 Jahre Zinseszins. Kapital am 31. 12. 1992 = 1. 1. 1993: $K_4 = K \cdot (1+p)^4$.

3) 1. 1. 1993 bis 13. 5. 1993: 4 m 12 t = 132 t; Zinsen: $Z' = K_4 p \cdot 132/360$; Endkapital am 13. 5. 1993: $\bar{K} = K_4 + Z'$.

Einsetzen ergibt

$$\bar{K} = K_0 \left(1 + \frac{316p}{360}\right) (1+p)^4 \left(1 + \frac{132p}{360}\right) = K_0 \cdot 1,260076866.$$

Wie viele Stellen hier zu berücksichtigen sind, hängt von K_0 ab. Beispielsweise ergibt ein Anfangskapital von Euro 100.000,- ein Endkapital von Euro 126.007,69. Die Banken rechnen üblicherweise anders. Die Zinsen werden in jedem Jahr berechnet, auf 2 Dezimalen gerundet und zum Kapital geschlagen. Mit dieser Rechenweise erhält man bei einem Anfangskapital von Euro 100.000,- ein Endkapital von Euro 126.007,68.

Der Berechnungsmodus für die Tage ist nicht einheitlich. Häufig werden 2 Tage weniger gerechnet. Auch Konventionen der Art "die Verzinsung beginnt am zweiten auf die Einlage folgenden Werktag" sind üblich. Die Berechnung der Tage erfolgt dann mittels eines Programms, welches den Kalender gemeinsam mit diesen Konventionen verarbeitet. Eine gezielte Erforschung und Mathematisierung der üblichen Usancen ist ein geeignetes Thema für eine Projektarbeit.

Unterjährlige und natürliche Verzinsung. Werden bei einem Zinssatz p die Zinsen N -mal im Jahr berechnet und kapitalisiert, so erhält man aus einem Anfangskapital K_0 nach n Jahren das Endkapital

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{N}\right)^{Nn}$$

(Nn Verzinsungsperioden zum Zinssatz von p/N). Dann ist $K_n = K_0 \cdot (1 + p_N)^n$ mit

$$1 + p_N = \left(1 + \frac{p}{N}\right)^N.$$

Daher ist das Endkapital dasselbe wie bei einer jährlichen Verzinsung mit dem Zinssatz p_N . Man nennt $\frac{p}{N}$ einen N -telzinssatz und p_N den zu p äquivalenten Jahreszinssatz.

Übliche Konventionen:

Quartalszinssatz ($N = 4$): z. B. 1 % p. q. bedeutet $\frac{p}{4} = 0,01$; $p_4 = 1,01^4 - 1 = 0,04060$, also ist 4,060 % p. a. der äquivalente Jahreszinssatz.

Monatszinsatz ($N = 12$): z. B. 1/3 % p. m. bedeutet $\frac{p}{12} = 1/300$; $p_{12} = \left(\frac{301}{300}\right)^{12} - 1 = 0,4074$, also ist 4,074 % p. a. der äquivalente Jahreszinssatz.

Mathematisch ist der Fall $N \rightarrow \infty$ von Interesse. Auf Grund ihrer Herkunft ist die Folge

$$\left(\left(1 + \frac{p}{N}\right)^N\right)_{N \geq 1}$$

streng monoton wachsend (formaler Beweis?), und es gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{N}\right)^N = \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{N}\right)^{\frac{N}{p}}\right]^p = \left[\lim_{x \rightarrow 0+} (1+x)^{1/x}\right]^p = e^p.$$

Dies ist ein Weg zur Einführung der Zahl e als "Zahl des natürlichen Wachstums". Mathematisch ist die Berechnung von Zinseszinsen mit N -maliger Kapitalisierung pro Jahr dasselbe wie ein Wachstumsprozess mit N -maliger Generationenfolge pro Jahr, und dieser geht für $N \rightarrow \infty$ in das sogenannte ungehemmte natürliche Wachstum über.

Antizipative Verzinsung. Bisher haben wir die Jahreszinsen als Prozentanteil des Anfangskapitals berechnet. Man spricht in diesem Fall auch von *dekursiver Verzinsung* und nennt den Zinssatz p einen *dekursiven Zinssatz*. Man kann aber auch die Jahreszinsen als Prozentanteil des Endkapitals berechnen. Dann spricht man von *antizipativer Verzinsung* oder *kaufmännischem Diskont*, bezeichnet den Zinssatz mit d und nennt ihn *Diskontsatz* oder *antizipativen Zinssatz*.

Formeln: Sei K_0 das Anfangskapital und K_1 das Endkapital nach einem Jahr. Dann ist $K_1 = K_0 + Z$, wobei Z die Zinsen für ein Jahr bezeichnen.

Dekursive Verzinsung mit Zinssatz p : $Z = K_0 \cdot p$, $K_1 = K_0(1 + p)$.

Antizipative Verzinsung mit Diskontsatz d : $Z = K_1 \cdot d$, $K_1 = K_0(1 - d)^{-1}$.

Umrechnung: Ist $1 + p = (1 - d)^{-1}$, so erhält man bei dekursiver Verzinsung mit Zinssatz p dasselbe Resultat wie bei antizipativer Verzinsung mit Diskontsatz d .

Man nennt p den zum Diskontsatz d äquivalenten dekursiven Zinssatz und d den zum dekursiven Zinssatz p äquivalenten Diskontsatz.

Zinseszinsformel bei antizipativer Verzinsung: Anfangskapital K_0 , Diskontsatz d , Endkapital nach n Jahren K_n :

$$K_n = K_0 \cdot (1 - d)^{-n}.$$

Ist p ein (dekursiver) Zinssatz und d der dazu äquivalente Diskontsatz, so nennt man $r = 1 + p = (1 - d)^{-1}$ den zugehörigen *Aufzinsungsfaktor* und r^{-1} den zugehörigen *Abzinsungsfaktor*. Die Zinseszinsformel hat dann die einheitliche Gestalt

$$K_n = K_0 r^n.$$

Beispiel. Ein Unternehmer nimmt für zwei Jahre ein Darlehen von Euro 100.000,- auf. Welche Summe erhält er ausbezahlt, wenn bei antizipativem Zinseszins mit einem Diskontsatz von 6,5 % p. a. gerechnet wird? Wie hoch ist der äquivalente dekursive Zinssatz?

Mathematisierung: $n = 2$, $K_n = 100.000$, $d = 0,065$. Also folgt $K_0 = K_n(1 - d)^n = 87.422,5$ und $p = (1 - d)^{-1} - 1 = 0,06952$.

Er erhält Euro 87.422,50 ausbezahlt (und muss nach zwei Jahren einschließlich Zinsen Euro 100.000,- zurückzahlen). Der äquivalente dekursive Zinssatz beträgt 6,952%.

Diese Art der Verzinsung ist bei Wechsel- oder anderen Schuldscheingeschäften üblich. Der Unternehmer unterschreibt einen Wechsel über Euro 100.000,-, fällig in zwei Jahren und läßt ihn von seiner Bank auf den heutigen Tag "diskontieren".

2.4 Renten

Unter einer *Rente* versteht man eine Folge von Zahlungen gleicher Höhe in gleichen zeitlichen Abständen. Dabei sind die Zahlungen dekursiv oder antizipativ (eventuell auch unterjährig) zu verzinsen. Eine *vorschüssige* Rente wird zu Beginn der Verzinsungsperiode gezahlt, eine *nachschüssige* Rente zum Ende der Verzinsungsperiode.

Wir behandeln hier nur dekursive Verzinsung in dem Falle, dass die Verzinsungsperiode und das Rentenintervall übereinstimmen und nennen dieses Zeitintervall das "Jahr" (man beachte die Abstraktion). Alle anderen Fälle können durch Übergang zu einem äquivalenten Zinssatz auf diesen zurückgeführt werden.

Beispiel. Zu behandeln ist eine monatlich zu zahlende Rente bei einer antizipativen Verzinsung von 6 % p. a. Das Rentenintervall oder "Jahr" ist ein Monat. Gesucht ist also der zum antizipativen Zinssatz von $d = 0,06$ äquivalente dekursive Monatszinssatz p . Ist \bar{p} der zu d äquivalente Jahreszinssatz, so folgt $1 + \bar{p} = (1 + p)^{12} = (1 - d)^{-1}$, und daher $p = (1 - d)^{-1/12} - 1 = 0,00517$.

Mathematische Behandlung. n : Laufzeit der Rente; p : dekursiver Zinssatz pro Rentenintervall; $r = 1 + p$: Aufzinsungsfaktor; E_n : Endwert der Rente (Wert

aller Ratenzahlungen am Ende des n -ten Jahres); B : Barwert der Rente (Wert aller Rentenzahlungen zu Beginn der Laufzeit); R : Rentenrate; R_i : Ratenzahlung zu Beginn des i -ten Jahres = Ende des $(i-1)$ -ten Jahres ($1 \leq i \leq n+1$). In jedem Falle ist

$$E_n = Br^n,$$

der Wert der zu Beginn des i -ten Jahres geleisteten Ratenzahlung beträgt zum Ende des n -ten Jahres

$$R_i r^{n-i+1},$$

und daher folgt

$$E_n = R_1 r^n + R_2 r^{n-1} + \dots + R_n r + R_{n+1}.$$

a) Vorschüssige Renten. $R_i = R$ für $1 \leq i \leq n$, $R_{n+1} = 0$;

$$E_n = Rr^n + Rr^{n-1} + \dots + Rr = Rr \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

b) Nachschüssige Renten. $R_1 = 0$, $R_i = R$ für $2 \leq i \leq n+1$;

$$E_n = Rr^{n-1} + Rr^{n-2} + \dots + Rr + R = R \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Vergleich verschiedener Renten: Vergleich der Barwerte (oder Werte zu einem festen Zeitpunkt unter Berücksichtigung der Zinseszinsen).

Beispiel 1. Eine Bank bietet folgenden Sparvertrag an: Man zahlt durch 4 Jahre zu Beginn eines jeden Quartals je Euro 250,- ein und erhält am Ende des 4. Jahres Euro 5.000,- ausbezahlt. Wie hoch ist der effektive Zinssatz p. a.?

Vorschüssige Rente, $n = 16$, $R = 250$, $E = 5000$, p sei der Zinssatz pro Rentenintervall (= Quartal). Der dazu äquivalente Jahreszinssatz ist dann $\hat{p} = (1+p)^4 - 1$. Einsetzen in die Formel ergibt (mit $r = 1+p$)

$$5000 = 250r \frac{r^{16} - 1}{r - 1},$$

durch Probieren (Taschenrechner!) oder mittels DERIVE ("Solve") erhält man $r = 1 + p = 1,0258$ und damit den Jahreszinssatz $\hat{p} = 0,1073$, also 10,73 %.

Beispiel 2. Jemand besitzt zum 1. 1. 2001 ein Guthaben von Euro 700,-. Welchen Betrag muss er dazu, beginnend Ende 2001, 8-mal am Jahresende einzahlen, um dann ab 1. 1. 2012 durch 10 Jahre hindurch Euro 200,- zu Beginn eines jeden Monats beheben zu können? Man rechne mit einem Zinssatz von 5 % p. a..

Anfangskapital $K = 700$. 2 Renten:

1) Nachschüssig, $n = 8$, $r = 1,05$, $R = ?$.

2) Vorschüssig, $n = 120$, $r_2 = 1,05^{1/12}$, $R_2 = 200$.

Endwert der 1. Rente (Wert am 31. 12. 2008 = 1. 1. 2009):

$$E = R \cdot \frac{r^8 - 1}{r - 1}$$

Endwert der 2. Rente (Wert am 31. 12. 2021 = 1. 1. 2022):

$$E' = R_2 r_2 \frac{r_2^{120} - 1}{r_2 - 1}.$$

Wertgleichheit am 1. 1. 2009:

$$K r^8 + E = E' r^{-13}.$$

Ausrechnen ergibt: $R = 1613,23$. Es sind 8-mal Euro 1.613,23 einzuzahlen.

Beispiel 3 (Rentabilitätsrechnung). Eine 7,5%-ige Anleihe mit Nennwert von Euro 100,- wird zum Kurs von Euro 85,- gekauft und nach 5 Jahren zum Nennwert verkauft. Wie hoch ist die Rentabilität? ($r = 1 + p$).

Wert des Kapitaleinsatzes nach 5 Jahren: $85 r^5$.

Wert der Erlöse nach 5 Jahren: $100 + E$, wobei E der Endwert einer nachschüssigen Rente mit $n = 5$ und $R = 7,5$ ist.

Die Bilanz ergibt

$$7,5 \cdot \frac{r^5 - 1}{r - 1} + 100 = 85 r^5.$$

Näherungsweise Lösung (mit DERIVE oder Probieren): $r = 1,116$. Die Rentabilität des Papiers beträgt 11,6 %.

2.5 Investitionsrechnung

Aufgabe. Beurteilung der Rentabilität einer Investition. Mit einem Kapitaleinsatz K werde eine Investition mit einer Laufzeit von n Jahren getätigt. Im k -ten Jahr werde der Ertrag der Investition (Einnahmen minus Ausgaben) auf R_k geschätzt. Die Größen R_k heißen *Quasirenten* der Investition. Der kalkulatorische Zinssatz p bzw. Aufzinsungsfaktor $r = 1 + p$ ist der der Finanzierung der Investition zu Grunde liegende Zinssatz (Eigenkapitalverzinsung oder Kreditkosten). Die Summe der Barwerte der Quasirenten

$$B = \frac{R_1}{r} + \frac{R_2}{r^2} + \dots + \frac{R_n}{r^n}$$

heißt *Barwert* der Investition. Ist $B > K$, so nennt man $G = B - K$ den *Kapitalwert* oder *Goodwill* der Investition.

Hat man mehrere Investitionsprojekte zu vergleichen, so stehen zu deren Beurteilung die folgenden Methoden zur Verfügung.

Kapitalwertmethode. Der Goodwill G ist ein Maß für die Rentabilität der Investition.

Annuitätenmethode. Man betrachtet den Goodwill G als Barwert einer nachschüssigen Rente über die Laufzeit mit Aufzinsungsfaktor r . Die Rate R dieser Rente ist ein Maß für die Rentabilität der Investition. Dieses Verfahren wird beim Vergleich von Investitionen unterschiedlicher Laufzeit angewandt.

Methode des internen Zinssatzes. Bestimme den "internen" Zinssatz \hat{p} bzw. Aufzinsungsfaktor \hat{r} , für welchen der Barwert der Investition mit dem Kapitaleinsatz übereinstimmt. \hat{p} ist ein Maß für die Rentabilität der Investition. Dieses Verfahren wird beim Vergleich von Investitionen mit unterschiedlichem Kapitaleinsatz angewandt.

Beispiel. Zur Diskussion steht die Investition zweier unterschiedlicher Objekte mit einem Anschaffungswert von je 250 (z. B. Tausend Euro). Objekt 1 hat eine Lebensdauer von 5 Jahren und erbringt voraussichtlich die Quasirenten $R_1 = 50$, $R_2 = 70$, $R_3 = 75$, $R_4 = 100$ und $R_5 = 76$. Objekt 2 hat eine Lebensdauer von 3 Jahren und erbringt voraussichtlich die Quasirenten $R_1 = 90$, $R_2 = 125$ und $R_3 = 113$. Der kalkulatorische Aufzinsungsfaktor beträgt $r = 1,1$.

1) Berechnung der Barwerte und der Goodwills:

$$B_1 = \frac{50}{1,1} + \frac{70}{1,1^2} + \frac{75}{1,1^3} + \frac{100}{1,1^4} + \frac{76}{1,1^5} = 275,14.$$

$$B_2 = \frac{90}{1,1} + \frac{125}{1,1^2} + \frac{113}{1,1^3} = 270,2.$$

Es handelt sich um geschätzte Daten, daher ist genaues Rechnen nicht sinnvoll! Die Goodwills betragen

$$G_1 = 25 \quad \text{und} \quad G_2 = 20.$$

Beurteilung: Nach der Kapitalwertmethode ist Objekt 1 vorzuziehen. Wegen der unterschiedlichen Laufzeit ist dieses Urteil jedoch nur bedingt signifikant (bei Objekt 1 erfolgt eine längere Kapitalbindung).

2) Annuitätenmethode: Die Rentenrate R einer nachschüssigen Rente mit Barwert G berechnen sich aus

$$G = \frac{R}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad \text{also} \quad R = \frac{Gr^n(r - 1)}{r^n - 1}.$$

Also folgt für die Rentenraten R_1 und R_2 der beiden Objekte

$$R_1 = \frac{25 \cdot 1,1^5 \cdot 0,1}{1,1^5 - 1} = 6,59 \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{20 \cdot 1,1^3 \cdot 0,1}{1,1^3 - 1} = 8,04.$$

Beurteilung: Objekt 2 ist deutlich vorzuziehen.

3) Interne Zinssätze. Die internen Aufzinsungsfaktoren \hat{r}_1 und \hat{r}_2 der beiden Objekte berechnen sich aus den Gleichungen

$$250 = \frac{50}{\hat{r}_1} + \frac{70}{\hat{r}_1^2} + \frac{75}{\hat{r}_1^3} + \frac{100}{\hat{r}_1^4} + \frac{76}{\hat{r}_1^5},$$

$$250 = \frac{90}{\hat{r}_2} + \frac{125}{\hat{r}_2^2} + \frac{113}{\hat{r}_2^3}.$$

Durch Probieren oder mittels DERIVE findet man $\hat{r}_1 = 1,13$ und $\hat{r}_2 = 1,14$.
Beurteilung: Die beiden Objekte sind nahezu gleichwertig.

Kapitel 3. REELLE ZAHLEN, FOLGEN UND FUNKTIONEN

Wir bezeichnen (im Gegensatz zu dem in der Schule Üblichen) mit \mathbb{N} die Menge der positiven natürlichen Zahlen und setzen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.1 Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

Natürliche Zahlen. Aus der Grundschule sind die arithmetischen Eigenschaften von $\mathbb{N}_0 = (\mathbb{N}_0, +, \cdot, <)$ bekannt und weiter zu vertiefen wie folgt:

Grundkenntnisse:

$+$ und \cdot sind assoziativ und kommutativ (Rechenvorteile!), mit neutralen Elementen 0 und 1.

Distributivgesetze, Vorrang- und Klammernregeln (Rechenbäume).

Dezimaldarstellung: Jedes $n \in \mathbb{N}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$n = 10^d a_d + 10^{d-1} a_{d-1} + \dots + 10a_1 + a_0 = a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0$$

mit $d \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_d \in \{0, \dots, 9\}$ und $a_d \geq 1$. Kenntnis (und Rechtfertigung) der auf dieser Darstellung basierenden Algorithmen zur schriftlichen Addition und Multiplikation).

Umgang mit den Symbolen $<$, \leq , $>$ und \geq (Logik!)

$a \leq b$ genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $b = a + c$. Dieses c ist eindeutig bestimmt und heißt Differenz von a und b , $c = b - a$. Kenntnis des Subtraktionsalgorithmus und der Rechenregel $a - b - c = a - (b + c)$.

Aus $a + b = a + c$ folgt $b = c$. Aus $a \cdot b = a \cdot c$ folgt $b = c$ oder $a = 0$.

Existenz und Eindeutigkeit der Division mit Rest: Zu $a, b \in \mathbb{N}$ gibt es eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{N}_0$ mit $a = bq + r$ und $r < b$. Divisionsalgorithmus und Varianten.

Weitere Vertiefung:

Endlichkeits- und Unendlichkeitsaussagen: "Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen", "Es gibt keine unendlich große natürliche Zahl", "Es gibt beliebig große natürliche Zahlen", "In jeder nicht-leeren Menge natürlicher Zahlen gibt es eine kleinste natürliche Zahl". Induktion ("Wer ist ein echter Grazer?").

Teilbarkeitslehre und Primzahlen. Teilbarkeitsregeln für 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 25. Existenz und Eindeutigkeit der Primzerlegung. Es gibt unendlich viele Primzahlen. Warum ist 1 keine Primzahl? GGT und KGV, Euklidischer Algorithmus.

Natürliche Zahlen als Indizes, Folgen, rekursive Definitionen.

Geometrische Darstellung der natürlichen Zahlen auf dem Zahlenstrahl. Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat drei verschiedene geometrische Bedeutungen:

- a) Als Punkt mit der Koordinate n .

- b) Als Operator $\square + n$ (Rechtstranslation um n Punkte, repräsentiert durch einen verschiebbaren Pfeil mit Köcher in 0 und Spitze in n). Die Summe $m + n$ wird geometrisch wie folgt veranschaulicht: Man setze den Pfeil $\square + n$ im Punkt m an, seine Spitze liegt dann im Punkt $m + n$. Dadurch Vorbereitung der Vektorrechnung.
 $\square - n$ wird, soweit es ausführbar ist, repräsentiert durch Linkstranslation (die Einführung der negativen Zahlen ergibt sich geometrisch fast zwingend).
- c) Als Operator $\square \cdot n$ (Verlängerung eines Pfeiles auf das n -fache. Das Produkt $m \cdot n$ wird geometrisch wie folgt veranschaulicht: Man verlängere den Pfeil mit Köcher in 0 und Spitze in m auf das n -fache. Dann liegt seine Spitze in $m \cdot n$.

Diese Veranschaulichung der Multiplikation spiegelt das Kommutativ- und das Distributivgesetz nicht wider. Dafür eignet sich das Flächenmodell.

Ganze Zahlen. *Das Minuszeichen, Vorzeichen oder Rechenzeichen?*

Mathematische Analyse. Das Vorzeichen einer reellen Zahl $x \neq 0$ ist $\text{sign}(x) \in \{\pm 1\}$. Ist $(G, +)$ eine additive abelsche Gruppe mit neutralem Element $\mathbf{0}$, so gibt es zu jedem $a \in G$ genau ein $a' \in G$ mit $a + a' = \mathbf{0}$. Dieses Element a' heißt *Negatives* oder *Gegenelement* von a und wird mit $-a$ bezeichnet. Die Bildung des Negativen ist also eine Abbildung

$$G \rightarrow G, \quad a \mapsto -a,$$

und es ist $-(-a) = a$ (man nennt eine solche Abbildung *Involution*. Damit wird dann das *Subtraktionszeichen* als Rechenzeichen definiert durch $a - b = a + (-b)$ ("Subtraktion ist Addition des Gegenelements").

Der Begriff der Involution kehrt immer wieder: $x \mapsto x^{-1}$ für $x \in \mathbb{R}$, $c \mapsto \bar{c}$ für $c \in \mathbb{C}$, als Spiegelung in der Geometrie. Abstrakt: Eine Abbildung $\sigma: M \rightarrow M$ ist eine Involution, wenn $\sigma \circ \sigma = \text{id}$ (äquivalent: $\sigma = \sigma^{-1}$).

Konvention. Ein ohne Klammern geschriebener Term mit $+$ und $-$ ist wie in einem Rechenbaum von links nach rechts abzuarbeiten.

Beispiel: $-a - b + c - d = (-a) + (-b) + c + (-d)$.

Der Rechenbaum kann als durchgehendes didaktisches Prinzip für die gesamte Unterstufe verwendet werden.

Didaktische Konsequenzen (ein Vorschlag). Man erweitert den Zahlenstrahl zur Zahlengeraden und führt die negativen Zahlen als Spiegelbilder (*Gegenzahlen*) auf der Zahlengeraden ein: Dann ist $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$. Jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist durch einen Punkt auf dem Zahlenstrahl repräsentiert. Die Spiegelung am Nullpunkt führt jede Zahl a in ihre *Gegenzahl* $-a$ über. Es ist dann $-(-a) = a$. Man vermeide den Ausdruck "Minuszahlen". Ist a positiv, so ist $-a$ negativ, ist a negativ, so ist $-a$ positiv (das muss geübt werden!). In Analogie zur geometrischen Deutung der Addition auf \mathbb{N} ist nun wieder jedem $n \in \mathbb{Z}$ auch der Operator $\square + n$ zuzuordnen, repräsentiert durch einen verschiebbaren Pfeil mit Köcher in 0 und Spitze in n . Nun erfolgt der didaktisch schwierige Paradigmenwechsel: Die bekannte Subtraktion ist neu zu interpretieren als Addition der Gegen zahl!

Damit einheitliche vektorielle Darstellung, der Formalismus ist derselbe wie in der mehrdimensionalen vektoriellen Geometrie.

Multiplikation ganzer Zahlen: Zunächst geometrische Deutung der Multiplikation natürlicher Zahlen als Vielfachenbildung auf dem Zahlenstrahl (dieses Modell spiegelt die Kommutativität nicht wieder!), dann analog Bilden positiver Vielfache ganzer Zahlen, und Definition der negativen Vielfachen durch $(-n)x = -(nx)$: das $(-n)$ -fache von x ist die Gegenzahl des n -fachen von x (und stimmt mit dem n -fachen der Gegenzahl von x überein, $(-n)x = n(-x)$).

Praxis des Rechnens: Jedes $a \in \mathbb{Z}$ hat eine eindeutige Darstellung $a = \text{sign}(a) \cdot |a|$ (Vorzeichen mal Absolutbetrag). Man berechnet ab durch $\text{sign}(ab) = \text{sign}(a) \cdot \text{sign}(b)$ ("Vorzeichenregel") und $|ab| = |a||b|$.

Ziel: Kenntnis der Rechenregeln in \mathbb{Z} (mathematisch: \mathbb{Z} ist ein Integritätsbereich, genauer: \mathbb{Z} ist ein Primring der Charakteristik 0 und durch diese Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt).

Rationale Zahlen. *Österreichische Schultradition.* In der österreichischen Schultradition werden bereits in der Volksschule die Zahlbereiche $10^{-2}\mathbb{N}$ als Dezimalzahlen (für das bürgerliche Rechnen) und unabhängig davon einfache Bruchzahlen eingeführt. Es folgt dann die Einführung von $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ als Menge von Bruchzahlen, bei der Umwandlung in Dezimalzahlen "schwindelt" man sich mit den nicht-abbrechenden periodischen Entwicklungen durch. Erst später (üblicherweise 7. Schulstufe) erfolgt die Erweiterung zu den negativen (ganzen und rationalen) Zahlen. Dabei wird die Einführung der negativen ganzen Zahlen genau und danach die der negativen rationalen Zahlen in Analogie durchgeführt.

Alternative (deutsch-französisches Modell). Man interpretiere von Anfang an Dezimalzahlen als Bruchzahlen. Damit erspart man sich die Mühe, die beiden Zahlbegriffe als gleichwertig zu erkennen.

Brüche. Mathematisch ist ein *Bruch* ein Zahlenpaar, geschrieben in der Form

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{Z}{N} \quad \text{mit } N, Z \in \mathbb{N}.$$

und drückt Gegebenheiten des täglichen Lebens aus (Anteile von Vielfachen, Vielfache von Anteilen, Bruchteile, "nicht-ausgeführte Divisionen"). Für das Bruchrechnen ist die Gleichheitsdefinition ("zwei Brüche sind gleich, wenn sie denselben Wert haben") grundlegend:

$$(*) \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{genau dann, wenn } ab' = a'b.$$

Didaktisch ist das in zwei Schritten zu erarbeiten ("Kürzen und Erweitern von Brüchen"):

$$\frac{a}{b} = \frac{ab'}{bb'} \quad \text{und} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a'a}{b'b}.$$

Unter einer *rationalen Zahl* versteht man dann den "Wert" eines Bruches. Natürlich ist das zunächst einmal eine Zirkeldefinition. Mathematische Präzisierung:

Eine rationale Zahl ist eine Äquivalenzklasse von Brüchen mit demselben Wert, und "denselben Wert haben" ist durch $(*)$ definiert. Praktisch wird kaum zwischen einem Bruch und der durch ihn repräsentierten Zahl unterschieden, das ist zu schwerfällig. Dieses Phänomen tritt in der Schulmathematik öfter auf (Vektor und repräsentierender Pfeil, Länge und repräsentierende Strecke, Winkelmaß und repräsentierender Winkel).

Die bereits in der Volksschule erarbeiteten rationalen Zahlen $10^{-2}\mathbb{N}$ werden nun als Zehntel- und Hundertstelbrüche interpretiert. Gleichzeitig erfolgt die Darstellung der natürlichen Zahlen als Brüche durch $n = \frac{n}{1}$. Allgemeiner kann jede abbrechende Dezimalzahl durch einen Bruch repräsentiert werden (aber nicht umgekehrt!). Periodische Dezimalzahlen ergeben sich durch einen nicht-abbrechenden und periodisch verlaufenden Divisionsalgorithmus, haben aber unabhängig davon (zunächst) keine Bedeutung.

Nach der Einführung von \mathbb{Z} und $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ wie beschrieben macht der Übergang zu \mathbb{Q} im allgemeinen keinerlei Schwierigkeiten (Analogieüberlegungen!).

Addition und Subtraktion von Brüchen. $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a}$ (Addition gleichnamiger Brüche).

Ungleichnamige Brüche sind auf gemeinsamen Nenner zu bringen: $\frac{b}{a} + \frac{c}{d} = \frac{bd}{ad} + \frac{ac}{ad}$, $d + \frac{c}{a} = \frac{ad}{a} + \frac{c}{a}$.

Beachte: Subtraktion ist Addition der Gegenzahl $-\frac{c}{a} = \frac{-c}{a} = \frac{c}{-a}$.

Multiplikation und Division von Brüchen. $c \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot c = \frac{bc}{a}$, $\frac{b}{a} : c = \frac{b}{ac}$.

Allgemein: $\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{b}{a}\right) \cdot c : d = \frac{bc}{a} : d = \frac{bc}{ad}$.

$\frac{b}{a} : \frac{d}{a} = \frac{bd}{ad} : \frac{a}{ad} = \frac{bd}{a}$. $\frac{b}{a} : \frac{1}{d}$ ist Lösung der Gleichung $\frac{1}{d} \cdot x = \frac{b}{a}$ oder $\frac{a}{ad} \cdot x = \frac{bd}{ad}$. $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$, $\frac{a}{b}$ ist das (multiplikative) Inverse von $\frac{b}{a}$.

Division ist Multiplikation mit dem Inversen (Analogie zur Subtraktion).

Abschied von den *vier Grundrechnungsarten*: Subtraktion ist Addition der Gegenzahl, Division ist Multiplikation mit dem Inversen.

Satz von der reduzierten Bruchdarstellung. Jede rationale Zahl hat eine eindeutige Darstellung in der Form

$$x = \frac{p}{q} \quad \text{mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \text{ggT}(|p|, q) = 1.$$

Didaktisch: Durch fortgesetztes Kürzen kann man jeden Bruch zu einem nicht mehr kürzbaren reduzieren (Existenz), das Ergebnis ist von der Art und Weise, wie gekürzt wird, unabhängig (Eindeutigkeit). Man verwende mathematisch exakte Ausdrucksweisen. Die Aufgabenstellung muss heißen "Man bestimme die reduzierte Bruchdarstellung" und nicht "man kürze so weit wie möglich".

Algebraische Eigenschaften der rationalen Zahlen: $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ ist ein geordneter Körper. Das bedeutet:

- 1) $(\mathbb{Q}, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.
- 2) $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1 (mit $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$).

3) Es gilt das Distributivgesetz.

4) (\mathbb{Q}, \leq) ist totalgeordnet.

5) Aus $a \leq b$ folgt $a+c \leq b+c$ und im Falle $c \geq 0$ auch $ac \leq bc$ (Monotonie von Addition und Multiplikation).

Satz von der eindeutigen Gleichungsauflösung. Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ und $a \neq 0$. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $ax = b$.

Dieses x wird mit $\frac{b}{a}$ bezeichnet (Paradigmenwechsel: "Doppelbrüche").

Eigenschaften der Anordnung auf \mathbb{Q} . 1) Sind $a, a' \in \mathbb{N}$ und $b, b' \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\frac{b}{a} \leq \frac{b'}{a'} \quad \text{genau dann, wenn} \quad a'b \leq ab'$$

(das folgt aus der Monotonie der Multiplikation). Ein didaktischer Trick:

$$\frac{b}{a} \leq \frac{b'}{a'} \iff \frac{a'b}{aa'} \leq \frac{ab'}{aa'} \iff a'b \leq ab'.$$

2) (\mathbb{Q}, \leq) ist beidseitig unbeschränkt, d. h., es gibt keine größte und keine kleinste rationale Zahl. Beweis: Ist $x \in \mathbb{Q}$, so ist $x+1 \in \mathbb{Q}$ und $x-1 \in \mathbb{Q}$, und $x-1 < x < x+1$. Diskussion: Es gibt zwar beliebig große und beliebig kleine rationale Zahlen, aber keine "unendlich große" und keine "unendlich kleine" rationale Zahl. Es gibt aber unendlich viele rationale Zahlen (was heißt das?) Man achte auf einen präzisen Sprachgebrauch, der die Infinitesimalrechnung in geeigneter Weise vorbereitet!

3) (\mathbb{Q}, \leq) ist dicht geordnet, d.h., zwischen je zwei rationalen Zahlen gibt es unendlich viele weitere. Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{Q}$ und $x < y$; dann ist $x < \frac{x+y}{2} < y$. Also gibt es zwischen je zwei rationalen Zahlen mindestens eine weitere. Um zu zeigen, dass es in der Tat unendliche viele gibt, nimmt man an, es seien nur endlich viele und ordnet diese der Größe nach. Zwischen x und der kleinsten dieser Zahlen gibt es aber eine weitere, welche auch zwischen x und y liegt, Widerspruch!

Insbesondere gibt es keine kleinste positive rationale Zahl. Beweis: Ist $a > 0$, so ist $0 < \frac{a}{2} < a$.

4) \mathbb{Q} ist archimedisch geordnet: Sind $a, b \in \mathbb{Q}$ und ist $a > 0$ so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na \geq b$ ("b kann durch Vielfache von a eingefangen werden"); ist auch $b > 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a}{n} < b$ ("b kann durch Bruchteile von a unterboten werden").

Darstellung auf der Zahlengeraden. Für $q \in \mathbb{N}$ stelle man zunächst $\frac{1}{q}$ auf der Zahlengeraden derart dar, dass der Pfeil von 0 nach 1 genau das q -fache des Pfeiles von 0 nach $\frac{1}{q}$ ist (Konstruktion mit Strahlensatz). Dann konstruiere man den Punkt $\frac{p}{q}$ (mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$) als p -faches von $\frac{1}{q}$ durch Verallgemeinerung der von \mathbb{Z} bekannten Rechenvorschrift. Damit entspricht jeder rationalen Zahl ein Punkt auf der Zahlengeraden.

Mathematisch präzise: Man unterscheide zwischen Zahlen und den sie darstellenden Punkten auf der Zahlengeraden. Die Zahlengerade ist ein (anschauliche) Gerade \mathcal{G}

mit zwei ausgezeichneten Punkten $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$, auf der eine Addition $+$ durch Translationen und eine Multiplikation \cdot geometrisch durch den Strahlensatz definiert ist. Dann gibt es genau einen injektiven Homomorphismus $\iota: \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{G}$ mit $\iota(0) = \mathbf{0}$ und $\iota(1) = \mathbf{1}$. Dieser ist ordnungstreu (für $x, y \in \mathbb{Q}$ ist genau dann $x < y$, wenn $\iota(x)$ links von $\iota(y)$ liegt), aber nicht surjektiv, denn es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ (Beweis mit reduzierter Bruchdarstellung), aber es gibt eine Punkt $p \in \mathcal{G}$ mit $p \cdot p = \iota(2)$ (Konstruktion mittels Quadratdiagonale).

Dezimalbruchentwicklung. 1) Jede natürliche Zahl k hat eine eindeutige Darstellung in der Form

$$k = 10^d a_d + 10^{d-1} a_{d-1} + \cdots + 10 a_1 + a_0 = a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0$$

mit $d \in \mathbb{N}_0$, $a_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ und $a_d \geq 1$. Dabei ist d eindeutig bestimmt durch die Ungleichungen

$$10^d \leq k < 10^{d+1}.$$

2) Jedes $z \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ hat eine eindeutige Darstellung in der Form $z = k + y$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, $y \in \mathbb{Q}$ und $0 \leq y < 1$. Man nennt k den ganzen und y den gebrochenen Anteil von z , $k = \lfloor z \rfloor$ und $y = \{z\}$ (diese Zerlegung ist die Darstellung von z als "gemischte Zahl").

Ist z als Dezimalzahl gegeben, so ist die Existenz und Eindeutigkeit dieser Zerlegung offensichtlich. Ist z als Bruch gegeben, $z = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, so dividiert man p mit Rest durch q , $p = kq + r$ mit $k, r \in \mathbb{N}_0$, $r < q$, und erhält $\lfloor z \rfloor = k$ und $\{z\} = \frac{r}{q}$. Die im bürgerlichen Leben übliche Schreibweise als gemischte Zahl $z = k \frac{r}{q}$ ist Quelle vieler Fehler. Kopfrechnen mit einfachen gemischten Zahlen ist zu üben, bei komplexeren Aufgaben ist die Darstellung als reiner Bruch oder als Dezimalzahl zu wählen.

3) Zu jeder rationalen Zahl y mit $0 \leq y < 1$ gibt es eine eindeutig bestimmte Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ in $\{0, 1, \dots, 9\}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(*) \text{ Aus } y_n = 10^{-1} b_1 + 10^{-2} b_2 + \cdots + 10^{-n} b_n \quad \text{folgt} \quad y_n \leq y < y_n + 10^{-n}.$$

Die Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ heißt *Dezimalziffernfolge von y* , die Zahlen $(y_n)_{n \geq 1}$ heißen *dezimale Näherungen von y* . Man schreibt üblicherweise

$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

und nennt diese Darstellung die *Dezimalbruchentwicklung von y* . Ist $e \in \mathbb{N}_0$ und $b_n = 0$ für alle $n > e$, so sagt man, die Dezimalbruchentwicklung von y bricht ab und schreibt

$$y = 0, b_1 b_2 \dots b_e.$$

Ist $z = k + y \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $k = a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0$ wie in 1), so schreibt man

$$z = a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

Berechnungsverfahren für die Dezimalziffernfolge. Sei $y = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}_0$ und $p < q$. Mit Hilfe des Divisionsalgorithmus definiert man zwei Folgen $(p_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ rekursiv wie folgt:

$$(**) \quad p_0 = p; \quad 10p_n = b_{n+1}q + p_{n+1} \quad \text{mit} \quad b_{n+1}, p_{n+1} \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad p_{n+1} < q.$$

Dann ist $(b_n)_{n \geq 1}$ die Dezimalziffernfolge von y , und für alle $n \geq 0$ ist

$$y = 10^{-1}b_1 + \dots + 10^{-n}b_n + \frac{10^{-n}p_{n+1}}{q}.$$

Beweisstruktur: Zeige zuerst die Eindeutigkeit einer Folge mit der Eigenschaft (*), und zeige dann, dass die durch (**) definierte Folge diese Eigenschaft besitzt.

Geometrische Deutung mittels einer dezimalen Skala auf der Zahlengeraden, welche man beliebig verfeinern kann ("Mikroskopischer Maßstab"). Der Punkt $\iota(y) \in \mathcal{G}$ ist innerer Punkt der Intervallschachtelung $[\iota(y_n), \iota(y_n + 10^{-n})]$, die Punkte $\iota(y_n)$ und $\iota(y_n) + 10^{-n}$ sind Punkte der Skala. Genau dann bricht die Dezimalbruchentwicklung von y ab, wenn $\iota(y)$ ein Punkt der Skala ist. In jedem Falle beschreibt die Dezimalbruchentwicklung von y das beliebig genaue "Ausmessen" des Punktes $\iota(y)$ mit Hilfe dieser Skala. Diese Deutung bereitet das Verständnis der reellen Zahlen und deren dezimaler Näherungen vor.

4) Sei $y \in \mathbb{Q}$, $0 \leq y < 1$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ die Dezimalziffernfolge von y . Dann gilt:

a) Die Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ ist schließlich-periodisch, d. h.: es gibt natürliche Zahlen k und l , so dass $b_{n+l} = b_n$ für alle $n \geq k$.

Beweis: In (**) gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für p_n , also gibt es $k, l \in \mathbb{N}$ mit $p_{k+l} = p_k$. Dann folgt $b_{n+l} = b_n$ und $p_{n+l} = p_n$ für alle $n \geq k+1$.

b) Die Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ ist nicht schließlich-periodisch mit der Periode 9, d. h.: Zu jedem $n \geq 1$ gibt es ein $m \geq n$ mit $b_m \neq 9$ ("beliebig weit draußen gibt es von 9 verschiedene Ziffern").

5) Sei $y \in \mathbb{Q}$, $0 \leq y < 1$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ die (schließlich-periodische) Dezimalziffernfolge von y . Sei $k \in \mathbb{N}_0$ minimal mit der Eigenschaft: Es gibt ein $l \in \mathbb{N}$, so dass $b_{n+l} = b_n$ für alle $n > k$. Dann heißt k die *Vorperiodenlänge* von $(b_n)_{n \geq 1}$. Ist $k \geq 1$, so heißt $(b_1 b_2 \dots b_k)$ die *Vorperiode* von $(b_n)_{n \geq 1}$. Ist $k = 0$, so heißt $(b_n)_{n \geq 1}$ *rein-periodisch*.

Sei k die Vorperiodenlänge von $(b_n)_{n \geq 1}$. Sei l minimal mit der Eigenschaft, dass $b_{n+l} = b_n$ für alle $n > k$. Dann heißt l die *Periodenlänge* und $(b_{k+1} b_{k+2} \dots b_{k+l})$ die (*primitive*) *Periode* von $(b_n)_{n \geq 1}$. Man schreibt dann

$$y = 0, b_1 b_2 \dots b_k \overline{b_{k+1} \dots b_{k+l}} = 0, b_1 b_2 \dots b_k \dot{b}_{k+1} \dot{b}_{k+2} \dots \dot{b}_{k+l}.$$

Die Vorperiodenlänge und die Periodenlänge von $(b_n)_{n \geq 1}$ berechnet man wie folgt: Sei $k \in \mathbb{N}_0$ minimal, so dass $10^k y = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$ und

$\text{ggT}(p, q) = \text{ggT}(q, 10) = 1$. Sei $l \in \mathbb{N}$ minimal, so dass $q \mid (10^l - 1)$. Dann ist k die Vorperiodenlänge und l die Periodenlänge von $(b_n)_{n \geq 1}$. Genau dann bricht die Dezimalbruchentwicklung ab, wenn sie die Periode (0) besitzt.

Beispiel. $y = \frac{3}{55}$. Wegen $10 \cdot \frac{3}{55} = \frac{6}{11}$ ist $k = 1$ und $q = 11$. $l = 2$ ist minimal mit $11 \mid (10^l - 1)$. Der Divisionsalgorithmus liefert $\frac{3}{55} = 0,0\overline{54}$.

Didaktische Bemerkung. Die Unterscheidung in rein-periodische und gemischt-periodische Dezimalbruchentwicklungen ist nicht trivial ($0,1\overline{31} = 0,1\overline{3}$). Abbrechende Dezimalbruchentwicklungen sollten als Spezialfall periodischer Entwicklungen erkannt werden.

6) Sei $y \in \mathbb{Q}$, $0 \leq y < 1$. Genau dann bricht die Dezimalbruchentwicklung von y ab, wenn

$$y = \frac{p}{2^a 5^b} \quad \text{mit } p, a, b \in \mathbb{N}_0.$$

Dezimalzahlen. Sei $p \in \mathcal{G}_{\geq 0}$ ein Punkt auf dem nicht-negativen Strahl der Zahlengeraden. Mit Hilfe der eben eingeführten dezimalen Skala ordnen wir dem Punkt p eine Folge

$$z = \mathbf{z}(p) = a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots$$

mit $d \in \mathbb{N}_0$, $a_i, b_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für alle i, j und $a_d \neq 0$ im Falle $d \geq 1$ derart zu, so dass für alle $e \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{Aus } z_e = a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_e \quad \text{folgt} \quad \iota(z_e) \leq p < \iota(z_e + 10^{-e}).$$

Diese Zuordnung besitzt die folgenden Eigenschaften:

1) Ist $\mathbf{z}(p) = a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots$, so ist die Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ nicht schließlich-periodisch mit der Periode 9.

2) Ist $p = \iota(y)$ mit $y \in \mathbb{Q}$, so folgt $\mathbf{z}(p) = y$.

Definition. Unter einer *nicht-negativen Dezimalzahl* verstehen wir eine Folge

$$\begin{aligned} z &= a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots \\ &= 10^d a_d + 10^{d-1} a_{d-1} + \dots + 10 a_1 + a_0 + 10^{-1} b_1 + 10^{-2} b_2 + \dots \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften: $d \in \mathbb{N}_0$, $a_i, b_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für alle i, j und $a_d \neq 0$ im Falle $d \geq 1$; $(b_n)_{n \geq 1}$ ist nicht schließlich-periodisch mit der Periode 9. Für $e \geq 1$ heißt

$$z_e = a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_e \in \mathbb{Q}$$

die e -te *dezimale Näherung* von z . Ist $z \neq 0$ eine nicht-negative Dezimalzahl und ist $(z_e)_{e \geq 1}$ die Folge der dezimalen Näherungen von z , so nennen wir das Symbol $-z$ eine *negative Dezimalzahl* und die rationalen Zahlen $-z_e$ ihre dezimalen Näherungen. Unter einer *reellen Zahl* oder *Dezimalzahl* verstehen wir eine nicht-negative oder negative Dezimalzahl. Wir bezeichnen mit \mathbb{R} die Menge

der reellen Zahlen. Auf Grund der Dezimalbruchentwicklung der rationalen Zahlen ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Ist $p \in \mathcal{G}_{<0}$ ein Punkt auf dem negativen Strahl der Zahlengeraden, so bezeichnen wir mit $-p \in \mathcal{G}_{>0}$ sein Spiegelbild an $\mathbf{0}$ und setzen $z(p) = -z(-p)$. Damit wird z zu einer Abbildung

$$z: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sei nun wieder z eine nicht-negative Dezimalzahl und $(z_e)_{e \geq 1}$ die Folge der dezimalen Näherungen von z . Dann gibt es genau einen Punkt $p = \iota^*(z) \in \mathcal{G}_{\geq 0}$ mit

$$\iota(z_e) \leq p \leq \iota(z_e) + 10^{-e} \quad \text{für alle } e \geq 1$$

(”die Intervalle $[\iota(z_e), \iota(z_e) + 10^{-e}]$ ziehen sich auf den Punkte $\iota^*(z) \in \mathcal{G}_{\geq 0}$ zusammen”). Setzt man nun noch $-p = \iota^*(-z)$, so ist $\iota^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ eine bijektive Abbildung mit $\iota^*|_{\mathbb{Q}} = \iota$ und $(\iota^*)^{-1} = z$.

Die Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengeraden entspricht der geometrischen Beschreibung der reellen Zahlen als Längen von Strecken in der Ebene nach Zugrundelegen eines Maßstabes (Elementargeometrie!). Die Beschreibung der reellen Zahlen durch Dezimalzahlen ist im Gegensatz dazu arithmetischer (also rechnerischer) Natur. Die Bijektion ι^* vermittelt die Gleichwertigkeit der beiden Beschreibungen.

9-periodisch. Für das Rechnen mit Dezimalzahlen ist es sinnvoll auch ”schließlich 9-periodische Dezimalzahlen” zuzulassen (es ist $0, \dot{4} + 0, \dot{5} = 0, \dot{9}$). Sei

$$\tilde{z} = 0, b_1 \dots b_e \dot{9}$$

eine schließlich 9-periodische Folge mit $e \geq 0$, $b_1, \dots, b_e \in \{0, 1, \dots, 9\}$ und $b_e \leq 8$, falls $e \geq 1$. Für $n \geq e$ sei

$$\tilde{z}_n = 0, b_1 \dots b_e \underbrace{9 \dots 9}_{n-e}.$$

Will man in vernünftiger Weise der Folge \tilde{z} einen Punkt $p \in \mathcal{G}$ zuordnen, so wird man $\iota(\tilde{z}_n) \leq p \leq \iota(\tilde{z}_n + 10^{-n})$ für alle $n \geq e$ fordern. Für alle $n \geq e$ ist aber

$$\tilde{z}_n + 10^{-n} = z = \begin{cases} 1, & \text{falls } e = 0, \\ 0, b_1 \dots b_{e-1} (b_e + 1), & \text{falls } e \geq 1. \end{cases}$$

Also folgt $\iota(z) = p$, und daher definieren wir $\tilde{z} = z$. Explizit:

$$0, \dot{9} = 1; \quad 0, b_1 \dots b_e \dot{9} = 0, b_1 \dots b_{e-1} (b_e + 1), \quad \text{falls } e \geq 1 \text{ und } b_e \leq 8$$

und

$$a_d a_{d-1} \dots a_0, b_1 \dots b_{e-1} b_e \dot{9} = a_d a_{d-1} \dots a_0 + 0, b_1 \dots b_{e-1} b_e \dot{9}.$$

Ordnung auf \mathbb{R} . Seien $z, z' \in \mathbb{R}$ und $(z_e)_{e \geq 1}, (z'_e)_{e \geq 1}$ die dezimalen Näherungen von z, z' . Ist $m \geq 1$ mit $z_m < z'_m$, so folgt $z_e < z'_e$ für alle

$e \geq m$ (Beweis!), und wir nennen dann z kleiner als z' , $z < z'$. Dadurch wird (\mathbb{R}, \leq) totalgeordnet.

Rechnen mit Dezimalzahlen. Das Rechnen mit einer reellen Zahl z erfolgt durch das Rechnen mit ihren (beliebig genauen) dezimalen Näherungen ("man kann natürlich nicht mit unendlich vielen Stellen rechnen, aber man kann es sich denken"). Dabei können jedoch "9-periodische Dezimalzahlen" auftreten, welche dann entsprechend obiger Konvention umgewandelt werden müssen. Grundlage dafür ist der folgende Approximationssatz.

Seien $u, z \in \mathbb{R}$ und seien u_n, z_n die dezimalen Näherungen. Stehe $$ abkürzend für $+, -, \cdot, :$. Dann gibt es genau eine reelle Zahl y mit dezimalen Näherungen y_e , so dass gilt: Zu jedem $e \geq 1$ gibt es ein $n_0 \geq 1$ mit*

$$|y_e - u_n * z_n| \leq 10^{-e} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

*Dann setzen wir $y = u * z$. Im Falle $* = :$ ist natürlich $z \neq 0$ vorauszusetzen (dann ist auch $z_n \neq 0$ für alle hinreichend großen n).*

Abschätzen der Rechengenauigkeit. Seien $z, z' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, approximiert durch $z_e, z'_e \in \mathbb{R}$ mit $|z - z_e| \leq 10^{-e}$ und $|z' - z'_e| \leq 10^{-e}$. Die Zahlen seien von der Größenordnung $|z| \leq 10^d$ und $10^{-c} \leq |z'| \leq 10^d$. Dann folgt

$$\begin{aligned} |(z \pm z') - (z_e \pm z'_e)| &\leq |z - z_e| + |z' - z'_e| \leq 2 \cdot 10^{-e} < 10^{-e+1}, \\ |zz' - z_e z'_e| &\leq |z'| \cdot |z - z_e| + |z_e| \cdot |z' - z'_e| \leq 10^{-e+d+1}, \\ \left| \frac{z}{z'} - \frac{z_e}{z'_e} \right| &= \frac{|z - z_e|}{|z z'_e|} < 10^{-e+2c-1}. \end{aligned}$$

Obiges Resultat zeigt, wie sich Fehler der Ausgangsdaten im Laufe der Rechnung fortpflanzen. Sind z_e, z'_e die dezimalen Näherungen von z, z' , so erhält man explizite Werte für den Index n_0 im obigen Approximationssatz.

Periodizität. Jede periodische Dezimalzahl ist eine rationale Zahl. Der Beweis erfolgt durch folgende Rechnung: Ist z eine periodische Dezimalzahl mit Periodenlänge l , so ist $(10^l - 1)z$ eine abbrechende Dezimalzahl, also rational. Daher ist auch z rational. Mit dieser Rechnung kann man auch "nachträglich" noch einmal die "9-periodisch-Regel" rechtfertigen.

Gleitkommadarstellung reeller Zahlen. Jede positive reelle Zahl z hat eine eindeutige Darstellung in der Form

$$z = z_0 \cdot 10^k$$

mit $0,1 \leq z_0 < 1$ und $k \in \mathbb{Z}$. Im Rechner erscheint das in der Form

$$b_1 b_2 \dots k$$

mit $b_i \in \{0, \dots, 9\}$ und $b_1 \neq 0$.

Manchmal betrachtet man auch die Normierung $1 \leq z_0 < 10$.

Bemerkung zur Konvergenz. Im Rahmen der Grenzwerttheorie wird eine Neubegründung des Rechnens mit (unendlichen) Dezimalzahlen erfolgen. Hier wurden sie rein formal zur Definition der reellen Zahlen verwendet. Auf Grund dieser Definition ist ein (unendlicher) Dezimalbruch die Kodifizierung des Resultats einer beliebig genauen Ausmessung eines Punktes auf der Zahlengeraden mit Hilfe einer mikroskopischen Skala.

Existenz von Wurzeln. Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $z^n = a$. Diese Zahl z ist durch ihre dezimalen Näherungen z_e gegeben vermöge

$$z_e^n \leq a < (z_e + 10^{-e})^n \quad \text{für alle } e \geq 1.$$

Man nennt z die (positive) n -te Wurzel aus a und schreibt $z = \sqrt[n]{a}$.

Es ist verblüffend, dass man auf diese Weise aus der Existenz der Dezimalbruchentwicklung die Existenz von Wurzeln und auch ein Verfahren zu ihrer Berechnung erhält. Wir haben jedoch (und das ist im Rahmen der Schulmathematik gerechtfertigt!) bei der Einführung der reellen Zahlen mittels unendlicher Dezimalzahlen heuristisch argumentiert und unser Beweis für die Existenz von Wurzeln hat genau denselben Exaktheitsgrad wie die Einführung der reellen Zahlen. Eine strenge mathematische Begründung der reellen Zahlen auf der Grundlage der Dezimalzahlen ist zwar möglich, aber langwierig und im Detail schwierig.

Rechenregeln für Wurzeln. Für $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[n]{a}, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}.$$

Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ und gerades $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so kann man $\sqrt[n]{a}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ definieren, aber es gelten dann die gewohnten Rechenregeln nicht mehr: $3 = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{(-27)^2} \neq \sqrt[3]{-27} = -3$.

3.2 Algebraische Theorie der Quotientenstrukturen

Definition. Ein *Monoid* $(M, *, e)$ ist eine nicht-leere Menge M , gemeinsam mit einer Verknüpfung

$$M \times M \rightarrow M, \quad (a, b) \mapsto a * b$$

und einem Element $e \in M$, so dass gilt:

- 1) $*$ ist assoziativ und kommutativ.
- 2) $e * x = x$ für alle $x \in M$ (e ist ein neutrales Element für $*$).
- 3) Aus $a * b = a * c$ folgt $b = c$ (M ist kürzbar).

Eine Gruppe $(G, \bar{*})$ heißt *Quotientengruppe* von $(M, *)$, wenn

$$M \subset G, \quad \bar{*} | M \times M = * \quad \text{und} \quad G = \{a\bar{b}^{-1} \mid a, b \in M\}.$$

Sei $R = (R, +, \cdot, 0, 1)$ ein Integritätsbereich (also ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit $0 \neq 1$) und $R^\bullet = R \setminus \{0\}$. Dann ist $(R^\bullet, \cdot, 1)$ ein Monoid. Ein Körper K heißt *Quotientenkörper* von R , wenn R eine additive Untergruppe von K und K^\bullet eine Quotientengruppe von R ist.

Beispiele: $(\mathbb{Z}, +)$ ist Quotientengruppe des Monoids $(\mathbb{N}_0, +, 0)$.

$(\mathbb{Q}, +)$ ist Quotientengruppe des Monoids $(\mathbb{Q}_{\geq 0}, +, 0)$.

$(\mathbb{R}, +)$ ist Quotientengruppe des Monoids $(\mathbb{R}_{\geq 0}, +, 0)$.

$(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist Quotientengruppe des Monoids (\mathbb{N}, \cdot) .

\mathbb{Q} ist ein Quotientenkörper von \mathbb{Z} .

Satz von der Existenz der Quotientengruppe. $M = (M, *, e)$ sei ein Monoid.

i) M besitzt eine Quotientengruppe.

ii) Sind G und G' Quotientengruppen von M , so gibt es genau einen Isomorphismus $\Phi: G \rightarrow G'$ mit $\Phi | M = \text{id}$.

Der Eindeutigkeitsbeweis ist eine einfache algebraische Übungsaufgabe. Der Existenzbeweis erfolgt konstruktiv und benutzt die folgenden drei Hilfssätze.

Lemma von der Existenz elementfremder Exemplare. A und B seien Mengen. Dann gibt es eine Menge B' mit $A \cap B' = \emptyset$ und eine bijektive Abbildung $f: B' \rightarrow B$ (man nennt B' ein zu A elementfremdes Exemplar von B).

Strukturübertragungslemma. Sei $f: M \rightarrow M'$ eine bijektive Abbildung und $*$ eine Verknüpfung auf M . Dann gibt es genau eine Verknüpfung $*'$ auf M' derart, dass f ein Isomorphismus bezüglich $(*, *')$ ist.

Austauschlemma. Sei $*$ eine Verknüpfung auf M , $*'$ eine Verknüpfung auf M' und $f: M \rightarrow M'$ ein injektiver Homomorphismus bezüglich $(*, *')$. Dann gibt es eine Obermenge \widetilde{M} von M , eine Verknüpfung $\widetilde{*}$ auf \widetilde{M} und eine bijektive Abbildung $\widetilde{f}: \widetilde{M} \rightarrow M'$ derart, dass gilt: $\widetilde{*} | M \times M = *$, $\widetilde{f} | M = f$, und \widetilde{f} ist ein Isomorphismus bezüglich $(\widetilde{*}, *')$.

Der Beweis der Austauschlemmas benutzt das Strukturübertragungslemma und das Lemma von der Existenz elementfremder Exemplare.

Konstruktiver Beweis des Satzes (Skizze). Definiere eine Äquivalenzrelation \sim auf $M \times M$ durch

$$(a, b) \sim (a', b') \quad \text{dann und nur dann, wenn} \quad a * b' = a' * b$$

(vergleiche mit der Einführung der Bruchzahlen in der Schule!). Sie $\widehat{M} = M \times M / \sim$ die Menge der Äquivalenzklassen, und bezeichne mit $[a, b]$ die Äquivalenzklasse von (a, b) . Definiere eine Verknüpfung $\widehat{*}$ auf \widehat{M} durch

$$[a, b] \widehat{*} [c, d] = [a * c, b * d].$$

Zeige: Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten, $(\widehat{M}, \widehat{*})$ ist eine Gruppe, die Abbildung $f: M \rightarrow \widehat{M}$, definiert durch $f(a) = [a, e]$ ist ein injektiver Homomorphismus, und jedes $x \in \widehat{M}$ hat eine Darstellung $x = u^{-1} \widehat{*} v$ mit $u, v \in f(M)$. Dann folgt die Behauptung mit dem Austauschlemma.

Satz von der Existenz des Quotientenkörpers. Jeder Integritätsbereich besitzt einen (bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmten) Quotientenkörper.

Der Beweis erfolgt entweder ähnlich wie der für die Existenz der Quotientengruppe oder durch Zurückführung auf diesen (Konstruktion der Quotientengruppe des multiplikativen Monoids, Hinzufügen der Null und Fortsetzung der Addition).

3.3 Abstrakte Theorie der reellen Zahlen

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Eigenschaften der reellen Zahlen unabhängig von ihrer Konstruktion durch Dezimalzahlen durch innere mathematische Eigenschaften.

Eigenschaften von \mathbb{R} . \mathbb{R} ist ein vollständig geordneter Körper. Das heißt:

1) $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ ist ein geordneter Körper (wie \mathbb{Q}). Insbesondere ist (\mathbb{R}, \leq) beidseitig unbeschränkt, dicht und archimedisch geordnet (wie \mathbb{Q}), und \mathbb{Q} ist ein dichter Unterkörper von \mathbb{R} (zwischen je zwei reellen Zahlen gibt es eine rationale Zahl).

2) \mathbb{R} ist vollständig (im Gegensatz zu \mathbb{Q}). Der Vollständigkeitsbegriff ist von zentraler Bedeutung und wird im folgenden in verschiedenen Varianten analysiert.

Führt man die reellen Zahlen mittels Dezimalzahlen ein, so hat man nun nachzuweisen, dass die so konstruierten Objekte einen vollständig geordneten Körper bilden. Das ist zwar auf Grund der Definition und der Bijektion mit dem Zahlenstrahl einleuchtend. Die Durchführung aller Beweise im einzelnen ist jedoch so langwierig und mühsam, dass dieser Weg zur Definition der reellen Zahlen im Rahmen eines Aufbaues der Analysis selten begangen wird.

Einzigkeit der reellen Zahlen. Sind K_1 und K_2 zwei vollständig geordnete Körper, so gibt es genau einen Ordnungsisomorphismus $\Phi: K_1 \rightarrow K_2$.

Auf Grund dieses Satzes ist es gleichgültig, mit welcher Konstruktion wir uns die reellen Zahlen verschafft haben, das Resultat ist stets "dasselbe". Man ändert nun den Standpunkt: die reellen Zahlen sind abstrakte Denkoobjekte (nämlich Elemente eines vollständig geordneten Körpers), die Dezimalbrüche sind Zeichen für diese Denkoobjekte. Einen analogen geistigen Prozess hatten wir auch bereits bei den natürlichen Zahlen vollzogen (erst Einführung durch die Zahlzeichen, dann Abstraktion von diesen).

Einbettungssatz. Sei K ein geordneter Körper. Dann gibt es genau einen Körpermonomorphismus $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow K$, und dieser ist ordnungstreu.

Auf Grund des Einbettungssatzes und des Austauschlemmas aus dem vorigen Abschnitt können wir im Folgenden stets annehmen, dass ein geordneter Körper \mathbb{Q} als Teilkörper enthält.

Definition. Sei $K = (K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ ein geordneter Körper.

a) Ein Paar (S_-, S_+) von Teilmengen von K heißt (*Dedekind'scher*) *Schnitt* von K , wenn gilt:

- 1) $S_- \neq \emptyset$, $S_+ \neq \emptyset$, $S_- \cap S_+ = \emptyset$ und $K = S_- \cup S_+$.
- 2) Für alle $a \in S_-$ und $b \in S_+$ ist $a < b$.
- 3) S_+ hat kein kleinstes Element.

b) Sei (S_-, S_+) ein Schnitt von K . Ein Element $s \in K$ heißt *Schnittzahl* des Schnittes (S_-, S_+) , wenn $a \leq s \leq b$ für alle $a \in S_-$ und $b \in S_+$ (äquivalent: $a = \max S_-$).

c) K heißt *vollständig*, wenn jeder Schnitt von K eine Schnittzahl besitzt.

d) Ein geordneter Oberkörper $\tilde{K} \supset K$ heißt *Vervollständigung* oder *Komplettierung* von K , wenn gilt:

- 1) \tilde{K} ist vollständig.
- 2) K ist dicht in \tilde{K} , d. h.: Für alle $a, b \in \tilde{K}$ mit $a < b$ gibt es ein $y \in K$ mit $a < y < b$ (dann gibt es auch unendlich viele).

e) K heißt *archimedisch geordnet*, wenn gilt: Zu jedem $x \in K$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$ (äquivalent: Für alle $a, b \in K$ mit $a > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na \geq b$).

Komplettierungssatz für geordnete Körper. Sei K ein archimedisch geordneter Körper.

- i) K besitzt eine Vervollständigung.
- ii) Sind K_1 und K_2 Vervollständigungen von K , so gibt es genau einen Ordnungsisomorphismus $\Phi: K_1 \rightarrow K_2$ mit $\Phi|_K = \text{id}$ (die Vervollständigung von K ist bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt).
- iii) Sei \tilde{K} eine Vervollständigung von K und (S_-, S_+) ein Schnitt in K . Dann gibt es genau ein $s \in \tilde{K}$, so dass $a \leq s \leq b$ für alle $a \in S_-$ und $b \in S_+$.
- iv) Sei \tilde{K} eine Vervollständigung von K , $s \in \tilde{K}$, $S_- = \{x \in K \mid x \leq s\}$ und $S_+ = \{x \in K \mid x > s\}$. Dann ist (S_-, S_+) ein Schnitt in K .

Insbesondere wird durch **iii)** und **iv)** eine Bijektion zwischen einer Vervollständigung \tilde{K} von K und der Menge der Schnitte von K definiert.

Obiger Satz weist den Weg zur Konstruktion der Vervollständigung durch Schnitte. Der Begriff des Schnittes ist geometrisch motiviert durch die Konstruktion eines Punktes auf der Zahlengeraden.

Definition. Sei $K = (K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ ein geordneter Körper. Eine Folge abgeschlossener Intervalle $I = (I_n)_{n \geq 0}$ mit $I_n = [a_n, b_n] \neq \emptyset$ heißt *Intervallschachtelung*, wenn gilt: $(a_n)_{n \geq 0}$ ist monoton wachsend, $(b_n)_{n \geq 0}$ ist monoton fallend,

und $(b_n - a_n)_{n \geq 0} \rightarrow 0$. Ein Punkt $z \in K$ heißt *innerer Punkt von I* , wenn

$$z \in \bigcap_{n \geq 0} I_n \quad (\text{äquivalent: } a_n \leq z \leq b_n \text{ für alle } n \geq 0).$$

I hat höchstens einen inneren Punkt z , und für diesen ist

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Beispiel. Sei $z = a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (mit $d \in \mathbb{N}_0$ und $a_i, b_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$). Für $e \in \mathbb{N}$ sei $z_e = a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_e \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ die e -te dezimale Näherung von z und $I_e = [z_e, z_e + 10^{-e}]$. Dann ist $(I_e)_{e \geq 0}$ eine Intervallschachtelung mit z als innerem Punkt.

Kennzeichnungssatz für Vollständigkeit. Für einen geordneten Körper K sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) K ist vollständig.
- b) Jede nicht-leere nach unten beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Infimum.
- c) Jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Supremum.
- d) Jede beschränkte Folge in K besitzt einen Häufungswert.
- e) Jede monoton wachsende und beschränkte Folge in K ist konvergent.
- f) Jede monoton fallende und beschränkte Folge in K ist konvergent.
- g) K ist archimedisch geordnet, und jede Cauchyfolge in K ist konvergent.
- h) K ist archimedisch geordnet, und jede Intervallschachtelung von K besitzt einen inneren Punkt.
- i) K ist eine Vervollständigung von \mathbb{Q} .

3.4 Folgen

Definition. Sei A eine Menge und $k \in \mathbb{Z}$. Eine *Folge in A mit Anfangsindex k* ist eine Abbildung

$$a: \begin{cases} \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\} & \rightarrow A \\ n & \mapsto a_n. \end{cases}$$

Schreibweise: $a = (a_n)_{n \geq k} = (a_k, a_{k+1}, \dots)$. Für $n \geq k$ heißt a_n das n -te *Glied der Folge*.

Schulrelevante Spezialfälle: $k = 0, 1$, $A = \mathbb{R}$; Folgen von Mengen (Intervallschachtelungen, geometrische Figuren).

Redeweise: Eine Folge ist eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n ein "eindeutig bestimmtes" Objekt a_n zuordnet.

Rekursionsatz. Sei M eine Menge und $a \in M$.

- i) (Allgemeine Rekursion) Sei $(g_n: M^n \rightarrow M)_{n \geq 1}$ eine Folge von Abbildungen. Dann gibt es genau eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in M , so dass $a_1 = a$ und $a_{n+1} = g(a_1, \dots, a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- ii) (Einfache Rekursion) Sei $g: M \rightarrow M$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in M , so dass $a_1 = a$ und $a_{n+1} = g(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- iii) (Mehrliedrige Rekursion) Sei $k \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_k \in M$ und $g_k: M^k \rightarrow M$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in M , so dass $a_n = b_n$ für alle $n \in [1, k]$, und $a_n = g(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$ für alle $n \geq k + 1$.

Angabe von Folgen. a) durch eine explizite Formel. b) durch eine Rekursionsvorschrift. c) durch "Pünktchen".

Beispiele. 1) $(a_n)_{n \geq 0}$ sei definiert durch $a_n = 2n + 4$ für alle $n \geq 0$. Dann ist $(a_n)_{n \geq 0} = (4, 6, 8, 10, \dots)$. Rekursion: $a_0 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 2$ für alle $n \geq 0$.

2) $(a_n)_{n \geq 1}$ sei definiert durch die Rekursion $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$. Dann ist $(a_n)_{n \geq 1} = (1, 4, 9, 16, \dots)$ und $a_n = n^2$ für alle $n \geq 1$.

3) Die Fibonacci-Folge $(F_n)_{n \geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$.

Rekursion: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

Explizit:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ist die Zahl des Goldenen Schnittes. Sie ist Lösung der Gleichung der harmonischen Teilung

$$\frac{1}{x} = \frac{x - 1}{1}.$$

Definition. Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen heißt

konstant, falls $a_{n+1} = a_n$ für alle $n \geq 1$.

monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \geq 1$.

monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \geq 1$.

nach oben beschränkt, falls es eine reelle Zahl A gibt, so dass $a_n \leq A$ für alle $n \geq 1$.

nach unten beschränkt, falls es eine reelle Zahl A gibt, so dass $a_n \geq A$ für alle $n \geq 1$.

Definition. Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen. Eine reelle Zahl a heißt *Grenzwert der Folge* $(a_n)_{n \geq 1}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \geq 1 \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Äquivalente Formulierungen (Reduktion der Quantoren):

Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen fast alle Glieder der Folge in $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle genügend großen n .

Für jedes $\varepsilon > 0$ hat die Ungleichung $|a_n - a| \geq \varepsilon$ nur endlich viele Lösungen in n .

Für hinreichend großes n ist a_n eine beliebig genaue Approximation von a .

Man schreibt

$$(a_n)_{n \geq 1} \rightarrow a \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $(a_n)_{n \geq 1} \rightarrow a$. Andernfalls heißt die Folge *divergent*.

Definition. Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen heißt *bestimmt divergent gegen* ∞ , wenn gilt:

$$\forall M > 0 \exists n_0 \geq 1 \forall n \geq n_0 : a_n > M.$$

Äquivalente Formulierungen unter Reduktion der Quantoren:

Für jedes $M > 0$ ist $a_n > M$ für alle genügend großen n .

Für jedes $M > 0$ hat die Ungleichung $a_n \leq M$ nur endlich viele Lösungen in n .

Für hinreichend großes n wird a_n beliebig gross.

Man schreibt

$$(a_n)_{n \geq 1} \rightarrow \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Rechenregeln für konvergente Folgen reeller Zahlen.

- i) Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.
- ii) Jede konvergente Folge ist nach oben und nach unten beschränkt.
- iii) Für jedes $k \geq 1$ gilt: Genau dann ist $(a_n)_{n \geq 1} \rightarrow a$, wenn $(a_n)_{n \geq k} \rightarrow a$ (für die Konvergenz kommt es auf Anfangsstücke nicht an").
- iv) Aus $(a_n)_{n \geq 1} \rightarrow a$ folgt $(|a_n|)_{n \geq 1} \rightarrow |a|$. Genau dann ist $(a_n)_{n \geq 1} \rightarrow 0$, wenn $(|a_n|)_{n \geq 1} \rightarrow 0$.
- v) Aus $(a_n)_{n \geq 1} \rightarrow a$ und $(b_n)_{n \geq 1} \rightarrow b$ folgt $(a_n \pm b_n)_{n \geq 1} \rightarrow a \pm b$, $(a_n b_n)_{n \geq 1} \rightarrow ab$ und $(a_n/b_n)_{n \geq 1} \rightarrow a/b$.
- vi) Aus $(a_n)_{n \geq 1} \rightarrow a$ und $a \neq 0$ folgt: Es gibt ein $k \geq 1$, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq k$, und dann ist $(a_n^{-1})_{n \geq k} \rightarrow a^{-1}$.
- vii) Aus $(a_n)_{n \geq 1} \rightarrow a$, $(b_n)_{n \geq 1} \rightarrow b$ und $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq 1$ folgt $a \leq b$. Insbesondere: Aus $(a_n)_{n \geq 1} \rightarrow a$ und $a_n \leq b$ für alle $n \geq 1$ folgt $a \leq b$.
- viii) Aus $(a_n)_{n \geq 1} \rightarrow \infty$ folgt: Es gibt ein $k \geq 1$, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq k$, und dann ist $(a_n^{-1})_{n \geq k} \rightarrow 0$.
- ix) Ist $a_n > 0$ für alle $n \geq 1$ und $(a_n)_{n \geq 1} \rightarrow 0$, so folgt $(a_n^{-1})_{n \geq 1} \rightarrow \infty$.

Hauptkriterium für monotone Folgen. Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist konvergent. Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge ist konvergent.

Bemerkungen. Eine konvergente Folge braucht nicht monoton zu sein. Eine monotone Folge braucht nicht konvergent zu sein. Eine beschränkte Folge braucht nicht konvergent zu sein. Eine bestimmt gegen ∞ divergierende Folge ist nach unten, aber nicht nach oben beschränkt und braucht nicht monoton zu sein.

Interessante Folgen und deren Eigenschaften.

1) Ist $a \in \mathbb{R}$ und $|a| < 1$, so folgt $(a^n)_{n \geq 1} \rightarrow 0$ (Beweis: Es genügt, die Behauptung für $0 < a < 1$ zu zeigen; dann ist die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergent; aus $(a^n)_{n \geq 1} \rightarrow c$ folgt $(a^n a)_{n \geq 1} \rightarrow ac$, also $ac = c$ und $c = 0$). Für $a > 1$ folgt $(a^n)_{n \geq 1} \rightarrow \infty$.

2) Arithmetische Folgen. Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen heißt *arithmetische Folge* (mit Differenz $d \in \mathbb{R}$), wenn $a_{n+1} = a_n + d$ für alle $n \geq 1$ ("die Differenz aufeinanderfolgender Glieder ist konstant"). Explizit: $a_n = a_1 + (n-1)d$ für alle $n \geq 1$. Summenformel:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n = na_1 + \frac{dn(n-1)}{2}$$

(Beweis rekursiv oder mit "Gauss-Trick"). Im Falle $d > 0$ ist $(a_n)_{n \geq 0} \rightarrow \infty$.

3) Geometrische Folgen. Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ von Null verschiedener reeller Zahlen heißt *geometrische Folge* (mit Quotient $q \in \mathbb{R}$), wenn $a_{n+1} = a_n q$ für alle $n \geq 1$ ("der Quotient aufeinanderfolgender Glieder ist konstant"). Explizit: $a_n = a_1 q^{n-1}$ für alle $n \geq 1$. Summenformel:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_1 q \dots + a_1 q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

(Beweis rekursiv oder durch "Ausmultiplizieren"). Im Falle $|q| < 1$ folgt

$$(a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1})_{n \geq 1} \rightarrow \frac{a_1}{1 - q};$$

man schreibt diesen Sachverhalt auch in Form einer "unendlichen Summe"

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1 - q},$$

die man geometrische Reihe nennt.

4) Dezimalzahlen. Sei $z = a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots$ eine Dezimalzahl, und seien $z_e = a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_e \in \mathbb{Q}$ ihre dezimalen Näherungen. Wegen $|z - z_e| \leq 10^{-e}$ folgt $(z_e)_{e \geq 1} \rightarrow z$. Schreibweise als unendliche Summe

$$z = \sum_{i=0}^d 10^{d-i} a_{d-i} + \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} b_i.$$

Summation periodischer Dezimalbrüche als geometrische Reihe:

$$\begin{aligned} 0,\overline{b_1b_2\dots b_l} &= (10^{-1}b_1 + 10^{-2}b_2 + \dots + 10^{-l}b_l)(1 + 10^{-l} + 10^{-2l} + \dots) \\ &= \frac{10^{l-1}b_1 + 10^{l-2}b_2 + \dots + b_l}{10^l} \frac{1}{1 - 10^{-l}} \\ &= \frac{10^{l-1}b_1 + 10^{l-2}b_2 + \dots + b_l}{10^l - 1}. \end{aligned}$$

5) Geometrie der Schneeflockenkurve.

6) Berechnung von π durch Archimedes und durch Cusanus.

7) Heron'sches Verfahren zur Berechnung von Wurzeln. Sei $k \geq 2$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left[(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right] \quad \text{für } n \geq 0.$$

Dann folgt: $(x_n)_{n \geq 1} \rightarrow \sqrt[k]{a}$.

Beweisidee: Aus der AGM-Ungleichung folgt $x_{n+1} \geq \sqrt[k]{a}$ für alle $n \geq 0$, und daraus $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \geq 1$. Nach dem Hauptkriterium für monotone Folgen ist $(x_n)_{n \geq 1}$ konvergent, $(x_n)_{n \geq 1} \rightarrow x$, und aus

$$x = \frac{1}{k} \left[(k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}} \right]$$

folgt $x = \sqrt[k]{a}$ (Details für $k = 2$).

8) Definition und Berechnung von e . Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$I_n = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right].$$

Dann ist $(I_n)_{n \geq 1}$ eine Intervallschachtelung mit innerem Punkt e . Insbesondere ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

und

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{e}.$$

3.5 Allgemeine Potenzen

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten. Sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann definiert man

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n; \quad a^0 = 1,$$

und falls $a \neq 0$,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Man kann a^n für $n \in \mathbb{N}_0$ auch rekursiv definieren durch $a^0 = 1$ und $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Potenzen mit rationalen Exponenten. Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Dann definiert man

$$a^x = \sqrt[q]{a^p}.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Bruchdarstellung von x : Ist nämlich

$$x = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \quad \text{mit } p, p' \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad q, q' \in \mathbb{N},$$

so folgt $pq' = p'q$, also (wegen $a > 0$)

$$\begin{aligned} (\sqrt[q]{a^p})^{qq'} &= \left[(\sqrt[q]{a^p})^q \right]^{q'} = (a^p)^{q'} = a^{pq'} = a^{p'q} = (a^{p'})^q = \left[(\sqrt[q']{a^{p'}})^{q'} \right]^q \\ &= (\sqrt[q']{a^{p'}})^{qq'}, \end{aligned}$$

und daher

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}.$$

Potenzen mit reellen Exponenten. Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in \mathbb{R}$. Ist dann $(x_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in \mathbb{Q} mit $(x_n)_{n \geq 0} \rightarrow x$, so ist auch die Folge $(a^{x_n})_{n \geq 0}$ konvergent, und der Grenzwert hängt nur von x , aber nicht von der Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ ab. Man definiert

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}.$$

Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x, y \in \mathbb{R}$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad \text{und} \quad a^x b^x = (ab)^x.$$

Die Beweise in allen Details sind langwierig, aber nicht schwierig. Die Rechenregeln sollten automatisiert werden.

Stetigkeitssatz für Potenzen. Seien $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $x \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{>0}$ mit $(a_n)_{n \geq 0} \rightarrow a$ und $(x_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in \mathbb{R} mit $(x_n)_{n \geq 0} \rightarrow x$. Dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{x_n} = a^x.$$

Potenzen von e .

i) Sei $(x_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $(x_n)_{n \geq 0} \rightarrow 0$. Dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} = e.$$

ii) Sei $p \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^p.$$

3.6 Der Funktionsbegriff. Stetigkeit und Grenzwerte

Der Funktionsbegriff der Mathematik hat zwei Aspekte, einen funktionalen und einen relationalen. Jede präzise Definition hat einen Verlust von Aspekten zur Folge (R. Fischer). Beide Konzepte können aber Grundlage für den Unterricht sein. Das wird im Folgenden genau ausgeführt.

a. Funktionales Konzept. Seien A, B nicht-leere Mengen. Eine *Abbildung von A nach B* oder eine *auf A definierte Funktion mit Werten in B* ist eine Vorschrift, die jedem Element von A ein eindeutig bestimmtes Element von B zuordnet. Wird einem Element $x \in A$ mittels der Vorschrift f das Element $y \in B$ zugeordnet, so schreibt man $y = f(x)$. Die Abbildung notiert man in der Form

$$f: \begin{cases} A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

oder einfach $f: A \rightarrow B$, wobei man natürlich genau angeben muss, was f mit den Elementen von A macht. Man nennt $A = \mathcal{D}_f$ den *Definitionsbereich*, B den *Wertevorrat*, $\mathcal{W}_f = \{f(x) \mid x \in A\} \subset B$ den *Wertebereich* und die Menge

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$$

den *Graphen von f* .

Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ heißt *injektiv*, wenn für alle $x, y \in A$ gilt: Aus $x \neq y$ folgt $f(x) \neq f(y)$. Ist f injektiv, so gibt es genau eine Abbildung $f^{-1}: \mathcal{W}_f \rightarrow A$, so dass für alle $x \in A$ und $y \in \mathcal{W}(f)$ gilt: $f^{-1}(y) = x$ genau dann, wenn $f(x) = y$. Man nennt f^{-1} die *Umkehrabbildung* von f .

b. Relationales Konzept. Eine *Relation* zwischen zwei Mengen A und B ist eine nicht-leere Teilmenge $F \subset A \times B$. Man nennt

$$\mathcal{D}(F) = \{x \in A \mid \text{es gibt ein } y \in B \text{ mit } (x, y) \in F\}$$

den *Definitionsbereich* und

$$\mathcal{W}(F) = \{y \in B \mid \text{es gibt ein } x \in A \text{ mit } (x, y) \in F\}$$

den Wertebereich von F . Für eine Relation F definiert man die inverse Relation durch

$$F^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid (y, x) \in F\}.$$

Es ist $\mathcal{D}(F^{-1}) = \mathcal{W}(F)$ und $\mathcal{W}(F^{-1}) = \mathcal{D}(F)$.

Eine Relation F heißt *Funktion*, wenn es zu jedem $x \in \mathcal{D}(F)$ genau ein $y \in \mathcal{W}(F)$ gibt mit $(x, y) \in F$. Eine Funktion F heißt *injektiv*, wenn F^{-1} eine Funktion ist. Dann heißt F^{-1} die *Umkehrfunktion* von F .

c. Zusammenhang der beiden Konzepte. Ist $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung, so ist $\mathcal{G}_f \subset A \times B$ eine Funktion. Genau dann ist f injektiv, wenn \mathcal{G}_f injektiv ist, und dann ist

$$\mathcal{G}_{f^{-1}} = \mathcal{G}_f^{-1}.$$

Ist umgekehrt F eine Funktion, so gibt es genau eine Abbildung $f: \mathcal{D}(F) \rightarrow B$ mit $\mathcal{G}_f = F$; sie ist gegeben durch die Zuordnungsvorschrift $f(x) = y$ genau dann, wenn $(x, y) \in F$.

Wir werden im Folgenden nicht zwischen Abbildungen und Funktionen unterscheiden und je nach Zweckmäßigkeit das eine oder andere Konzept verwenden. Für die Beschreibung funktionaler Zusammenhänge durch "Funktionsterme" ist der Abbildungsbegriff günstiger. Auch die Verknüpfung von Abbildungen ist im funktionalen Konzept einfacher. Der Begriff der Umkehrfunktion ist im relationalen Konzept leichter verständlich, da er hier gemeinsam mit der Injektivität erklärt wird.

Reelle Funktionen. Eine *reelle Relation* ist eine Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^2$. Geometrisch ist dann $\mathcal{D}(F)$ die Projektion von F auf die x -Achse und $\mathcal{W}(F)$ die Projektion von F auf die y -Achse. F^{-1} entsteht durch Spiegelung von F an der Geraden (mit der Gleichung) $y = x$. F ist genau dann eine Funktion, wenn jede Parallele zur x -Achse F in höchstens einem Punkt schneidet.

Eine *reelle Funktion* ist eine Abbildung f mit $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ und $\mathcal{W}_f \subset \mathbb{R}$ (Schreibweise: $f: \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$). Die Beschreibung einer reellen Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ kann durch eine Wertetabelle (vollständig nur bei endlichem Definitionsbereich A), eine Rechenvorschrift (Funktionsterm), durch eine implizite Funktionsgleichung oder durch ihren Graphen

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset \mathbb{R}^2$$

erfolgen.

Üblich ist die Redeweise "die Funktion $y = f(x)$ ", ihr Definitionsbereich ist dann die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $f(x)$ definiert ist, und $\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$. Die Gleichung $f(x) - y = 0$ oder jede dazu äquivalente Gleichung der Form $g(x, y) = 0$ heißt Funktionsgleichung.

Beispiele:

- 1) $y = x^2 + 1$ ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- 2) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ ist die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Eine definierende Funktionsgleichung ist $x = (x^2 - 1)y$.
- 3) $y = \sqrt{2 - x^2}$ ist die Funktion $f: [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ für alle $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Die Gleichung $y^2 = 2 - x^2$ definiert zwei Funktionen,

nämlich $y = \sqrt{2-x^2}$ und $y = -\sqrt{2-x^2}$. Man muss also bei der Definition von Funktionen mittels Funktionsgleichungen vorsichtig sein (Hauptsatz über implizite Funktionen).

Affin lineare Funktion. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *affin-linear*, wenn es $k, d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) = kx + d$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Andere Schreibweise:

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = kx + d. \end{cases}$$

Funktionsterm: $f(x) = kx + d$. Man sagt, "die lineare Funktion $y = kx + d$ ". Jede Gleichung der Form $ax + by = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$ definiert eine lineare Funktion.

Kennzeichnungssatz für affin-lineare Funktionen. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann affin-linear, wenn es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \text{mit } x_1 \neq x_2$$

(die Differenz der Funktionswerte ist proportional zur Differenz der Argumente).

Graphensatz für affin-lineare Funktionen. Eine Funktion ist genau dann affin-linear, wenn ihr Graph eine Gerade ist.

Der Beweis dieses Satzes hängt davon ab, welchen Begriff man von einer Geraden hat. In der Schulmathematik ist ein anschaulicher Geradenbegriff aus der Elementargeometrie vorhanden. Der Beweis des Satzes erfolgt mit Hilfe des Strahlensatzes (er ist gewissermaßen sogar damit äquivalent).

Man beachte jedoch: Eine Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann der Graph einer (affin-linearen) Funktion, wenn sie nicht parallel zur y -Achse ist.

Strahlensatz der Elementargeometrie. In einer Ebene \mathcal{E} seien s, s' zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen, $s \neq s'$, \mathcal{H} sei die durch s bestimmte Halbebene mit $s' \subset \mathcal{H}$. Seien $A, B \in s$, $A \neq B$, $A' \in s'$, $g = (AA')$, $h \parallel g$ mit $B \in h$ und $B' \in h$.

i) Ist $B' \in s'$, so folgt

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SB'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}.$$

ii) Ist $B' \in \mathcal{H}$ und

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}},$$

so folgt $B' \in h$.

Monotonie. Eine reelle Funktion f heißt

monoton wachsend, falls für alle $x, y \in \mathcal{D}_f$ gilt: Aus $x < y$ folgt $f(x) \leq f(y)$;

monoton fallend, falls für alle $x, y \in \mathcal{D}_f$ gilt: Aus $x < y$ folgt $f(x) \geq f(y)$;

streng monoton wachsend, falls für alle $x, y \in \mathcal{D}_f$ gilt: Aus $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$;

streng monoton fallend, falls für alle $x, y \in \mathcal{D}_f$ gilt: Aus $x < y$ folgt $f(x) > f(y)$;

Satz. Ist $f: \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton (wachsend bzw. fallend), so ist f injektiv, und $f^{-1}: \mathcal{W}_f \rightarrow \mathbb{R}$ ist ebenfalls streng monoton (wachsend bzw. fallend).

Definition. Eine reelle Funktion f heißt *stetig* in einem Punkt $a \in \mathcal{D}_f$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{D}_f: |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

(äquivalent: Für jede Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ in \mathcal{D}_f gilt: Aus $(x_n)_{n \geq 0} \rightarrow a$ folgt $(f(x_n))_{n \geq 0} \rightarrow f(a)$).

Anderfalls heißt f *unstetig in a* oder a eine *Unstetigkeitsstelle von f* . f heißt *stetig* oder eine *stetige Funktion*, wenn f keine Unstetigkeitsstellen besitzt.

Anschauliche Deutung: f ist stetig in a , wenn bei hinreichend guter Annäherung von x an a der Funktionswert $f(x)$ beliebig nahe bei $f(a)$ liegt. Numerische Anwendung: Lässt man x die dezimalen Näherungen von a durchlaufen, so kommt $f(x)$ dem Funktionswert $f(a)$ beliebig nahe.

Qualitative Beschreibung von Unstetigkeitsstellen.

- 1) Sprungstellen. Beispiel: Jedes $a \in \mathbb{Z}$ bei $f(x) = \max\{g \in \mathbb{Z} \mid g \leq x\}$.
- 2) Oszillationsstellen. Beispiel: $a = 0$ bei

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

- 3) Hebbare Unstetigkeitsstellen. Beispiel: $a = 0$ bei

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

- 4) Isolierte Funktionswerte bei Unendlichkeitsstellen. Beispiel: $a = 0$ bei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Didaktische Bemerkungen. Der Stetigkeitsbegriff in seiner vollen Schärfe ist abstrakt und unanschaulich. Stetigkeit ist ein theoretisches Konzept zur Beschreibung von Eigenschaften von Funktionen (im Gegensatz zu den Konzepten von Differenzierbarkeit oder Integrierbarkeit, welche starke algorithmische Aspekte haben). Anzustreben ist ein qualitativ geometrisches Verständnis der Eigenschaften von Stetigkeit und Unstetigkeit.

Hauptsatz über stetige Funktionen auf Intervallen. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f eine stetige Funktion mit $\mathcal{D}_f \supset I$.

- i) (Satz von der Intervalltreue) $f(I)$ ist ein Intervall.
- ii) (Kompaktheitssatz) Ist I abgeschlossen und beschränkt, so ist auch $f(I)$ abgeschlossen und beschränkt.
- iii) (Stetigkeit der Umkehrfunktion) Genau dann ist f injektiv, wenn f streng monoton ist. Dann ist auch f^{-1} stetig.

Anschauliche Konsequenzen. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f eine stetige Funktion mit $\mathcal{D}_f \supset I$.

1) Zwischenwertsatz: Sind $a, b \in I$ und ist z eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so gibt es ein x zwischen a und b mit $f(x) = z$.

2) Nullstellensatz: Sind $a, b \in I$ und ist $f(a)f(b) < 0$, so gibt es ein x zwischen a und b mit $f(x) = 0$. Durch fortgesetzte Intervallhalbierung kann man mittels dieser Eigenschaft eine Intervallschachtelung mit x als innerem Punkt konstruieren.

3) Satz vom Maximum und vom Minimum: Eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall hat ein Maximum und ein Minimum.

Funktionsgrenzwerte. Sei f eine reelle Funktion, und seien $a, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Man sagt, f strebt für $x \rightarrow a$ gegen c ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c,$$

wenn für jede Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ in $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ gilt: Aus $(x_n)_{n \geq 0} \rightarrow a$ folgt $(f(x_n))_{n \geq 0} \rightarrow c$.

Für $a \in \mathbb{R}$ sind auch die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = c \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = c$$

zu erklären.

Hier wurde die Folgendefinition gewählt, da nur mit ihr eigentliche und uneigentliche Grenzwerte einheitlich definiert werden können. Auch bei dieser Definition ist in erster Linie ein qualitatives Verständnis anzustreben. Insbesondere sollen die folgenden Aussagen geometrisch verstanden werden:

- 1) Unbeschränktes Wachstum (nach oben bzw. nach unten).
- 2) Existenz einer sekrechten Asymptote von \mathcal{G}_f in einem Punkte $a \in \mathbb{R}$ oder einer waagrechten Asymptote an \mathcal{G}_f für $x \rightarrow \pm\infty$,
- 3) Die Gerade $y = kx + d$ ist Asymptote an \mathcal{G}_f für $x \rightarrow \pm\infty$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (cx + d)] = 0.$$

4) Definitionslücken. Eine reelle Zahl a heißt *Definitionslücke* der reellen Funktion f , wenn gilt: $a \notin \mathcal{D}_f$, und es gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\} \subset \mathcal{D}_f$.

Eine Definitionslücke a heißt *Unendlichkeitsstelle*, wenn \mathcal{G}_f in a eine senkrechte Asymptote besitzt.

Eine Definitionslücke a heißt *stetig schließbar* oder f *stetig ergänzbar in a* , wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert (äquivalent: Es gibt eine in a stetige Funktion $\bar{f}: \mathcal{D}_f \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\bar{f}|_{\mathcal{D}_f} = f$).

Didaktische Bemerkungen. Die Begriffe des Folngengrenzwertes, des Funktionsgrenzwertes und der Stetigkeit weisen große formale Analogien auf. Die Behandlung im Unterricht sollte in mehreren zeitlich getrennten Etappen erfolgen, um eine möglichst große Vertiefung zu erreichen.

Potenzfunktionen. Die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{Q}$ ist zu diskutieren (Definitionsbereich, Gestalt des Graphen, Extrema, Nullstellen, Grenzwerte, Umkehrfunktion).

Exponentialfunktionen. Sei $a \in \mathbb{R}_{>1}$. Die Funktion

$${}^a\text{exp}: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto a^x \end{cases}$$

heißt *Exponentialfunktion zur Basis a* . Sie ist streng monoton wachsend, stetig, und $\mathcal{W}({}^a\text{exp}) = \mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion heißt *Logarithmusfunktion zur Basis a* ,

$${}^a\text{log} = ({}^a\text{exp})^{-1}: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sie ebenfalls streng monoton wachsend und stetig. Man nennt $\ln = {}^e\text{log}$ die *natürliche Logarithmusfunktion* und $\log = {}^{10}\text{log}$ die *Brigg'sche Logarithmusfunktion*.

Rechenregeln für Logarithmen. Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>1}$, $x \in \mathbb{R}$, $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

- i) Genau dann ist $a^x = y$, wenn $x = {}^a\text{log } y$.
- ii) ${}^a\text{log}(y_1 y_2) = {}^a\text{log } y_1 + {}^a\text{log } y_2$.
- iii) ${}^a\text{log}(y^x) = x \cdot {}^a\text{log } y$.
- iv) Ist $z = z_0 \cdot 10^e$ mit $z_0 \in [1, 10)$ und $e \in \mathbb{Z}$, so folgt $\log z = \log z_0 + e \in [e, e + 1)$ (der dekadische Logarithmus misst den dekadischen Exponenten).
- v) ${}^a\text{log } a = 1$, ${}^a\text{log } 1 = 0$; ${}^a\text{log } y > 1$, falls $y > a$; $0 < {}^a\text{log } y < 1$, falls $1 < y < a$; ${}^a\text{log } y < 0$, falls $y < 1$.
- vi) ${}^b\text{log } y = {}^a\text{log } y \cdot {}^b\text{log } a$, insbesondere $\ln y = \log y \cdot \ln 10$ und $\log y = \ln y \cdot \log e$.

Natürlichkeit von \ln . Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Wachstumsverhalten. Seien $b, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{({}^a\text{log } x)^b}{x^\varepsilon} = 0.$$

Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede noch so hohe Potenz von x . Jede noch so hohe Potenz des Logarithmus wächst langsamer als jede noch so kleine Potenz von x .

3.8 Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Algebraische Theorie. Sei R ein Integritätsbereich mit unendlich vielen Elementen, $n \in \mathbb{N}$ und $R[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring in n Unbestimmten X_1, \dots, X_n . Dann hat jedes $P \in R[X_1, \dots, X_n]$ eine eindeutige Darstellung

$$P = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \geq 0} a_{\nu_1, \dots, \nu_n} X_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot X_n^{\nu_n}$$

mit $a_{\nu_1, \dots, \nu_n} \in R$, und $a_{\nu_1, \dots, \nu_n} = 0$ für fast alle (ν_1, \dots, ν_n) (inhaltlich: P ist eine endliche Linearkombination von Potenzprodukten aus X_1, \dots, X_n mit Koeffizienten in R). P definiert eine *polynomiale Abbildung* oder *Polynomfunktion* in n Variablen

$$\tilde{P}: \begin{cases} R^n & \rightarrow R \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto P(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

wobei

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \geq 0} a_{\nu_1, \dots, \nu_n} X_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot X_n^{\nu_n} \in R.$$

P ist durch \tilde{P} eindeutig bestimmt: Aus $P_1, P_2 \in R[X_1, \dots, X_n]$ und $\tilde{P}_1 = \tilde{P}_2$ folgt $P_1 = P_2$.

Schulmathematisch: $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , $\{X_1, \dots, X_n\} = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$. Polynome sind endliche Summen von Potenzprodukten aus den "Unbestimmten" X_1, \dots, X_n . $R[X_1, \dots, X_n]$ ist der Ring der *ganzen Terme mit Koeffizienten in R* . Ist $P \in R[X_1, \dots, X_n]$, so ist \tilde{P} die Funktion mit definierendem Funktionsterm P . Die "Unbestimmten" haben zunächst rein formalen Charakter, man kann für sie aber "Zahlen" einsetzen.

Eigenschaften des Polynomringes. Ist R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K , so ist $R[X_1, \dots, X_n]$ ein Integritätsbereich, $R[X_1, \dots, X_n] \subset K[X_1, \dots, X_n]$, und diese beiden Integritätsbereiche haben denselben Quotientenkörper. Er wird mit $K(X_1, \dots, X_n)$ bezeichnet und heißt *rationaler Funktionenkörper in X_1, \dots, X_n über K* .

Für einen Integritätsbereich A sein A^\times die Gruppe der invertierbaren Elemente von A (also $Z^\times = \{\pm 1\}$ und $K^\times = K \setminus \{0\}$ für einen Körper K). A heißt *faktoriell* oder ein *Bereich mit eindeutiger Primzerlegung*, wenn jedes $a \in A \setminus (A^\times \cup \{0\})$ ein Produkt irreduzibler Elemente von A ist, und diese Produktdarstellung eindeutig ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren und Faktoren aus A^\times . Ist A faktoriell, so existieren in A (bis auf Faktoren aus A^\times eindeutig bestimmte) ggT und kgV, und für den Quotientenkörper K von A gilt der *Satz von der reduzierten Bruchdarstellung*: Jedes $h \in K$ hat eine (bis auf Faktoren aus A^\times eindeutige Darstellung $h = \frac{f}{g}$ mit $f, g \in A$, $g \neq 0$, und $\text{ggT}(f, g) = 1$.

\mathbb{Z} und jeder Körper sind faktoriell.

Satz von Gauß. Ist R ein faktorieller Integritätsbereich, so ist $R[X_1, \dots, X_n]$ faktoriell.

Sei K ein Körper. Dann hat jedes $h \in K(X_1, \dots, X_n)$ eine Darstellung

$$(*) \quad h = \frac{P}{Q} \quad \text{mit zueinander teilerfremden } P, Q \in R[X_1, \dots, X_n],$$

und P und Q sind bis auf Faktoren aus R^\times eindeutig bestimmt. Man nennt $(*)$ die *reduzierte Bruchdarstellung* von h ,

$$\text{Pol}(h) = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid Q(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

die Menge der *Polstellen* von h (hängt nicht von Q ab!), und die Funktion

$$\tilde{h}: K^n \setminus \text{Pol}(h) \rightarrow K, \quad \text{definiert durch } h(x_1, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{Q(x_1, \dots, x_n)},$$

heißt die durch h definierte rationale Abbildung oder (konkrete) rationale Funktion. Die Menge $K^n \setminus \text{Pol}(h)$ heißt *natürlicher Definitionsbereich* von h .

Schulmathematisch: $K(X_1, \dots, X_n)$ ist der Körper der Bruchterme. Der Körper $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ ist Quotientenkörper des faktoriellen Bereichs $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$. Insbesondere hat jeder (ganze) Term eine (bis auf das Vorzeichen) eindeutige Darstellung als Produkt irreduzibler Terme, jeder Bruchterm besitzt eine (bis auf das Vorzeichen) eindeutig bestimmte reduzierte Bruchdarstellung, und jeder Bruchterm definiert eine rationale Abbildung (Definitionsbereich sind die Nicht-Polstellen des Nenners). Beachte: Nicht der Bruchterm hat einen Definitionsbereich, sondern nur die durch ihn definierte rationale Abbildung.

Bedeutung der Buchstaben in der elementaren Algebra. Die Termini "Variable", "Unbestimmte", "Unbekannte" sind unscharfe Begriffe, welche Assoziationen wecken sollen, aber in jedem konkreten Einzelfall ihrer Verwendung präzisiert werden können. Grundsätzlich trete Buchstaben neben Zahlen in der Schulmathematik in der folgenden vier unterschiedlichen Verwendungsweisen auf.

1) Namen ("Platzhalter") für konkrete Zahlen (mathematisch: "Sei a eine rationale Zahl").

2) Unbekannte: "Gesucht sind alle x mit ...". Meist wird noch eine Menge ("Grundmenge") G angegeben wird, in der x zu suchen ist.

3) Variable: In der funktionalen Beschreibung von Abbildungen; "unabhängige" und "abhängige" Veränderliche. Die Variable "durchläuft" alle Elemente des Definitionsbereichs.

4) Unbestimmte im Sinne der Algebra (über \mathbb{Q} oder \mathbb{R}): Rechnen mit Termen und insbesondere mit Bruchtermen.

Poynome in einer Variablen. R sei ein Integritätsbereich, $R[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten X über R . Dann hat jedes $f \in R[X] \setminus \{0\}$ eine eindeutige Darstellung

$$f = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

mit $d \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ und $a_d \neq 0$. Man nennt $d = \text{gr}(f)$ den *Grad*, a_0, \dots, a_d die *Koeffizienten* und a_d den *führenden Koeffizienten* des Polynoms f . f heißt *normiert*, wenn $a_d = 1$. Ein Element $z \in R$ heißt *Nullstelle von f* , wenn $f(z) = 0$. f heißt *nullstellenfrei*, wenn f keine Nullstellen besitzt.

Hauptsatz über Polynome einer Variablen. Sei R ein Integritätsbereich.

- i) (Satz von der Division mit Rest) Seien $f, g \in R[X]$, $g \neq 0$, und sei der führende Koeffizient von g in R^\times . Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in R[X]$ mit $f = gy + r$ und entweder $r = 0$ oder $\text{gr}(r) < \text{gr}(g)$.
- ii) (Abspaltungssatz) Sei $f \in R[X]$ und $a \in R$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmtes Polynom $q \in R[X]$ und $c \in R$, so dass $f(X) = g(X)(X - a) + c$. Genau dann ist $f(a) = 0$, wenn $c = 0$.
- iii) (Zerlegungssatz) Sei R ein Körper. Dann hat jedes $f \in R[X] \setminus R$ eine eindeutige Darstellung

$$f = cf_1 \cdot \dots \cdot f_n$$

mit $c \in R^\times$ und irreduziblen normierten Polynomen f_1, \dots, f_n .

- iv) (Nullstellensatz) Ist $f \in R[X] \setminus \{0\}$, so hat f höchstens $\text{gr}(f)$ Nullstellen. Sind $z_1, \dots, z_k \in R$ die verschiedenen Nullstellen von f , so hat f eine eindeutige Darstellung

$$f = (X - z_1)^{e_1} \cdot \dots \cdot (X - z_k)^{e_k} g$$

mit Exponenten $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{N}$ und einem nullstellenfreien Polynom $g \in R[X]$.

Polynome mit reellen und komplexen Koeffizienten.

- i) (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes $f \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$f = c(X - z_1) \cdot \dots \cdot (X - z_k)$$

mit $c \in \mathbb{C}^\times$, $k = \text{gr}(f) \in \mathbb{N}_0$ und $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$.

- ii) (Reeller Fundamentalsatz der Algebra) Jedes $f \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$f = c(X - z_1) \cdot \dots \cdot (X - z_r)(X^2 + p_1X + q_1) \cdot \dots \cdot (X^2 + p_sX + q_s)$$

mit $c \in \mathbb{R}^\times$, $r, s \in \mathbb{N}_0$, $r + 2s = \text{gr}(f)$, $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{R}$, und $p_j, q_j \in \mathbb{R}$, so dass $p_j^2 - 4q_j^2 < 0$ für alle $j \in [1, s]$.

Insbesondere hat jedes reelle Polynom ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle.

Rationale Funktionen einer reellen Variablen. Eine reelle Funktion f heißt *rationale Funktion*, wenn f Quotient zweier Polynomfunktionen ist. Dann hat f eine eindeutige Darstellung in der Form $f = \frac{P}{Q}$ mit teilerfremden Polynomen

$P, Q \in \mathbb{R}[X]$, so dass Q den führenden Koeffizienten 1 hat. Ist dann $E \subset \mathbb{R}$ die (endliche) Menge der Nullstellen von Q , so ist $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus E$. Sei nun

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{und} \quad Q(x) = x^e + b_{e-1} x^{e-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

mit $d \in \mathbb{N}_0$, $e \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_d, b_0, \dots, b_{e-1} \in \mathbb{R}$ und $a_d > 0$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } d > e, \\ a_d, & \text{falls } d = e, \\ 0, & \text{falls } d < e. \end{cases}$$

Im Falle $d = e + 1$ ist die Gerade $y = a_d(x - b_{e-1})$ eine Asymptote für $x \rightarrow \infty$. Was passiert im Falle $a_d \leq 0$?

3.9 Differentialrechnung und Extremwertaufgaben

Definition. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in J$. Man sagt, f ist *differenzierbar* in a , wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

in \mathbb{R} existiert. Man nennt diesen Grenzwert die *Ableitung von f im Punkte a* und bezeichnet ihn mit

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}.$$

Geometrische Deutung. Ist $z \in J$, so hat die Gerade durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(z, f(z))$ die Gleichung

$$y = f(a) + \frac{f(z) - f(a)}{z - a} (x - a).$$

Sie ist eine Sekante an den Graphen von f . Geometrisch bedeutet die Differenzierbarkeit in a die Existenz einer eindeutig bestimmten Tangente an den Graphen von f im Punkte $(a, f(a))$, gegen welche sich die Sekante bei Annäherung von z an a bewegt. Die Gleichung der Tangente ist dann

$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

und $f'(a)$ ist ihr Steigungswinkel. Ist a ein Randpunkt des Intervalls J , so handelt es sich bloß um Halbtangenten.

Satz von der linearen Approximation. Es ist

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)] = (x - a)M(x, a) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow a} M(x, a) = 0.$$

Die lineare Funktion $f(a) + f'(a)(x - a)$ approximiert die Funktion von höherer als erster Ordnung.

Globale Differenzierbarkeit. Sei J ein Intervall und $f: J \rightarrow \mathbb{R}$. Man sagt, f ist *differenzierbar in J* , wenn f in jedem Punkt von J differenzierbar ist. Man nennt dann die Funktion $f': J \rightarrow \mathbb{R}$ die *Ableitung von f* . Für alle $x \in J$ ist dann

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in J}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Allgemeine Ableitungsregeln. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

1) Seien $f, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$, fg und cf differenzierbar, und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad (cf)'(x) = cf'(x).$$

2) Seien $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: f(J) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f: J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und es ist $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ (Kettenregel).

3) Sei $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f injektiv, $f^{-1}: f(J) \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ableitungsregeln für spezielle Funktionen.

1) $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nhx^{n-1} + h^2[\dots] - x^n}{h} = nx^{n-1}.$$

2) $f(x) = x^{-1}$ ($x \neq 0$).

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{-1} - x^{-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} = -x^{-2}.$$

3) $f(x) = x^{-n} = (x^{-1})^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Mit der Kettenregel folgt

$$f'(x) = n(x^{-1})^{n-1}(-x^{-2}) = -nx^{-n-1}.$$

4) $f(x) = {}^a\exp$ mit $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a,$$

insbesondere $(e^x)' = e^x$

5) $f(x) = {}^a\log(x) = ({}^a\exp)^{-1}(x)$ (für $a, x \in \mathbb{R}_{>0}$). Für $x = {}^a\exp(z)$ ist

$$({}^a\log)'(x) = \frac{1}{{}^a\exp'(z)} = \frac{1}{{}^a\exp(z) \ln(a)} = \frac{1}{x \ln(a)},$$

insbesondere $\ln'(x) = x^{-1}$.

6) $f(x) = x^r = e^{r \ln(x)}$ (für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $r \in \mathbb{R}$).

$$f'(x) = e^{r \ln(x)} \frac{r}{x} = r x^{r-1}.$$

Definition lokaler Extrema. Sei J ein Intervall, $a \in J$ und $f: J \rightarrow \mathbb{R}$. Man sagt, f hat in a ein *lokales Minimum* [ein *lokales Maximum*], wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x) \geq f(a)$ [$f(x) \leq f(a)$] für alle $x \in J \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Man sagt, f hat in a ein *lokales Extremum*, wenn f in a ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum besitzt.

Satz. Sei J ein Intervall, a ein innerer Punkt von J und $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

- i) Genau dann ist f monoton wachsend [fallend], wenn $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$].
- ii) Hat f in a ein lokales Extremum, so ist $f'(a) = 0$.
- iii) Ist $\varepsilon > 0$ und

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x \in (a - \varepsilon, a), \\ > 0 & \text{für } x \in (a, a + \varepsilon), \end{cases}$$

so hat f in a ein lokales Minimum.

- iv) Ist $\varepsilon > 0$ und

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in (a - \varepsilon, a), \\ < 0 & \text{für } x \in (a, a + \varepsilon), \end{cases}$$

so hat f in a ein lokales Maximum.

- v) Ist $\varepsilon > 0$ und ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ oder $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, so hat f in a einen Sattelpunkt.

Didaktische Bemerkungen. Die in der Schultradition übliche Verwendung der 2. Ableitung ist für die Behandlung der meisten Extremwertaufgaben überflüssig (und führt zu schwächeren Resultaten als im obigen Satz).

Kapitel 4. WINKEL, WINKELMESSUNG UND WINKELFUNKTIONEN

4.1 Einige Grundbegriffe der Elementargeometrie

Aufgabe des Geometrieunterrichts in der Unterstufe ist die Erarbeitung geometrischer Grundbegriffe in einer "anschaulichen Ebene" \mathcal{E} . Diese entsteht durch Abstraktion der gegenständlichen Zeichenebene. Grundbegriffe werden aus der anschaulichen Vorstellung durch Abstraktion gewonnen und präzisiert. Jenseits dieser Grundbegriffe ist aber auf saubere Definitionen zu achten. Die in der Oberstufe zu lehrende analytische Geometrie hat dann doppelte Funktion: 1) Verwendung algebraischer Methoden zur Behandlung geometrischer Fragen; 2) Arithmetische Grundlegung der geometrischen Begriffe (unabhängig von der Anschauung).

Voraussetzungen. Allen folgenden Ausführungen liegt eine anschauliche Ebene \mathcal{E} zu Grunde. Die Begriffe *Punkt* und *Gerade* entstehen durch Abstraktion der in dieser Zeichenebene markierten Figuren (O. Perron: "Ein Punkt ist genau das, was sich der intelligente, aber mathematisch unverbildete Mensch darunter vorstellt"; D. Hilbert: Grundlegung durch Axiome). Punkte sind Elemente von \mathcal{E} und Geraden sind ausgezeichnete Teilmengen von \mathcal{E} . Punkte werden mit Großbuchstaben, Geraden mit Kleinbuchstaben bezeichnet. $P \in g$ bedeutet: Der Punkt P liegt auf der Geraden g oder die Gerade g geht durch den Punkt P . Der Einfachheit halber werde die einpunktige Menge $\{P\}$ einfach mit P bezeichnet. $P = g \cap h$ bedeutet dann: P ist der (einzige) Schnittpunkt von g und h .

Außer den Begriffen Punkt, Gerade und Inzidenz werden wir noch den Begriff der Strecke und den Begriff der Kongruenz ohne formale Definition der Anschauung entnehmen. Dabei empfiehlt es sich, den Begriff der Kongruenz auf den Begriff der Bewegung zurückzuführen und letzteren enaktiv zu erarbeiten ("Zwei Figuren sind kongruent oder deckungsgleich, wenn sie durch Bewegungen der Ebene einschließlich Spiegelungen zur Deckung gebracht werden können").

Geraden, Strecken, Halbebenen und Halbgeraden. Zu zwei Punkten $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \neq B$ gibt es genau eine Gerade g mit $\{A, B\} \subset g$; sie heißt *Verbindungsgerade von A und B* und wird mit $g = (AB)$ bezeichnet. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ heißt *kollinear*, wenn es eine Gerade g mit $\mathcal{A} \subset g$ gibt. Man sagt dann auch, die Punkte von \mathcal{A} sind kollinear und nennt g die *Trägergerade* von \mathcal{A} . Enthält \mathcal{A} mindestens zwei Punkte, so ist die Trägergerade von \mathcal{A} eindeutig bestimmt und wird mit (\mathcal{A}) bezeichnet.

Zwei Geraden g und h heißen *parallel*, $g \parallel h$, wenn $g = h$ oder $g \cap h = \emptyset$. Andernfalls haben g und h genau einen Punkt P gemeinsam, $g \cap h = P$; man nennt P den *Schnittpunkt* von g und h . Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P gibt es genau eine Gerade h mit $g \parallel h$ und $P \in h$ ("Euklid'sches Parallelenaxiom").

Eine *Strecke* ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte (einschließlich der Endpunkte). Man bezeichnet die Strecke zwischen A und B mit AB . Es ist $AA = A$ und im Falle $A \neq B$ ist $\{A, B\} \subset AB = BA \subset (AB)$.

Sei g eine Gerade. Man sagt, zwei Punkte $A, B \in \mathcal{E} \setminus g$ *liegen auf derselben Seite von g* , wenn $AB \cap g = \emptyset$. "Auf derselben Seite liegen" ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{E} \setminus g$ mit zwei Äquivalenzklassen \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 . Es ist dann $\mathcal{E} = g \uplus \mathcal{H}_1 \uplus \mathcal{H}_2$. Man nennt \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 die beiden durch g bestimmten (offenen) *Halbebenen* und $\overline{\mathcal{H}_1} = \mathcal{H}_1 \cup g$, $\overline{\mathcal{H}_2} = \mathcal{H}_2 \cup g$ die beiden durch g bestimmten *abgeschlossenen Halbebenen*.

Sei g eine Gerade und $S \in g$. Man sagt, zwei Punkte $A, B \in g \setminus S$ *liegen auf derselben Seite von S* , wenn $P \notin AB$. "Auf derselben Seite liegen" ist eine Äquivalenzrelation auf $g \setminus S$ mit zwei Äquivalenzklassen s_1 und s_2 . Diese heißen die beiden durch S bestimmten oder von S ausgehenden (offenen) *Halbgeraden* oder *Strahlen* auf g . Für $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \neq B$ bezeichne AB^+ die von A ausgehende Halbgerade mit $B \in AB^+$ und mit AB^- die andere. Es ist dann $(AB) = A \uplus AB^+ \uplus AB^-$.

Winkel und Winkelfelder. Sei $S \in \mathcal{E}$, und seien s_1, s_2 zwei von S ausgehende Halbgeraden. Dann heißt $W = S \cup s_1 \cup s_2$ ein *Winkel* mit dem *Scheitel* S und den *Schenkeln* s_1, s_2 . Ist $s_1 = s_2$, so heißt W ein *Nullwinkel*, und man schreibt $W = O$; ist W eine Gerade, so heißt W ein *gestreckter Winkel*. Ein Winkel W heißt *echter Winkel*, wenn W nicht kollinear ist (äquivalent: W ist weder ein Nullwinkel noch ein gestreckter Winkel).

Sei W ein echter Winkel. Man sagt, zwei Punkte $A, B \in \mathcal{E} \setminus W$ *liegen auf derselben Seite von W* , wenn es einen Punkt $C \in \mathcal{E} \setminus W$ gibt mit $(AC \cup BC) \cap W = \emptyset$. "Auf derselben Seite liegen" ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{E} \setminus W$ mit zwei Äquivalenzklassen. Diese heißen die beiden durch W bestimmten (offenen) *Winkelfelder*. Genau eines der beiden durch W bestimmten Winkelfelder ist der Durchschnitt zweier Halbebenen. Dieses nennt man das *innere Winkelfeld von W* und bezeichnet es mit W^+ , das andere durch W bestimmte Winkelfeld nennt man das *äußere Winkelfeld von W* und bezeichnet es mit W^- . W^- ist Vereinigung zweier Halbebenen. W^+ enthält mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke, W^- nicht.

Ist W ein gestreckter Winkel (also eine Gerade), so nennt man die beiden durch W bestimmten Halbebenen auch die beiden durch W bestimmten Winkelfelder und bezeichnet sie mit W^+ und W^- bezeichnet. Ist $W = O$ ein Nullwinkel, so setzt man $W^+ = \emptyset$ und $W^- = \mathcal{E} \setminus W$. Für jeden Winkel W ist $\mathcal{E} = W \uplus W^+ \uplus W^-$.

Seien W_1 und W_2 echte Winkel mit demselben Scheitel S . Man nennt W_1 und W_2 *Nebenwinkel*, wenn $W_1 = S \cup s \cup s_1$ und $W_2 = S \cup s \cup s_2$ derart, dass $S \cup s_1 \cup s_2$ eine Gerade ist. Man nennt W_1 und W_2 *Scheitelwinkel*, wenn $W_1 \cup W_2$ ein Paar sich in P schneidender Geraden ist. Jeder echte Winkel W besitzt genau einen Scheitelwinkel und genau zwei Nebenwinkel (welche ihrerseits voneinander Scheitelwinkel sind). Genauer gilt: Je zwei sich in einem Punkt S schneidende Geraden bestimmen vier Winkel W, W', W_1, W_2 mit Scheitel S derart, dass $(W, W_1), (W_1, W'), (W', W_2), (W, W_2)$ vier Paare von Nebenwinkeln

und (W, W') , (W_1, W_2) zwei Paare von Scheitelwinkeln sind. Man nennt diese vier Winkel die *Schnittwinkel* der beiden Geraden.

Bewegungen und Kongruenz. Eine *Bewegung* ist eine bijektive Abbildung (Transformation) $\beta: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, welche keine Verzerrungen bewirkt (anschaulich und enaktiv: jede Verschiebung, Drehung, Spiegelung und Hintereinanderausführung von solchen Transformationen). Für $P \in \mathcal{E}$ bezeichne P^β das Bild von P unter β , und für $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}^\beta = \{P^\beta \mid P \in \mathcal{A}\}$ das Bild von \mathcal{A} unter β . Die Menge $\text{Bew}(\mathcal{E})$ aller Bewegungen von \mathcal{E} bildet bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die *Bewegungsgruppe* von \mathcal{E} . Bewegungen sind geradentreu und streckentreu, das heißt: Ist β eine Bewegung und sind $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \neq B$, so folgt

$$A^\beta B^\beta = \{X^\beta \mid X \in AB\} \quad \text{und} \quad (A^\beta B^\beta) = \{X^\beta \mid X \in (AB)\}.$$

Zwei Teilmengen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ heißen *kongruent* oder *deckungsgleich*, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, wenn sie durch eine Bewegung der Ebene zur Deckung gebracht werden können (enaktive Definition). Für zwei Teilmengen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ ist also genau dann $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, wenn es ein $\beta \in \text{Bew}(\mathcal{E})$ gibt mit $\mathcal{B} = \mathcal{A}^\beta$.

Zwei Strecken heißen *gleich lang*, wenn sie kongruent sind. Eine Äquivalenzklasse gleich langer Strecken heißt eine Länge. Für $A, B \in \mathcal{E}$ bezeichne \overline{AB} die Äquivalenzklasse von AB . Man nennt \overline{AB} die *Länge* von AB .

Zwei Winkel heißen *gleich groß*, wenn sie kongruent sind. Sei W ein Winkel, W' der Scheitelwinkel von W und W_1, W_2 die Nebenwinkel von W . Dann ist $W \equiv W'$ und $W_1 \equiv W_2$.

Abtragen von Strecken. Seien $A, B, A' \in \mathcal{E}$, $A \neq B$ und s eine von A' ausgehende Halbgerade. Dann gibt es genau einen Punkt $B' \in s$ mit $AB \equiv A'B'$ (B' entsteht durch Abtragen der Strecke AB auf s). In der Schule erfolgt das Abtragen von Strecken mit dem Zirkel.

Vergleich von Strecken. Seien $A, B, A', B' \in \mathcal{E}$. Der Punkt B^* entstehe durch Abtragen der Strecke AB auf $A'B'^+$ (dann ist $AB \equiv A'B^*$). Man sagt, die Strecke AB ist *höchstens so lang* wie die Strecke $A'B'$, $AB \leq A'B'$, wenn $B^* \in A'B'$. Man sagt, die Strecke AB ist *mindestens so lang* wie die Strecke $A'B'$, $AB \geq A'B'$, wenn $B' \in A'B^*$. Man nennt AB *kürzer* als $A'B'$ und $A'B'$ *länger* als AB , $AB < A'B'$, wenn $AB \leq A'B'$, aber $AB \neq A'B'$. Die Beziehung $AB \leq A'B'$ hängt nur von den Längen der beiden Strecken ab. Man schreibt daher auch $\overline{AB} \leq \overline{A'B'}$ an Stelle von $AB \leq A'B'$. Die Menge aller Längen in \mathcal{E} ist bezüglich \leq totalgeordnet.

Addition von Strecken. Man sagt, eine Strecke AB ist *Summe* der Strecken A_1B_1 und A_2B_2 , $AB = A_1B_1 + A_2B_2$, wenn es einen Punkt $P \in AB$ gibt mit $AP \equiv A_1B_1$ und $PB \equiv A_2B_2$ (geometrische Streckenaddition). Für zwei Strecken AB und $A'B'$ ist genau dann $AB \leq A'B'$, wenn es eine Strecke A_1B_1 gibt mit $A'B' = AB + A_1B_1$. Die Beziehung $AB = A_1B_1 + A_2B_2$ hängt nur von den Längen der beteiligten Strecken ab. Man schreibt daher $\overline{AB} = \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2}$.

Längenmessung. Ein *Maßstab* (m, ι) in \mathcal{E} besteht aus einer Geraden $m \subset \mathcal{E}$ und einer Bijektion $\iota: \mathbb{R} \rightarrow m$, so dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: Ist $A = \iota(a)$,

$B = \iota(b)$, $C = \iota(b - a)$ und $O = \iota(0)$, so folgt $AB \equiv OC$ (ein Maßstab ist eine kongruenzentreue Zahlengerade in \mathcal{E}).

Sei (m, ι) ein Maßstab in \mathcal{E} und seien $A, B \in \mathcal{E}$. Dann gibt es genau ein $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $AB \equiv \iota(0)\iota(l)$; man nennt $l = l(A, B)$ den *Abstand von A und B* oder die *Länge der Strecke AB im Maßstab (m, \iota)*. Die Funktion $l: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *Abstandsfunktion des Maßstabes (m, \iota)*.

Hauptsatz der Längenmessung.

- i) In \mathcal{E} gibt es einen Maßstab.
- ii) Sind (m, ι) und (m', ι') zwei Maßstäbe, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}_{> 0}$, so dass für alle $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \neq B$ gilt:

$$\frac{\text{Abstand von } A \text{ und } B \text{ bezüglich } (m', \iota')}{\text{Abstand von } A \text{ und } B \text{ bezüglich } (m, \iota)} = \lambda.$$

Man nennt die beiden Maßstäbe (m, ι) und (m', ι') *äquivalent*, wenn $\lambda = 1$ (das ist genau dann der Fall, wenn $\iota(0)\iota(1) \equiv \iota'(0)\iota'(1)$).

Eigenschaften der Abstandsfunktion. Sei (m, ι) ein Maßstab in \mathcal{E} , l seine Abstandsfunktion und $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 \in \mathcal{E}$.

- i) Genau dann ist $\overline{AB} \leq \overline{A'B'}$, wenn $l(A, B) \leq l(A', B')$. Insbesondere ist genau dann $AB \equiv A'B'$, wenn $l(A, B) = l(A', B')$.
- ii) Genau dann ist $\overline{AB} = \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2}$, wenn $l(A, B) = l(A_1, B_1) + l(A_2, B_2)$.

Die Menge der Längen, versehen mit $+$ und \leq ist daher isomorph zu $(\mathbb{R}_{\geq 0}, +, \leq)$.

Voraussetzung für das Folgende. Es sei ein fester Maßstab (m, ι) von \mathcal{E} zugrunde gelegt. Wir identifizieren dann die Länge einer Strecke AB mit dem Abstand $l(A, B)$ in diesem Maßstab und bezeichnen mit $\overline{AB} = l(A, B) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Länge von AB in diesem Maßstab.

Kennzeichnungssatz für Bewegungen. Eine Abbildung $\beta: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ist genau dann eine Bewegung, wenn $\overline{A^\beta B^\beta} = \overline{AB}$ für alle $A, B \in \mathcal{E}$.

Dieser Kennzeichnungssatz ist in unserem Aufbau eine Trivialität, da wir ja den Abstand mit Hilfe der Bewegungen definiert haben. In der analytischen Geometrie des \mathbb{R}^2 ist der Abstand durch die Theorie der reellen Zahlen gegeben, und man kann obigen Kennzeichnungssatz zur Definition der Bewegungen verwenden.

Abtragen von Winkeln. Sei W ein echter Winkel, $S \in \mathcal{E}$, s eine von S ausgehende Halbgerade und \mathcal{H} eine durch (s) bestimmte Halbebene. Dann gibt es genau eine von S ausgehende Halbgerade $s' \subset \mathcal{H}$ mit $S \cup s \cup s' \equiv W$ (man sagt, der Winkel $W' = S \cup s \cup s'$ entsteht durch Abtragen des Winkels W mit Basis s in \mathcal{H}). Das Abtragen von Winkeln erfolgt in der Schule mit dem Zirkel. Das ist ein anschaulich funktionierendes Verfahren, eine Rechtfertigung kann erst im Rahmen der Kreislehre gegeben werden.

Addition und Vergleich von Winkeln. Seien W_1, W_2 und $W = S \cup s \cup s'$ Winkel. Man sagt, W ist die *Summe* von W_1 und W_2 , wenn es eine von

S ausgehende Halbgerade $s^* \subset W^+ \cup W$ gibt, so dass $W_1 \equiv S \cup s \cup s^*$ und $W_2 \equiv S \cup s^* \cup s'$. Für zwei Winkel W und W' definiert man $W \leq W'$, wenn es einen Winkel W_1 gibt mit $W' = W + W_1$. Man definiert $W_1 < W_2$, falls $W_1 \leq W_2$ und $W_1 \neq W_2$.

Man beachte, dass es nach dieser Definition zu zwei beliebigen Winkeln W_1, W_2 keinen Winkel W mit $W = W_1 + W_2$ zu geben braucht. Man sagt dann, die Winkel W_1 und W_2 sind nicht addierbar (das ist der große Nachteil dieses elementaren Winkelkonzepts). Die Begriffe \leq und $+$ für Winkel hängen nur von den Kongruenzklassen der Winkel ab. Man nennt eine Kongruenzklasse \overline{W} eines Winkels W eine *Winkelgröße* (Umfangsdefinition eines Begriffes). Dann ist die Menge aller Winkelgrößen eine totalgeordnete Menge mit kleinstem Element $\overline{0}$ und größtem Element \overline{S} (dabei ist 0 ein Nullwinkel und S einen gestreckten Winkel). Man kann die Beziehung \leq für Winkel auch ohne Verwendung der Addition alleine mit dem Begriff des Abtragens definieren.

Winkelsymmetralen. Sei $W = S \cup s_1 \cup s_2$ ein Winkel. Dann gibt es genau eine Gerade g mit $S \in g$ derart, dass für eine (und dann für jede) von S ausgehende Halbgerade $s \subset g$ gilt: $S \cup s \cup s_1 \equiv S \cup s \cup s_2$. Man nennt g die *Winkelhalbierende* oder *Winkelsymmetrale* von W .

Rechte Winkel und Lote. Ein Winkel W heißt *rechter Winkel*, wenn W zu seinem (und dann zu beiden) seiner Nebenwinkel kongruent ist (diese Definition ist unabhängig von der Winkelmessung). Je zwei rechte Winkel sind kongruent. Im Folgenden sei R stets ein rechter und $2R$ ein gestreckter Winkel (es ist $R + R = 2R$). Sind W_1 und W_2 Nebenwinkel, so ist $W_1 + W_2 = 2R$. Ein Winkel W heißt *spitz*, wenn $W < R$, er heißt *stumpf*, wenn $W > R$.

Zwei Geraden g und h heißen *zueinander normal* oder *aufeinander lotrecht*, $g \perp h$, wenn einer (und dann alle) ihrer Schnittwinkel rechte Winkel sind.

Zwei Winkel $W_1 = S_1 \cup s_1 \cup s'_1$ und $W_2 = S_2 \cup s_2 \cup s'_2$ heißen *Parallelwinkel*, falls $(s_1) \parallel (s_2)$ und $(s'_1) \parallel (s'_2)$; sie heißen *Normalwinkel*, falls $(s_1) \perp (s_2)$ und $(s'_1) \perp (s'_2)$. Sind W_1 und W_2 Parallelwinkel oder Normalwinkel und ist W'_2 ein Nebenwinkel von W_2 , wo ist entweder $W_1 \equiv W_2$ oder $W_1 \equiv W'_2$.

Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P gibt es genau eine Gerade l mit $P \in l$ und $l \perp g$. Man nennt l das *Lot* von P auf g . Ist $l \cap g = F$, so heißt F der *Fußpunkt* des Lotes von P auf g . Für jeden Punkt $X \in g$ mit $X \neq F$ ist $PX > PF$. Man nennt $d(g, P) = \overline{PF}$ den *Abstand* oder *Normalabstand* von P zu g .

Ist l das Lot von P auf g und h das Lot von P auf l , so ist auf $h \parallel g$.

Streckensymmetralen. Seien $A, B \in \mathcal{E}$, $A \neq B$. Dann gibt es genau einen Punkt $M \in AB$ mit $AM \equiv MB$. Man nennt M den *Mittelpunkt* der Strecke AB . Das Lot von M auf (AB) heißt *Mittelsenkrechte* oder *Streckensymmetrale* von AB .

Geradenspiegelungen. Für eine Bewegung $\beta \in \text{Bew}(\mathcal{E})$ heißt

$$\text{Fix}(\beta) = \{P \in \mathcal{E} \mid P^\beta = P\}$$

die *Fixpunktmenge* von β . Eine Bewegung σ heißt *Geradenspiegelung*, wenn $\text{Fix}(\beta)$ eine Gerade ist. Ist $\text{Fix}(\beta) = g$, so nennt man σ eine *Spiegelung an g* und schreibt $\sigma = \sigma_g$. Geradenspiegelungen sind in der Schule konstruktiv und enaktiv einzuführen.

Ist σ eine Geradenspiegelung, so ist $\sigma^2 = \text{id}_{\mathcal{E}}$, also $\sigma = \sigma^{-1}$.

Kennzeichnungssatz für Symmetralen. Sei g eine Gerade.

- i) Seien $A, B \in \mathcal{E}$. Für eine Gerade g sind äquivalent:
 - a) g ist die Streckensymmetrale von AB .
 - b) $\sigma_g(A) = B$.
 - c) $g = \{X \in \mathcal{E} \mid AX \equiv XB\}$.
- ii) Sei $W = S \cup s_1 \cup s_2$ ein Winkel. Für eine Gerade g sind äquivalent:
 - a) g ist die Winkelsymmetrale von W .
 - b) $\sigma_g(W) = W$.
 - c) $g \cap W^+ = \{X \in W^+ \mid d(X, (s_1)) = d(X, (s_2))\}$.

Man kann obigen Kennzeichnungssatz zur Definition von Strecken- und Winkelsymmetralen benutzen und damit alle Eigenschaften in einfacher Weise herleiten.

Hauptsatz über Bewegungen.

A. Starrheitssatz für Dreiecke. Seien $A, B, C \in \mathcal{E}$ nicht kollinear, und sei $\beta \in \text{Bew}(\mathcal{E})$ mit $A^\beta = A$, $B^\beta = B$ und $C^\beta = C$. Dann ist $\beta = \text{id}_{\mathcal{E}}$. (Ein nicht kollineares Tripel (A, B, C) heißt *Dreieck*).

A'. Starrheitssatz für Flaggen. Sei $A \in \mathcal{E}$, s eine von A ausgehende Halbgerade, \mathcal{H} eine durch (s) bestimmte Halbebene und $\beta \in \text{Bew}(\mathcal{E})$ mit $A^\beta = A$, $s^\beta = s$ und $\mathcal{H}^\beta = \mathcal{H}$. Dann ist $\beta = \text{id}_{\mathcal{E}}$. (Ein Tripel (A, s, \mathcal{H}) wie eben heißt *Flagge*).

B. Kongruenzsatz für Dreiecke. Seien (A, B, C) und (A', B', C') Dreiecke, $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ und $CA \equiv C'A'$. Dann gibt es genau eine Bewegung $\beta \in \text{Bew}(\mathcal{E})$ mit $A^\beta = A'$, $B^\beta = B'$ und $C^\beta = C'$.

B'. Kongruenzsatz für Flaggen. Seien (A, s, \mathcal{H}) und (A', s', \mathcal{H}') Flaggen. Dann gibt es genau eine Bewegung $\beta \in \text{Bew}(\mathcal{E})$ mit $A^\beta = A'$, $s^\beta = s'$ und $\mathcal{H}^\beta = \mathcal{H}'$.

C. Satz von den drei Spiegelungen. Jede Bewegung von \mathcal{E} ist Hintereinanderausführung von höchstens drei Spiegelungen.

Der Starrheitssatz muss der Anschauung entnommen werden ("durch ein Dreieck oder eine Flagge ist die Ebene fixiert"). Dann folgt die Eindeutigkeitsaussage im Kongruenzsatz mittels der Gruppeneigenschaft: Sind $\alpha, \beta \in \text{Bew}(\mathcal{E})$ mit $A^\alpha = A^\beta$, $B^\alpha = B^\beta$ und $C^\alpha = C^\beta$, so ist $\gamma = \alpha \circ \beta^{-1}$ eine Bewegung mit $A^\gamma = A$, $B^\gamma = B$ und $C^\gamma = C$. Aus dem Starrheitssatz folgt $\gamma = \text{id}_{\mathcal{E}}$ und damit $\alpha = \beta$.

Der Beweis der Existenzaussage im Kongruenzsatz und des Satzes von den drei Spiegelungen erfolgt durch Angabe von Konstruktionsvorschriften wie folgt.

FALL 1: $A = A'$, $B = B'$. Ist $C = C'$, so ist nichts zu zeigen. Ist $C \neq C'$, so liegen A und B auf der Mittelsenkrechten von CC' (wegen $AC \equiv AC'$ und

$BC \equiv BC'$). Daher ist (AB) die Mittelsenkrechte von CC' . Ist nun σ die Spiegelung an (AB) , so folgt $A^\sigma = A = A'$, $B^\sigma = B = B'$ und $C^\sigma = C'$.

FALL 2: $A = A'$, $B \neq B'$. Sei σ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden von $A \cup AB^+ \cup AB'^+$. Dann ist $A^\sigma = A$ und daher $B^\sigma \in AB'^+$. Wegen $AB^\sigma \equiv AB \equiv AB'$ folgt $B^\sigma = B'$. Mit $(A^\sigma, B^\sigma, C^\sigma)$ und (A', B', C') verfähre man wie in FALL 1.

FALL 3: $A \neq A'$. Ist σ die Spiegelung an der Mittelsenkrechten von AA' , so folgt $A^\sigma = A'$. Mit $(A^\sigma, B^\sigma, C^\sigma)$ und (A', B', C') verfähre man wie in FALL 2 oder FALL 1.

Kennzeichnung von Translationen und Drehungen. Sei $\beta \in \text{Bew}(\mathcal{E})$, $\beta \neq \text{id}_\mathcal{E}$.

A. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) $\text{Fix}(\beta) = \emptyset$, und für jede Gerade g ist $g^\beta \parallel g$.
- ii) β ist die Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen an parallelen Geraden.

Hat eine Bewegung β diese Eigenschaften oder ist $\beta = \text{id}_\mathcal{E}$, so heißt β eine *Translation*. Zu je zwei Punkten $P, Q \in \mathcal{E}$ gibt es genau eine Translation β mit $P^\beta = Q$.

B. Sei $S \in \mathcal{E}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) $\text{Fix}(\beta) = S$.
- ii) β ist die Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen an sich in S schneidenden Geraden.

Hat eine Bewegung β diese Eigenschaften oder ist $\beta = \text{id}_\mathcal{E}$, so heißt β eine *Drehung* mit *Drehmittelpunkt* S .

Ähnlichkeitsabbildungen. Eine Abbildung $\beta: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ heißt *Ähnlichkeitsabbildung*, wenn es ein $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass $\overline{A^\beta B^\beta} = \rho \overline{AB}$ für alle $A, B \in \mathcal{E}$. Man nennt ρ den *Verzerrungsfaktor* von β . Zwei Teilmengen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ heißen *ähnlich*, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung β gibt mit $\mathcal{B} = \mathcal{A}^\beta$.

In der Schule: Maßstäbliches Zeichnen ist dasselbe wie Herstellung eines ähnlichen Bildes.

Ein Abbildung $\beta: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ist genau dann eine Bewegung, wenn sie eine Ähnlichkeitsabbildung mit Verzerrungsfaktor 1 ist. Zwei Winkel sind genau dann ähnlich, wenn sie kongruent sind. Je zwei Strecken sind ähnlich.

Zentrische Streckungen. Sei $Z \in \mathcal{E}$ und $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$. Eine Abbildung $\beta: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ heißt *zentrische Streckung* mit *Zentrum* Z und *Streckungsfaktor* ρ , wenn $Z^\beta = Z$ und für alle $A \in \mathcal{E} \setminus Z$ gilt: $A^\beta \in ZA^+$ und $\overline{ZA^\beta} = \rho \overline{ZA}$.

Kennzeichnungssatz für Ähnlichkeitsabbildungen. Sei $Z \in \mathcal{E}$ und $\beta: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. Dann sind äquivalent:

- a) β ist eine Ähnlichkeitsabbildung.
- b) Es gibt eine Bewegung β_0 und eine zentrische Streckung ζ mit Zentrum Z , so dass $\beta = \beta_0 \circ \zeta$.

- c) Es gibt eine Bewegung β_0 und eine zentrische Streckung ζ mit Zentrum Z , so dass $\beta = \zeta \circ \beta_0$.

Präzisierung von Kongruenz und Ähnlichkeit in der analytischen Geometrie. Eine Abbildung $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *Ähnlichkeitsabbildung*, wenn es ein $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass

$$|\mathbf{x}^\beta - \mathbf{y}^\beta| = \rho |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2.$$

Ist $\rho = 1$, so heißt β eine *Bewegung* oder *Kongruenzabbildung*. Für einen Spaltenvektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist dabei ist $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ die euklidische Norm von \mathbf{x} .

Eine Abbildung $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist genau dann eine Bewegung, wenn es ein $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, eine Matrix $T \in O(2)$ und einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass

$$\mathbf{x}^\beta = \rho T \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Dabei besteht $O(2)$ aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \cos \omega & -\varepsilon \sin \omega \\ \sin \omega & \varepsilon \cos \omega \end{pmatrix} \quad \text{mit } \omega \in \mathbb{R} \quad \text{und } \varepsilon \in \{\pm 1\}.$$

Winkelmessung. Sei g eine Gerade, $O \in g$, seien s, s^- die beiden durch O bestimmten Halbgeraden von g , und sei $\overline{\mathcal{H}}$ eine der beiden durch g bestimmten abgeschlossenen Halbebenen. Sei \mathfrak{G} die Menge aller von O ausgehenden Halbgeraden in $\overline{\mathcal{H}}$. Ein *Winkelmesser* Σ in \mathcal{E} (mit Basis s , Skala in $\overline{\mathcal{H}}$ imd Normierung $R \in \mathbb{R}_{>0}$) ist eine bijektive Abbildung

$$\Sigma: \begin{cases} [0, 2R] & \rightarrow \mathfrak{G} \\ \omega & \mapsto \Sigma_\omega \end{cases}$$

derart, dass gilt: $\Sigma_0 = s$, $\Sigma_{2R} = s^-$, und aus $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq 2R$ folgt $S \cup \Sigma_{\omega_1} \cup \Sigma_{\omega_2} \equiv S \cup s \cup \Sigma_{\omega_2 - \omega_1}$.

Übliche Normierungen: $R = 90$ (Gradmaß) und $R = \frac{\pi}{2}$ (Bogenmaß). In der Unterstufe ist das Gradmaß üblich. Bei der Einführung der Kreismessung (Länge von Kreisbögen), spätestens aber bei der Definition der Winkelfunktionen auf ganz \mathbb{R} sollte man das Bogenmaß verwenden. Wir verwenden hier für die Elementargeometrie die allgemeine Normierung R , um zu zeigen, dass es gleichgültig ist, welche Normierung man verwendet.

Man sagt, *ein Winkel W hat bezüglich Σ das Maß $\alpha \in [0, 2R]$, $\angle_\Sigma W = \alpha$, wenn $W \equiv S \cup s \cup \Sigma_\alpha$.*

Hauptsatz über Winkelmesser.

- i) Sei g eine Gerade, s ein Strahl auf g , $\overline{\mathcal{H}}$ eine durch g bestimmte abgeschlossene Halbebene und $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es genau einen Winkelmesser mit Basis s , Skala in $\overline{\mathcal{H}}$ und Normierung R .

- ii) Seien Σ_1, Σ_2 Winkelmesser mit Normierungen R_1, R_2 . Dann gilt für jeden Winkel W

$$\sphericalangle_{\Sigma_2} W = \frac{R_1}{R_2} \sphericalangle_{\Sigma_1} W.$$

Insbesondere ist $\sphericalangle_{\Sigma_1} = \sphericalangle_{\Sigma_2}$ genau dann, wenn $R_1 = R_2$.

Voraussetzung im Folgenden. In \mathcal{E} sei ein fester Winkelmesser Σ mit Normierung R gegeben. Wir schreiben dann $\sphericalangle = \sphericalangle_{\Sigma}$.

Eigenschaften des Winkelmaßes. W, W_1, W_2 seien Winkel. Dann gilt:

- i) Genau dann ist $W_1 \leq W_2$, wenn $\sphericalangle W_1 \leq \sphericalangle W_2$. Insbesondere ist genau dann $W_1 \equiv W_2$, wenn $\sphericalangle W_1 = \sphericalangle W_2$.
- ii) Genau dann ist W ein rechter Winkel [ein gestreckter Winkel, ein Nullwinkel], wenn $\sphericalangle W = R$ [$\sphericalangle W = 2R$, $\sphericalangle W = 0$].
- iii) W_1 und W_2 sind genau dann addierbar, wenn $\sphericalangle W_1 + \sphericalangle W_2 \leq 2R$. Genau dann ist $W = W_1 + W_2$, wenn $\sphericalangle W = \sphericalangle W_1 + \sphericalangle W_2$.
- iv) Sind W_1 und W_2 Scheitelwinkel, so ist $\sphericalangle W_1 = \sphericalangle W_2$. Sind W_1 und W_2 Nebenwinkel, so ist $\sphericalangle W_1 + \sphericalangle W_2 = 2R$.

Sind g_1, g_2 zwei sich schneidende Geraden, so kann man ihre 4 Schnittwinkel W, W', W_1, W'_1 so normieren, dass $\sphericalangle W = \sphericalangle W' \leq R \leq \sphericalangle W_1 = \sphericalangle W'_1$. Man nennt dann $\sphericalangle(g_1, g_2) = \sphericalangle W_1$ den *Winkel zwischen den Geraden g_1 und g_2* .

Sei W ein Winkel, W^+ sein inneres und W^- sein äußeres Winkelfeld. Dann definieren wir $\sphericalangle W^+ = \sphericalangle W$ und $\sphericalangle W^- = 4R - \sphericalangle W$. Für zwei Winkelfelder W', W'' ist genau dann $W' \equiv W''$, wenn $\sphericalangle W' = \sphericalangle W''$.

Kreise. Seien $O \in \mathcal{E}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Menge

$$k = k(O, r) = \{X \in \mathcal{E} \mid \overline{OX} = r\}$$

heißt *Kreislinie* mit *Mittelpunkt* O und *Radius* r . Sei g eine Gerade und F der Fußpunkt des Lotes von O auf g . Dann ist

$$\#(g \cap k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \overline{OF} > r, \\ 1, & \text{falls } \overline{OF} = r, \\ 2, & \text{falls } \overline{OF} < r. \end{cases}$$

Man nennt g im ersten Falle eine *Passante*, im zweiten Falle eine *Tangente* und im dritten Falle eine *Sekante*. Ist g eine Sekante von k und $g \cap k = \{X, Y\}$, so heißt XY eine *Sehne*. Für eine Sehne XY ist genau dann $O \in XY$, wenn $\overline{XY} = 2r$; in diesem Falle nennt man XO eine *Halbmesser* und XY einen *Durchmesser*.

Zwei Kreislinien sind stets ähnlich. Sie sind genau dann kongruent, wenn ihre Radien gleich sind.

Kreisbögen und Winkel. Sei $k = k(O, r)$ eine Kreislinie. Ist W ein Winkel mit Scheitel O und ist W' eines der durch W bestimmten Winkelfelder, so heißt

$b = k \cap (W \cup W')$ ein *Winkelbogen* von W' oder ein *Kreisbogen* auf k . Ist $b \cap W = \{P, Q\}$, wo heißen P, Q die *Endpunkte* von b und b ein *Kreisbogen* von P nach Q . Genau dann ist $P = Q$, wenn entweder $b = k$ oder b nur aus einem Punkt besteht. Man nennt $\alpha = \angle b = \angle W'$ den *Zentriwinkel* und

$$l(b) = \frac{\pi r}{2R} \alpha$$

die *Bogenlänge* von b . Ist insbesondere $R = \pi/2$ (also das Winkelmaß das Bogenmaß), so folgt $l(b) = r\alpha$. Diese Definition ist mit allen anderen möglichen Definitionen von Bogenlänge verträglich. Es ist $l(k) = 2\pi$, und $l(b) = 0$, falls b nur aus einem Punkt besteht.

Sind $P, Q \in k$, so gibt es genau zwei Kreisbögen auf k mit den Endpunkten P und Q ; sind α und α' ihre Zentriwinkel, so ist $\alpha + \alpha' = 4R$.

Seien k und k' Kreislinien mit Radien r und r' , sei $b \subset k$ ein Kreisbogen mit Zentriwinkel $\alpha \neq 0$, und sei $b' \subset k'$ ein Kreisbogen mit Zentriwinkel α' . Genau dann ist $b \equiv b'$, wenn $r = r'$ und $\alpha = \alpha'$ ("Zwei Kreisbögen sind genau dann kongruent, wenn ihre Radien gleich lang und ihre Winkelfelder gleich groß sind"). Auf dieser Tatsache beruht die Konstruktion des Winkelabtragens mit dem Zirkel.

Parametrisierung der Kreislinie und Drehungen. Sei $O \in \mathcal{E}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $k = k(O; r)$, $A \in k$, $b_0 \subset k$ ein Kreisbogen mit Zentriwinkel $\angle b_0 = R$ und $A \in b_0$ (es gibt genau zwei solche Kreisbögen, man nennt sie die *Orientierungen* von k mit Basis A). Für $0 \leq \alpha < 4R$ sei $P_\alpha \in k$ der eindeutig bestimmte Punkt mit folgender Eigenschaft: Es gibt einen Kreisbogen $b \subset k$ mit den Endpunkten A und P_α und Zentriwinkel α , so dass $b \subset b_0$ oder $b \supset b_0$. Dann ist

$$P: \begin{cases} [0, 4R) & \rightarrow & k \\ \alpha & \mapsto & P_\alpha \end{cases}$$

eine bijektive Abbildung. Man nennt P *Parametrisierung* von k mit Basis A und Orientierung b_0 . Jedes $x \in \mathbb{R}$ hat eine eindeutige Darstellung $x = 4Rn + \alpha$ mit $\alpha \in [0, 4R)$ und $n \in \mathbb{Z}$, und wir setzen dann $P_x = P_\alpha \in k$ (anschaulich: "Aufwickeln der Zahlengeraden auf den Kreis").

Sei nun k eine Kreislinie mit Mittelpunkt O und P eine Parametrisierung von k . Dann gibt es zu jedem $\omega \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte Drehung T_ω der Ebene mit Drehmittelpunkt O und $T_\omega(P_0) = P_\omega$. Man nennt T_ω die *Drehung der Ebene mit Drehwinkel ω und Drehmittelpunkt O* (bezüglich der Orientierung b_0). Für alle $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ ist

$$T_\omega(P_\alpha) = P_{\omega+\alpha} \quad \text{und} \quad T_\omega \circ T_\alpha = T_{\omega+\alpha}.$$

Insbesondere ist $T_\omega \in \text{Bew}(\mathcal{E})$ vom Basispunkt A unabhängig. Die Drehungen mit Drehmittelpunkt O bilden eine zur Restklassengruppe $\mathbb{R}/4R\mathbb{Z}$ isomorphe Gruppe.

Definition des Dreiecks und Standardbezeichnungen. Ein (*geordnet bezeichnetes*) *Dreieck* $\Delta = (A, B, C)$ ist ein Tripel nicht kollinearere Punkte.

Vorteil dieser Definition. Die Bezeichnungen aller im Dreieck interessierenden Größen können in einfacher Weise normiert und Sätze der Dreiecksgeometrie können einfach formuliert werden.

Nachteil dieser Definition. Nicht die geometrische Figur an sich, sondern diese gemeinsam mit einer (eigentlich willkürlichen) Normierung der Bezeichnung ist Gegenstand der Untersuchungen. Ergänzende Definition zur Behebung dieses Nachteils: Zwei Dreiecke $\Delta = (A, B, C)$ und $\Delta' = (A', B', C')$ heißen *geometrisch gleich*, wenn $\{A, B, C\} = \{A', B', C'\}$.

Andere Möglichkeiten der Dreiecksdefinition. $\Delta = \{A, B, C\}$; $\Delta = AB \cup BC \cup CA$; Δ ist die konvexe Hülle von $\{A, B, C\}$. Jede Präzisierung geht mit einem Verlust von Aspekten einher (G. Fischer). Im elementargeometrischen Unterricht ist es zunächst wichtig, alle Aspekte beim Dreieck automatisch mitzudenken.

Standardbezeichnungen. Sei $\Delta = (A, B, C)$ ein Dreieck. Die folgenden Standardbezeichnungen werden in der Dreiecksgeometrie stillschweigend verwendet. Alle Aussagen bleiben gültig, wenn man A, B, C und die damit zusammenhängenden Größen zyklisch vertauscht.

Man nennt A, B, C die *Ecken* von Δ . Die Strecken AB, BC und CA heißen die *Seiten* von Δ . Die Winkel $W_A = A \cup AB^+ \cup AC^+$, $W_B = B \cup BA^+ \cup BC^+$ und $W_C = C \cup CA^+ \cup CB^+$ heißen die Winkel von Δ . Man setzt $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$. Dann sind a, b, c die *Seitenlängen* des Dreiecks. Da Verwechslungen im allgemeinen nicht zu befürchten sind, nennt man meist auch a, b, c die Seiten des Dreiecks. Man setzt $\alpha = \angle W_A$, $\beta = \angle W_B$, $\gamma = \angle W_C$ und nennt auch die Zahlen α, β, γ die Winkel des Dreiecks. Sei l_A das Lot von A auf (BC) , H_A sein Fußpunkt und $h_A = \overline{AH_A}$, sei l_B das Lot von B auf (CA) , H_B sein Fußpunkt und $h_B = \overline{BH_B}$, sei l_C das Lot von C auf (AB) , H_C sein Fußpunkt und $h_C = \overline{CH_C}$. Man nennt l_A, l_B, l_C die *Höhenlinien*, H_A, H_B, H_C die *Höhenfußpunkte* und h_A, h_B, h_C die *Höhen* von Δ .

Kongruenz von Dreiecken. Zwei Dreiecke $\Delta = (A, B, C)$ und $\Delta' = (A', B', C')$ heißen *kongruent*, wenn es eine Bewegung β gibt mit $A' = A^\beta$, $B' = B^\beta$ und $C' = C^\beta$. Die Kongruenzsätze der Dreiecksgeometrie sind Eindeutigkeitsaussagen, keine Existenzaussagen und keine Konstruktionsaussagen! Sie gelten auch nach jeder zyklischen Vertauschung von A, B, C .

Kongruenzsätze. Seien $\Delta = (A, B, C)$ und $\Delta' = (A', B', C')$ zwei Dreiecke, und sei eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt (die gestrichelten Standardbezeichnungen beziehen sich auf das Dreieck Δ'):

(SSS) $a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$.

(SWS) $c = c'$, $b = b'$ und $\alpha = \alpha'$.

(WSW) $c = c'$, $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$.

(SsW) $c = c'$, $b = b'$, $b \leq c$ und $\gamma = \gamma'$.

Dann sind Δ und Δ' kongruent.

Ähnlichkeit von Dreiecken. Zwei Dreiecke $\Delta = (A, B, C)$, $\Delta' = (A', B', C')$ heißen *ähnlich*, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung β gibt mit $A' = A^\beta$, $B' = B^\beta$ und $C' = C^\beta$.

Ähnlichkeitssatz. (A, B, C) und (A', B', C') seien Dreiecke. Dann sind äquivalent:

- a) (A, B, C) und (A', B', C') sind ähnlich.
- b) Es gibt eine Bewegung β von \mathcal{E} mit $A^\beta = A'$, $B^\beta \in A'B'^+$, $C^\beta \in A'C'^+$ und $(B^\beta C^\beta) \parallel (B'C')$.
- c) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. d) $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ und $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$.
- e) $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$.

Didaktisch kann man die Dreiecksgeometrie an den Anfang stellen, Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken definieren und daraus die gesamte Kongruenz- und Ähnlichkeitslehre herleiten. Man kann aber auch (so wie es hier geschehen ist) den Begriff der Bewegung und der Ähnlichkeitsabbildung in den Vordergrund stellen und daraus die entsprechenden Sätze der Dreiecksgeometrie herleiten. Der Strahlensatz ist im wesentlichen zu Teilen des Ähnlichkeitssatzes für Dreiecke äquivalent.

Sätze der Dreiecksgeometrie. Sei $\Delta = (A, B, C)$ ein Dreieck.

- i) (Winkelsummensatz) $\alpha + \beta + \gamma = 2R$.
 - ii) (Gegenübersatz) Genau dann ist $a \leq b$, wenn $\alpha \leq \beta$.
 - iii) (Kennzeichnungssatz für gleichschenkelige Dreiecke) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
 - a) $a = b$. b) $\alpha = \beta$.
 - c) l_C ist die Mittelsenkrechte von AB .
 - d) l_C ist die Winkelhalbierende von W_C .
 - e) Die Mittelsenkrechte von AB ist die Winkelhalbierende von W_C .
- Sind diese Bedingungen erfüllt, so nennt man Δ *gleichschenkelig bei C*.
- iv) (Dreiecksungleichung) $c < a + b$.
 - v) (Umkreis) Die Mittelsenkrechten von AB, BC und CA schneiden sich in einem Punkt U . Dieser ist Mittelpunkt der eindeutig bestimmten Kreislinie k mit $\{A, B, C\} \subset k$. (U heißt *Umkreismittelpunkt* und k der *Umkreis* von Δ).
 - vi) (Inkreis) Die Winkelsymmetralen von W_A, W_B und W_C schneiden sich in einem Punkt I . Dieser ist Mittelpunkt der eindeutig bestimmten Kreislinie k , welche die drei Geraden $(AB), (BC)$ und (CA) als Tangenten besitzt, so dass $k \cap (AB) \in AB$, $k \cap (BC) \in BC$ und $k \cap (CA) \in CA$ (I heißt *Inkreismittelpunkt* und k der *Inkreis* von Δ).
 - vii) (Höhenschnittpunkt) Die drei Höhenlinien von Δ schneiden sich in einem Punkt.
 - viii) (Flächensatz) $ah_A = bh_B = ch_C$.

Satzgruppe des Pythagoras. Sei $\Delta = (A, B, C)$ ein Dreieck und $\gamma = R$ (dann nennt man Δ *rechtwinkelig bei C*, man nennt AB die *Hypothense* und AC, BC die *Katheten* von Δ). Sei $q = \overline{AH_C}$, $p = \overline{BH_C}$ und $h = h_c$. Dann gilt:

- i) ("Höhensatz") $pq = h^2$.

- ii) ("Kathetensatz") $qc = b^2$ und $pc = a^2$.
 iii) ("Pythagoräischer Lehrsatz") $c^2 = a^2 + b^2$.

Zum Beweis betrachte man die Dreiecke (A, H_C, C) , (A, C, B) und (C, H_C, B) . Sie stimmen in ihren Winkeln überein (Normalwinkel), sind also ähnlich. Daher folgt aus dem Ähnlichkeitssatz

$$\frac{q}{b} = \frac{b}{c}, \quad \frac{a}{p} = \frac{c}{a} \quad \text{und} \quad \frac{q}{h} = \frac{h}{p}.$$

Damit erhält man $qc = b^2$, $pc = a^2$, $pq = h^2$ und schließlich $c^2 = (p+q)c = a^2 + b^2$.

Umkehrung des Pythagoräischen Lehrsatzes. Sei $\Delta = (A, B, C)$ ein Dreieck und $c^2 = a^2 + b^2$. Dann ist Δ rechtwinkelig bei C .

Satz vom Thaleskreis.

- a) Sei k eine Kreislinie, AB ein Durchmesser von k und $C \in k \setminus \{A, B\}$. Dann ist das Dreieck (A, B, C) rechtwinkelig bei C .
 b) Der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks liegt genau dann auf der Hypotenuse, wenn das Dreieck rechtwinkelig ist.

Koordinatensysteme. Seien (m_x, ι_x) und (m_y, ι_y) zwei äquivalente Maßstäbe in \mathcal{E} mit $\iota_x(0) = \iota_y(0)$ und $m_x \perp m_y$. Dann nennt man $\mathbf{m} = ((m_x, \iota_x), (m_y, \iota_y))$ ein *cartesisches Koordinatensystem* in \mathcal{E} . Für $P \in \mathcal{E}$ seien $x_P, y_P \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $P_x = \iota_x(x_P)$ ist der Fußpunkt des Lotes von P auf m_x , und $P_y = \iota_y(y_P)$ ist der Fußpunkt des Lotes von P auf m_y . Dann nennt man x_P und y_P die *Koordinaten* und

$$\kappa_{\mathbf{m}}(P) = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

den *Koordinatenvektor* von P bezüglich \mathbf{m} und schreibt

$$P = P_{\mathbf{m}}(x_P/y_P) = P(x_P/y_P).$$

Die Abbildung $\kappa_{\mathbf{m}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist bijektiv, und es gilt: Eine Teilmenge $g \subset \mathcal{E}$ ist genau dann eine Gerade, wenn es $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ gibt, so dass

$$\kappa_{\mathbf{m}}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a\xi + b\eta + c = 0 \right\}.$$

Für $A, B \in \mathcal{E}$ ist

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathbf{m}}(AB) &= \{ \kappa_{\mathbf{m}}(A) + t[\kappa_{\mathbf{m}}(B) - \kappa_{\mathbf{m}}(A)] \mid t \in [0, 1] \} \\ &= \{ \lambda \kappa_{\mathbf{m}}(A) + \mu \kappa_{\mathbf{m}}(B) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \lambda + \mu = 1 \}. \end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung von $\kappa_{\mathbf{m}}$ konstruiert man wie folgt. Für $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei $l_x(\xi)$ das Lot von $\iota_x(\xi)$ auf m_x , $l_y(\eta)$ das Lot von $\iota_y(\eta)$ auf m_y und $P = l_x(\xi) \cap l_y(\eta)$. Dann ist $\kappa_{\mathbf{m}}(P) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$.

In der analytischen Geometrie identifiziert man \mathbb{R}^2 mit \mathcal{E} vermöge κ und schreibt

$$P(a/b) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{E} = \mathbb{R}^2.$$

4.2 Trigonometrie

Sei \mathcal{E} eine Ebene mit Maßstab (m, ι) und Σ ein Winkelmesser mit Normierung R .

Definition der Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck. Sei $\Delta = (A, B, C)$ ein bei C rechtwinkliges Dreieck (dann ist $\gamma = R$ und $\beta = R - \alpha$). Dann definiert man

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}.$$

Die Zahlen $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$ hängen nur von α und R , nicht vom gewählten Dreieck und vom gewählten Maßstab ab (das folgt unmittelbar aus dem Ähnlichkeitssatz).

Polarkoordinaten. Sei \mathcal{E} mittels eines cartesischen Koordinatensystems mit \mathbb{R}^2 identifiziert, sei

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und sei $k = k(O; 1)$. Man nennt O den *Ursprung*, E_1 und E_2 die *Einheitspunkte* und k die *Einheitskreislinie*. Der Kreisbogen $b_0 \subset k$ mit Zentriwinkel R und den Endpunkten E_1 und E_2 heißt *positive Orientierung*. Sei $P: [0, 4R) \rightarrow k$ die Parametrisierung von k mit Basis E_1 und Orientierung b_0 . Für $X \in \mathbb{R}^2 \setminus O$ sei $r = \overline{OX}$ und $\alpha \in [0, 4R)$ mit $P_\alpha = k \cap OX^+$. Dann nennt man $\text{pol}(X) = (r, \alpha)$ die *Polarkoordinaten von X* . Die Abbildung

$$\text{pol}: \mathbb{R}^2 \setminus O \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times [0, 4R)$$

ist bijektiv. Ist

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus O \quad \text{und} \quad \text{pol}(X) = (r, \alpha),$$

so setzt man

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{y}{r}.$$

Auf Grund des Strahlensatzes sind diese Definitionen unabhängig vom gewählten Koordinatensystem (sie hängen aber von R ab) und verträglich mit den Definitionen am rechtwinkligen Dreieck. Auf Grund des Pythagoräischen Lehrsatzes gilt

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Rechenregeln. Die Formeln für

$$\begin{aligned} & \sin(R \pm \alpha), \quad \sin(2R \pm \alpha), \quad \sin(3R \pm \alpha), \quad \sin(4R - \alpha), \\ & \cos(R \pm \alpha), \quad \cos(2R \pm \alpha), \quad \cos(3R \pm \alpha), \quad \cos(4R - \alpha) \end{aligned}$$

sind am parametrisierten Einheitskreis abzulesen.

Trigonometrie des allgemeinen Dreiecks. Sei (A, B, C) ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt O und Umkreisradius r .

i) (Zentri- und Peripheriewinkelsatz) Es ist

$$\sphericalangle(O \cup OA^+ \cup OB^+) = \begin{cases} 2\gamma, & \text{falls } \gamma \leq \mathbb{R}, \\ 4\mathbb{R} - 2\gamma, & \text{falls } \gamma \geq \mathbb{R}. \end{cases}$$

ii) (Sinussatz und Umkreissatz) $2r = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$.

iii) (Höhensatz) $h_c = b \sin \alpha$, $h_a = c \sin \beta$, $h_b = a \sin \gamma$.

iv) (Kosinussatz) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$.

v) (Heron'sche Formel) Ist $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, so folgt

$$bc \sin \alpha = ca \sin \beta = ab \sin \gamma = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)s-c}.$$

Definition der Winkelfunktionen auf \mathbb{R} . Spätestens ab jetzt sollten Winkel im Bogenmaß notiert werden (also $\mathbb{R} = \pi/2$). Jedes $x \in \mathbb{R}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$x = 2k\pi + \alpha \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad 0 \leq \alpha < 2\pi,$$

und man setzt dann

$$\sin x = \sin \alpha \quad \text{und} \quad \cos x = \cos \alpha.$$

$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetige periodische Funktionen mit der Periode 2π , und für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, & \sin(x + k\pi) &= (-1)^k \sin x, \\ \cos(-x) &= \cos x, & \cos(x + k\pi) &= (-1)^k \cos x. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \pi\mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Die Tangensfunktion

$$\tan: \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ist definiert durch} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Beschreibung durch Drehungen. Für $x \in \mathbb{R}$ sei T_x die Drehung des \mathbb{R}^2 mit Drehwinkel x und Drehmittelpunkt O bezüglich der positiven Orientierung. Dann ist

$$T_x(E_1) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Diese Eigenschaft kann auch zur Definition der Winkelfunktionen auf ganz \mathbb{R} verwendet werden.

Gleichförmige Kreisbewegung. Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann beschreibt

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix}$$

eine Bewegung auf $k(O; r) \subset \mathbb{R}^2$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω .

Grenzwerte. Es ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Beweisskizze: Für $x > 0$ ist aus geometrischen Gründen (Vergleich der Flächeninhalte)

$$\sin x \cos x \leq x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

also

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x},$$

und daraus folgt die Behauptung für den Sinus. Für den Kosinus schreibt man

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

4.3 Winkelfunktionen und Vektorrechnung

Der Vektorkalkül. Wir identifizieren \mathcal{E} mit \mathbb{R}^2 vermöge eines cartesischen Koordinatensystems und interpretieren die (arithmetischen) Spaltenvektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ geometrisch als Punkte, Ortspfeile, Äquivalenzklassen paralleler gleichlanger und gleichgerichteter Pfeile, und als Translationen (Verschiebungsvektoren). Betrachten wir Spaltenvektoren des \mathbb{R}^2 als Punkte, so bezeichnen wir sie mit Großbuchstaben, sonst mit fetten Kleinbuchstaben. Wir setzen $O = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_1 = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E_2 = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für eine Teilmenge $C \subset \mathbb{R}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ setzen wir $C\mathbf{a} = \{c\mathbf{a} \mid c \in C\} \subset \mathbb{R}^2$. Wir verwenden einen Winkelmesser mit der Normierung $R = \pi/2$.

Für $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ ist $\mathbb{R}\mathbf{a}$ eine Gerade mit $\mathbf{0} \in \mathbb{R}\mathbf{a}$. $\mathbb{R}_{>0}\mathbf{a}$ und $\mathbb{R}_{<0}\mathbf{a}$ sind die beiden durch $\mathbf{0}$ bestimmten Halbgeraden auf $\mathbb{R}\mathbf{a}$.

Für zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ nennt man

$$\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sphericalangle(\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a} \cup \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{b}) \in [0, \pi]$$

den *Winkel zwischen \mathbf{a} und \mathbf{b}* . $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a} \cup \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{b}$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}(-\mathbf{a}) \cup \mathbb{R}_{\geq 0}(-\mathbf{b})$ sind Scheitelwinkel, $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a} \cup \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{b}$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}(-\mathbf{a}) \cup \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{b}$ sind Nebenwinkel. Daher gilt

$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(-\mathbf{a}, -\mathbf{b}) = \pi - \angle(-\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Man sagt, \mathbf{a} und \mathbf{b} stehen aufeinander *normal*, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, wenn $\mathbb{R}\mathbf{a} \perp \mathbb{R}\mathbf{b}$ (äquivalent: $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi/2$).

Ein *Pfeil* ist eine Paar $(P, Q) \in \mathbb{R}^2$; man nennt P den *Köcher* oder *Schaft* und Q die *Spitze* von (P, Q) . Zwei Pfeile (P, Q) und (P', Q') heißen *äquivalent* oder *parallel, gleich lang und gleich gerichtet*, wenn $Q - P = Q' - P'$. Man nennt $\overrightarrow{PQ} = Q - P \in \mathbb{R}^2$ den *durch den Pfeil (P, Q) repräsentierten Vektor*.

Zu jedem Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ und jedem Punkt $P \in \mathcal{E}$ gibt es genau einen Punkt $Q \in \mathcal{E}$ mit $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$. Man sagt dann auch, Q entsteht aus P durch *Verschiebung* um den Vektor \mathbf{a} . Es ist dann $Q = P + \mathbf{a}$, und die Abbildung $X \mapsto X + \mathbf{a}$ heißt *Translation um den Vektor \mathbf{a}* . Ist $P \in \mathbb{R}^2$, so heißt (O, P) der *Ortspfeil* und \overrightarrow{OP} der *Ortsvektor* von P .

In unserer Auffassung sind Punkte, Ortspfeile und Ortsvektoren geometrische Deutungen eines (arithmetischen) Spaltenvektors sind. Der mathematische Kalkül ist ein Kalkül der Spaltenvektoren.

Parallelogrammsatz (Präzise Fassung von "parallel, gleich lang und gleich gerichtet"). Seien $P, P', Q, Q' \in \mathcal{E}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- a) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$.
- b) Ist β die Translation mit $P^\beta = Q$, so folgt $P'^\beta = Q'$.
- c) Ist β die Translation mit $P^\beta = P'$, so folgt $Q^\beta = Q'$.
- d) Es ist eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt:
 - 1) $P = Q$ und $P' = Q'$.
 - 2) P, P', Q, Q' liegen auf einer Geraden, $\overline{PQ} = \overline{P'Q'} \neq 0$, und es ist weder $PP' \subset QQ'$ noch $QQ' \subset PP'$.
 - 3) P, P', Q, Q' liegen nicht auf einer Geraden, $(PQ) \parallel (P'Q')$ und $(PP') \parallel (QQ')$.

Die obigen Bedingungen **b)** und **c)** haben nur dann einen strengen mathematischen Sinn, wenn vorher eine präzise Definition der Translation gegeben wurde. Für das geometrische Verständnis sind sie aber unerlässlich.

Skalarprodukt, Länge und Winkel. Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ sind das *Skalarprodukt* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ und der *Absolutbetrag* oder die *euklidische Länge* $|\mathbf{a}|$ arithmetisch wie folgt definiert:

$$\text{Für } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Rechenregeln. Für $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.
- ii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.
- iii) $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \lambda \mathbf{b}$.

iv) $|\mathbf{a}| = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Geometrische Deutung von Betrag und Skalarprodukt.

- i) Für $A, B \in \mathcal{E}$ ist $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$. Beweis mit Pythagoräischem Lehrsatz.
 ii) Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ ist $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Beweis mit Kosinussatz.
 iii) Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ ist genau dann ist $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, wenn $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Beweis nach ii).

Dieser Satz kann zu einer von der Anschauung unabhängigen Definition des Längen- und des Winkelbegriffs verwendet werden, wie es in der Theorie der euklidischen Vektorräume üblich ist. Für die Schulmathematik ist es jedoch wichtig zu zeigen, dass die arithmetischen Definitionen mit den elementargeometrischen äquivalent sind.

Beschreibung von Drehungen. Für $\omega \in \mathbb{R}$ sei T_ω die Drehung des \mathbb{R}^2 mit Drehwinkel ω und Drehmittelpunkt $\mathbf{0}$ bezüglich der positiven Orientierung, also

$$T_\omega(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \omega \\ \sin \omega \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$T_x(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = T_x(\mathbf{a}) + T_x(\mathbf{b}) \quad \text{und} \quad T_x(\lambda \mathbf{a}) = \lambda T_x(\mathbf{a}),$$

d. h., $T_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung (Verifikation an Hand der geometrischen Anschauung!). Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_2 = T_{\pi/2}(\mathbf{e}_1),$$

also

$$\begin{aligned} T_\omega \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= xT_\omega(\mathbf{e}_1) + yT_\omega(\mathbf{e}_2) = xT_\omega(\mathbf{e}_1) + yT_{\omega+\frac{\pi}{2}}(\mathbf{e}_1) \\ &= x \begin{pmatrix} \cos \omega \\ \sin \omega \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \cos(\omega + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\omega + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \omega - y \sin \omega \\ x \sin \omega + y \cos \omega \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$T_\omega \left(\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \omega - \sin \alpha \sin \omega \\ \cos \alpha \sin \omega + \sin \alpha \cos \omega \end{pmatrix} = T_{\alpha+\omega}(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \omega) \\ \sin(\alpha + \omega) \end{pmatrix}.$$

Dies beweist die Additionstheoreme für die Winkelfunktionen.

4.4 Differentiation der Winkelfunktionen

Satz. Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

und

$$\cos'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x.$$

Auf Grund des Additionstheorems für die Sinusfunktion ist

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= -\sin x \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}, \end{aligned}$$

und aus den Grenzwertformeln folgt $\sin'(x) = \cos x$. Die Formel für den Kosinus leitet man entweder genauso her, oder man rechnet

$$\cos'(x) = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Kapitel 5. INHALTSLEHRE UND INTEGRALRECHNUNG

5.1 Affine Räume

Affine Räume. Sei $d \in \mathbb{N}$ (für die Schule sind die Fälle $d = 2$ und $d = 3$ von besonderem Interesse). Wir schreiben die Elemente von \mathbb{R}^d als Spaltenvektoren

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d)^t$$

und interpretieren sie geometrisch als Punkte (dann bezeichnen wir sie mit Großbuchstaben) oder als Vektoren, welche durch Pfeile repräsentiert sind (wie in Abschnitt 4.3). Für zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^d$ ist dann

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

der durch den Pfeil (P, Q) repräsentierte Vektor,

$$PQ = \{P + t(Q - P) \mid t \in [0, 1]\} = \{\lambda P + \mu Q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \lambda + \mu = 1\}$$

ist die Strecke zwischen P und Q , und im Falle $P \neq Q$ ist

$$(PQ) = \{P + t(Q - P) \mid t \in \mathbb{R}\} = P + \mathbb{R} \overrightarrow{PQ}$$

die Verbindungsgerade von P und Q (die Vektoren $t \overrightarrow{PQ}$ mit $0 \neq t \in \mathbb{R}$ heißen die *Richtungsvektoren* dieser Geraden).

Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ sei $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ das Skalarprodukt und $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ die euklidische Länge. Für $P, Q \in \mathbb{R}^d$ ist dann $|\overrightarrow{PQ}| = |P - Q|$ die Distanz von P und Q oder die Länge der Strecke PQ . Für zwei nicht-leere Teilmengen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$ nennt man

$$\text{dist}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{|A - B| \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

den *Abstand* von \mathcal{A} und \mathcal{B} (diese Definition ist insbesondere sinnvoll, wenn \mathcal{A} oder \mathcal{B} einpunktig sind). Sind \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei nicht-leere kompakte Teilmengen von \mathbb{R}^d , so ist genau dann $\text{dist}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, wenn $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

Eine Abbildung $\beta: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt *Ähnlichkeitsabbildung*, wenn es ein $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass $|P^\beta - Q^\beta| = \rho |P - Q|$ für alle $P, Q \in \mathbb{R}^d$ (wir bezeichnen wieder mit B^β das Bild von B unter β). $\rho = \rho_\beta$ heißt *Verzerrungsfaktor* von β . β heißt *Bewegung* oder *Kongruenzabbildung*, wenn $\rho_\beta = 1$.

Genau dann ist eine Abbildung $\beta: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Ähnlichkeitsabbildung mit Verzerrungsfaktor ρ , wenn es eine orthogonale Matrix $T \in O(n)$ und einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ gibt, so dass $\mathbf{x}^\beta = \rho T \mathbf{x} + \mathbf{b}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Ist $\rho = 1$ (also β eine Bewegung) und $T = I$ die Einheitsmatrix, so nennt man β eine *Translation*.

Die Menge Sim_d der Ähnlichkeitsabbildungen des \mathbb{R}^d ist bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe, $\rho: \text{Sim}_d \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, die Menge Bew_d der Bewegungen des \mathbb{R}^d ist ein Normalteiler von Sim_d , und die Menge Trans_d der Translationen ist eine zu \mathbb{R}^d isomorphe Untergruppe von Bew_d . Zwei Teilmengen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$ heißen *kongruent*, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, wenn es eine Bewegung β gibt mit $\mathcal{A}^\beta = \mathcal{B}$.

Einen Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ heißt *affiner Teilraum*, wenn \mathcal{A} mit je zwei verschiedenen Punkten P, Q auch ihre Verbindungsgerade (PQ) enthält. Genau dann ist $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ ein affiner Teilraum, wenn entweder $\mathcal{A} = \emptyset$ oder $\mathcal{A} = P + \mathcal{U}$ mit $P \in \mathbb{R}^d$ und einem Untervektorraum $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ gibt. Dann ist $\mathcal{U} = \{Q - P \mid P, Q \in \mathcal{A}\}$, also \mathcal{U} durch \mathcal{A} eindeutig bestimmt. Man nennt \mathcal{U} den *Tangententialraum* von \mathcal{A} und $\dim \mathcal{A} = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U}$ die *Dimension* von \mathcal{A} . Man setzt $\dim \emptyset = -1$.

Spezialfälle:

- $\dim \mathcal{A} = 0$: \mathcal{A} ist einpunktig.
- $\dim \mathcal{A} = 1$: \mathcal{A} ist eine Gerade.
- $\dim \mathcal{A} = 2$: \mathcal{A} ist eine (euklidische) Ebene.
- $\dim \mathcal{A} = d - 1$: \mathcal{A} ist eine Hyperebene im \mathbb{R}^d .

Im Falle $d = 2$ sind Geraden und Hyperebenen dasselbe (das macht die Besonderheit der ebenen Geometrie aus). Im Falle $d = 3$ sind Hyperebenen die Ebenen im \mathbb{R}^3 .

Für eine Teilmenge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ sei $\text{Aff}(\mathcal{C})$ der kleinste \mathcal{C} enthaltenden affine Teilraum von \mathbb{R}^d . Ist $P \in \mathcal{C}$, so folgt

$$\begin{aligned} \text{Aff}(\mathcal{C}) &= \{P + \lambda_1 \overrightarrow{PP_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{PP_k} \mid P_1, \dots, P_k \in \mathcal{C}, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n \mid P_1, \dots, P_n \in \mathcal{C}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\}. \end{aligned}$$

Ist $\mathcal{C} = \{P, Q\}$ mit $P \neq Q$, so folgt $\text{Aff}(\mathcal{C}) = (PQ)$.

Hauptsatz über affine Teilräume. Sei $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ und $k \in \{0, \dots, d - 1\}$.

A. Parameterdarstellung. Genau dann ist \mathcal{A} ein k -dimensionaler affiner Teilraum, wenn es einen Punkt $P \in \mathbb{R}^d$ und k linear unabhängige Vektoren $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^d$ gibt mit

$$\mathcal{A} = \{P + t_1 \mathbf{u}_1 + \dots + t_k \mathbf{u}_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}.$$

B. Gleichungsdarstellung. Genau dann ist \mathcal{A} ein k -dimensionaler affiner Teilraum, wenn es $d - k$ linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{d-k} \in \mathbb{R}^d$ und $c_1, \dots, c_{d-k} \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{a}_1 \cdot X = c_1, \dots, \mathbf{a}_{d-k} \cdot X = c_{d-k}\}.$$

Hyperebenen und Hesse'sche Normalform. Für $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ mit $|\mathbf{u}| = 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}, \alpha} = \{X \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{u} \cdot X = \alpha\}$$

eine Hyperebene, und jede Hyperebene des \mathbb{R}^d ist von dieser Form. \mathbf{u} heißt ein *Normaleneinheitsvektor* von $\mathcal{H}_{\mathbf{u},\alpha}$. Ist $P \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbf{u},\alpha}$, so folgt $\mathbf{u} \cdot P = \alpha$, also

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{u} \cdot (X - P) = 0\},$$

und man nennt

$$\mathcal{H}^+ = \{X \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{u} \cdot (X - P) \geq 0\} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}^- = \{X \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{u} \cdot (X - P) \leq 0\}$$

die beiden durch \mathcal{H} bestimmten (abgeschlossenen) Halbräume von \mathbb{R}^d . Im Falle $d = 2$ ist das mit der elementargeometrischen Definition der abgeschlossenen Halbebenen konsistent.

Abstandsformel. Sei $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ mit $|\mathbf{u}| = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbf{u},\alpha}$, $Y \in \mathbb{R}^d$ und $t = \alpha - \mathbf{u} \cdot Y$.

- i) $F = Y + t\mathbf{u}$ ist der Fußpunkt des Lotes von Y auf \mathcal{H} .
- ii) $\text{dist}(Y, \mathcal{H}) = |Y - F| = |\mathbf{u} \cdot Y - \alpha|$.

Beweis: Nach Definition ist $Y + \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}$ das Lot von Y auf \mathcal{H} . Ist F der Fußpunkt dieses Lotes auf \mathcal{H} , so folgt $F = Y + \lambda\mathbf{u}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\alpha = \mathbf{u} \cdot F = \mathbf{u} \cdot Y + \mathbf{u} \cdot \lambda\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot Y + \lambda, \quad \text{also} \quad \lambda = t.$$

Offensichtlich ist $|Y - F| = |t| = |\mathbf{u} \cdot Y - \alpha|$. Daher genügt es, zu zeigen: Für alle $X \in \mathcal{H}$ ist $|Y - X| \geq |t|$. Ist $X \in \mathcal{H}$, so ist $\mathbf{u} \cdot (X - F) = 0$ und daher $|Y - X|^2 = (F - X - t\mathbf{u})^2 = (F - X)^2 + t^2 \geq |t|^2$.

5.2 Polyeder

Konvexe Polyeder. Eine Teilmenge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ heißt *konvex*, wenn gilt: Aus $P, Q \in \mathcal{C}$ folgt $PQ \subset \mathcal{C}$. Eine konvexe und kompakte Teilmenge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ heißt *Eikörper*. Für eine beliebige Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ sei $\text{conv}(\mathcal{A})$ die kleinste \mathcal{A} enthaltende konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^d . $\text{conv}(\mathcal{A})$ heißt *konvexe Hülle von \mathcal{A}* . $\text{conv}(\mathcal{A})$ ist der Durchschnitt aller \mathcal{A} enthaltenden konvexen Mengen. Ist $\mathcal{C} = \text{conv}(\mathcal{A})$, so ist $\text{Aff}(\mathcal{C}) = \text{Aff}(\mathcal{A})$, und man nennt $\dim \mathcal{C} = \dim \text{Aff}(\mathcal{C})$ die *Dimension von \mathcal{C}* .

Eine Teilmenge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ heißt *konvexes Polyeder*, wenn $\mathcal{C} = \text{conv}(\mathcal{E})$ für eine endliche Menge $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^d$ ist. Sind $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}^d$, so ist

$$\text{conv}(P_1, \dots, P_k) = \{\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1\}.$$

Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexes Polyeder. Ein Punkt $P \in \mathcal{C}$ heißt *Ecke von \mathcal{C}* , wenn für je zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathcal{C}$ gilt: Aus $P \in AB$ folgt $P \in \{A, B\}$. Die Menge $e(\mathcal{C})$ der Ecken von \mathcal{C} ist endlich. Ist $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^d$, so ist genau dann $\mathcal{C} = \text{conv}(\mathcal{E})$, wenn $e(\mathcal{C}) \subset \mathcal{E}$. \mathcal{C} heißt *d-dimensionales Simplex*, wenn $\dim \mathcal{C} = d$

und \mathcal{C} die konvexe Hülle von $d+1$ Punkten ist ($d=2$: Dreieck; $d=3$: schiefes Tetraeder).

Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexes Polyeder. Dann ist \mathcal{C} ein Eikörper, und für jeden affinen Teilraum $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ ist $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}$ ein konvexes Polyeder. Genau dann besitzt \mathcal{C} keine inneren Punkte, wenn $\dim \mathcal{C} < d$; in diesem Falle heißt \mathcal{C} *ausgeartet*.

Sei \mathcal{C} ein nicht-ausgeartetes konvexes Polyeder. Ein konvexes Polyeder \mathcal{C}' heißt *Seitenfläche von \mathcal{C}* , wenn es eine Hyperebene \mathcal{H} und einen durch diese Hyperebene bestimmten Halbraum $\mathcal{H}^+ \subset \mathbb{R}^d$ gibt, so dass $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}^+$, $\dim(\mathcal{C} \cap \mathcal{H}) = d-1$ und $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \mathcal{H}$; man nennt dann \mathcal{H} die *Stützhyperebene* und \mathcal{H}^+ den *Stützhalbraum* zur Seitenfläche \mathcal{C}' .

Ein nicht-ausgeartetes konvexes Polyeder \mathcal{C} besitzt endlich viele Seitenflächen $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$; sind $\mathcal{H}_1^+, \dots, \mathcal{H}_m^+$ die zugehörigen Stützhalbräume, so ist

$$\text{Rd}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_m \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \mathcal{H}_1^+ \cap \dots \cap \mathcal{H}_m^+.$$

Polyeder. Eine Teilmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ heißt *Polyeder*, wenn \mathcal{P} Vereinigung endlich vieler konvexer Polyeder ist. Ein Polyeder heißt

- *ausgeartet*, wenn $\overset{\circ}{\mathcal{P}} = \emptyset$ (äquivalent: \mathcal{P} ist Vereinigung endlich vieler ausgearteter konvexer Polyeder);
- *rein k -dimensional*, wenn \mathcal{P} Vereinigung endlich vieler k -dimensionaler konvexer Polyeder ist;
- *eigentlich*, wenn \mathcal{P} rein d -dimensional ist.

Sei \mathcal{P} ein eigentliches Polyeder. Dann ist $\text{Rd}(\mathcal{P})$ ein rein $(d-1)$ -dimensionales Polyeder und hat daher eine Darstellung $\text{Rd}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_m$ mit $(d-1)$ -dimensionalen Polyedern $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$, die in verschiedenen Hyperebenen liegen. Dann sind $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$ durch \mathcal{P} eindeutig bestimmt und heißen die *Seitenflächen von \mathcal{P}* (für konvexe Polyeder stimmt diese Definition mit der oben gegebenen überein).

Elementargeometrische Zerlegungen. Sei \mathcal{P} ein Polyeder. Eine *elementargeometrische Zerlegung* von \mathcal{P} ist eine endliche Menge $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m\}$ von Polyedern, so dass gilt:

- 1) $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_m$.
- 2) Für alle $i, j \in [1, m]$ mit $i \neq j$ ist $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j$ ein ausgeartetes Polyeder.

Ist $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m\}$ eine elementargeometrische Zerlegung von \mathcal{P} , so schreibt man

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_m.$$

Jedes eigentliches Polyeder besitzt eine elementargeometrische Zerlegung in Simplexe.

Zwei Polyeder im \mathcal{P} und \mathcal{Q} heißen

- *zerlegungsgleich*, wenn es elementargeometrische Zerlegungen $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_m$ und $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{Q}_m$ gibt, so dass $\mathcal{P}_j \equiv \mathcal{Q}_j$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$;

- *ergänzungsgleich*, wenn es zwei zerlegungsgleiche Polyeder $\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*$ und elementargeometrische Zerlegungen $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}' \oplus \mathcal{P}''$, $\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}' \oplus \mathcal{Q}''$ gibt derart, dass $\mathcal{P}' \equiv \mathcal{P}$, $\mathcal{Q}' \equiv \mathcal{Q}$ und die Polyeder $\mathcal{P}'', \mathcal{Q}''$ zerlegungsgleich sind.

Satz von Sydler. Zwei Polyeder sind genau dann ergänzungsgleich, wenn sie zerlegungsgleich sind.

5.3 Elementarer Inhalt von Polyedern.

Definition. Sei $d \in \mathbb{N}$ und Pol_d die Menge der Polyeder des \mathbb{R}^d . Eine Abbildung $V_d: \text{Pol}_d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt (*elementarer d -dimensionaler*) *Polyederinhalt*, wenn für alle $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \text{Pol}_d$ gilt:

- I1. (Translationsinvarianz) Für jede Translation β ist $V_d(\mathcal{P}^\beta) = V_d(\mathcal{P})$.
- I2. (Additivität) Aus $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ folgt $V_d(\mathcal{P}) = V_d(\mathcal{P}_1) + V_d(\mathcal{P}_2)$.
- I3. (Normierung) Es ist $V_d([0, 1]^d) = 1$.

Hauptsatz über den elementaren Polyederinhalt. Es gibt genau einen d -dimensionalen Polyederinhalt $V_d: \text{Pol}_d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für alle $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{P}_1, \dots \in \text{Pol}_d$ gilt:

- i) Aus $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_m$ folgt $V_d(\mathcal{P}) = V_d(\mathcal{P}_1) + \dots + V_d(\mathcal{P}_m)$.
Insbesondere haben zerlegungsgleiche Polyeder denselben Inhalt. Im Falle $d = 2$ sind Polyeder mit demselben Inhalt auch zerlegungsgleich (für $d > 2$ ist das falsch).
- ii) Aus $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ folgt $V_d(\mathcal{P}) \leq V_d(\mathcal{P}')$.
- iii) Ist $\beta: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Ähnlichkeitsabbildung mit Verzerrungsfaktor ρ , so ist $V_d(\mathcal{P}^\beta) = \rho^d V_d(\mathcal{P})$.
- iv) Genau dann ist $V_d(\mathcal{P}) = 0$, wenn \mathcal{P} ausgeartet ist.

Beweisidee. Der Beweis der Existenz und Eindeutigkeit erfolgt durch Induktion nach d .

$d = 1$: Jedes $\mathcal{P} \in \text{Pol}_1$ ist disjunkte Vereinigung abgeschlossener Intervalle, $\mathcal{P} = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \dots \cup [a_m, b_m]$ mit $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \dots < a_m \leq b_m$, und man setzt $V_1(\mathcal{P}) = (b_1 - a_1) + \dots + (b_m - a_m)$.

$d \geq 2$, $d - 1 \rightarrow d$: Sei zunächst $\mathcal{P} \in \text{Pol}_d$ konvex und nicht-ausgeartet, seien $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$ die Seitenflächen von \mathcal{P} und $M \in \mathcal{P}$. Für $j \in \{1, \dots, m\}$ sei $\mathcal{H}_j = \text{Aff}(\mathcal{P}_j)$, $h_j = \text{dist}(M, \mathcal{H}_j)$ und $\theta_j: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ eine Isometrie (etwa vermittelt durch ein cartesisches Koordinatensystem in \mathcal{H}_j). Dann ist $\theta_j \mathcal{P}_j \in \text{Pol}_{d-1}$, und man setzt

$$V_d(\mathcal{P}) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^m V_{d-1}(\theta_j \mathcal{P}_j) h_j.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von M und θ_j .

Ist $\mathcal{P} \in \text{Pol}_d$ beliebig, so besitzt \mathcal{P} eine elementargeometrische Zerlegung $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_k \oplus \mathcal{P}'$ mit konvexen nicht-ausgearteten Polyedern $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ und einem ausgearteten Polyeder \mathcal{P}' ; dann setzt man

$$V_d(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k V_d(\mathcal{P}_i).$$

Diese Definition ist unabhängig von der gewählten elementargeometrischen Zerlegung.

Nun sind **I1.**, **I2.** und **I3.** zu verifizieren und die Eindeutigkeit nachzuweisen. Im Detail ist das lang und schwierig.

Von den zusätzlichen Eigenschaften sind zunächst **i)** und **ii)** leicht zu zeigen.

iii) ergibt sich aus der Eindeutigkeit des elementaren Polyederinhaltes wie folgt: Ist β eine Ähnlichkeitsabbildung mit Verzerrungsfaktor ρ und definiert man $V_d^*: \text{Pol}_d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch $V_d^*(\mathcal{P}) = \rho^{-d} V_d(\mathcal{P}^\beta)$, so ist V_d^* wieder ein elementarer Polyederinhalt.

Für den Nachweis von **iv)** genügt es nach Konstruktion, $V_d(\mathcal{P}) > 0$ für nicht-ausgeartete konvexe Polyeder zu zeigen. Ist aber \mathcal{P} ein nicht-ausgeartetes konvexes Polyeder, so gibt es eine Ähnlichkeitsabbildung β mit $([0, 1]^d)^\beta \subset \mathcal{P}$.

Didaktische Bemerkungen. Die Aussagen des Hauptsatzes sind bis auf **iii)** anschaulich evident und sollten in der Schule der Anschauung entnommen werden. Es ist aber wesentlich, sie präzise zu formulieren und dann zur Aufstellung konkreter Inhaltsformeln zu verwenden.

Zum Beweis von **iii)** kann in konkreten Fällen wie folgt argumentiert werden. Sei β eine Ähnlichkeitsabbildung, $\rho = \rho(\beta)$ und $\mathcal{P} \in \text{Pol}_d$. Hat man für $V_d(\mathcal{P})$ eine Formel der Gestalt $V_d(\mathcal{P}) = \lambda c_1 \cdot \dots \cdot c_d$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $c_j = \overline{A_j B_j}$ für gewisse Punkte $A_j, B_j \in \mathcal{P}$, so folgt $V_d(\mathcal{P}^\beta) = \lambda c'_1 \cdot \dots \cdot c'_d$ mit $c'_j = \overline{A_j^\beta B_j^\beta} = \rho \overline{A_j B_j} = \rho c_j$.

Definition der Oberfläche. Sei $\mathcal{P} \in \text{Pol}_d$ ein eigentliches Polyeder mit den Seitenflächen $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$. Für $j \in [1, m]$ sei $\mathcal{H}_j = \text{Aff}(\mathcal{P}_j)$ und $\theta_j: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ eine Isometrie. Dann heißt

$$O(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m V_{d-1}(\theta_j \mathcal{P}_j)$$

die *Oberfläche* von \mathcal{P} .

Monotonie der Oberfläche. Seien \mathcal{P} und \mathcal{P}' eigentliche konvexe Polyeder mit $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$. Dann ist $O(\mathcal{P}) \leq O(\mathcal{P}')$.

Beweisidee: Induktion nach der Anzahl der Stützhyperebenen von \mathcal{P} , die nicht Stützhyperebenen von \mathcal{P}' sind. Ist jede Stützhyperebene von \mathcal{P} auch eine Stützhyperebene von \mathcal{P}' , so folgt $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$. Sei \mathcal{H} eine Stützhyperebene von \mathcal{P} , die nicht Stützhyperebene von \mathcal{P}' ist, und sei \mathcal{H}^+ der zugehörige Stützhälbraum von \mathcal{P} . Dann ist $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \cap \mathcal{H}^+$ und nach Induktionsvoraussetzung

$O(\mathcal{P}) \leq O(\mathcal{P}' \cap \mathcal{H}^+)$. Die Behauptung folgt nun wegen $O(\mathcal{P}') \geq O(\overline{\mathcal{P}} \cap \mathcal{H}^+)$ (das gilt im Falle $d = 2$ wegen der Dreiecksungleichung, im allgemeinen Falle wegen einer geometrisch leicht einsichtlichen Verallgemeinerung derselben: "die Fläche einer Zeltplane ist stets mindestens so groß wie die Grundfläche des Zeltes"). Die Voraussetzung der Konvexität ist notwendig.

Elementare Flächenberechnungen. Ein *Polygon* ist ein eigentliches Polyeder $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$. Man nennt $A(\mathcal{P}) = V_2(\mathcal{P})$ seine *Fläche* und $U(\mathcal{P}) = F(\mathcal{P})$ seinen *Umfang*. Ein (*konvexes*) *k-eck* ist ein konvexes Polygon \mathcal{P} mit $|e(\mathcal{P})| = k$. Jedes Polygon besitzt eine elementargeometrische Zerlegung in Dreiecke. Daher genügt es, den Flächeninhalt von Dreiecken auszurechnen. Die Herleitung der Flächenformel für Dreiecke erfolgt in folgenden Schritten.

1) Sei $N \in \mathbb{N}$. Das Einheitsquadrat besitzt eine elementargeometrische Zerlegung in N^2 Quadrate der Seitenlänge $1/N$. Da diese alle zueinander kongruent sind, gilt für jedes Quadrat $Q_{1/N}$ der Seitenlänge $1/N$

$$A(Q_{1/N}) = \left(\frac{1}{N}\right)^2.$$

2) Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, und sei \mathcal{R} ein Rechteck mit den Seiten a und b . Dann ist

$$A(\mathcal{R}) = ab.$$

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Sind $a, b \in \mathbb{Q}$, etwa $a = r/N$, $b = s/N$ mit $r, s, N \in \mathbb{N}$, so besitzt \mathcal{R} eine elementargeometrische Zerlegung in rs Quadrate der Seitenlänge $1/N$, also ist $A(\mathcal{R}) = rs \cdot (1/N)^2 = ab$. Im allgemeinen Fall seien $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ die dezimalen Näherungen von a, b . Dann gibt es Rechtecke \mathcal{R}_n mit Seiten a_n, b_n und $\overline{\mathcal{R}_n}$ mit Seiten $a_n + 10^{-n}, b_n + 10^{-n}$ so dass $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R} \subset \overline{\mathcal{R}_n}$, und es folgt $a_n b_n \leq A(\mathcal{R}) \leq (a_n + 10^{-n})(b_n + 10^{-n}) \leq (a + 10^{-n})(b + 10^{-n})$ und daraus die Behauptung für $n \rightarrow \infty$. Didaktische Bemerkung: Auch in der Schule sollte darauf hingewiesen werden, dass hier ein Stetigkeitsargument nötig ist!

3) Ein Parallelogramm \mathcal{P} mit Seite a und zugehöriger Höhe h_a ist ergänzungsgleich zu einem Rechteck mit den Seiten a und h_a , also folgt

$$A(\mathcal{P}) = ah_a.$$

Verwendet man die Seite b und die zugehörige Höhe h_b , so folgt $ah_a = bh_b$. Diese Formel erhält man aber auch direkt aus dem Strahlensatz ohne Verwendung eines Inhaltsbegriffes.

4) Zu einem Dreieck \mathcal{D} mit Seite c und Höhe h_c gibt es ein Parallelogramm \mathcal{P} und ein Dreieck \mathcal{D}' mit $\mathcal{P} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}'$ und $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}'$, also folgt

$$A(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} ch_c.$$

Dasselbe Argument mit einer der beiden anderen Seiten ergibt $ah_a = bh_b = ch_c$. Das folgt wieder auch direkt aus dem Strahlensatz ohne Verwendung eines Inhaltsbegriffes.

Elementare Volumsberechnungen. Für ein eigentliches Polyeder $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ nennt man $V(\mathcal{P}) = V_3(\mathcal{P})$ sein *Volumen*.

Ist $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon und $h \in \mathbb{R}_{>0}$, so nennt man jedes zu $\mathcal{G} \times [0, h]$ kongruente Polyeder $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ ein *gerades Prisma mit Grundfläche \mathcal{G} und Höhe h* . Es gelten die Formeln

$$V(\mathcal{P}) = A(\mathcal{G})h \quad \text{und} \quad O(\mathcal{P}) = 2A(\mathcal{G}) + U(\mathcal{G})h.$$

Für den Beweis kann man $\mathcal{P} = \mathcal{G} \times [0, h]$ annehmen. Sei $\text{Rd}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_m$ mit Strecken \mathcal{G}_j der Länge $d_j \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann folgt

$$\text{Rd}(\mathcal{P}) = (\mathcal{G} \times \{0\}) \oplus (\mathcal{G} \times \{h\}) \oplus (\mathcal{G}_1 \times [0, h]) \oplus \dots \oplus (\mathcal{G}_m \times [0, h])$$

und daraus die Formel für die Oberfläche.

Zum Beweis der Volumsformel betrachtet man zunächst den Fall eines Quaders (da ist \mathcal{G} ein Rechteck) und argumentiert wie bei der Herleitung der Flächenformel für Rechtecke (mit Würfeln der Seitenlänge $1/N$ und einem Stetigkeitsargument). Dann behandelt man den Fall des Parallelogramms und des Dreiecks und folgert daraus die allgemeine Formel unter Verwendung der folgenden (offensichtlichen) Tatsache: Ist $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_m$ eine elementargeometrische Zerlegung, so auch $\mathcal{G} \times [0, h] = \mathcal{G}_1 \times [0, h] \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_m \times [0, h]$.

Die Berechnung der Volumina von schiefen Prismen und Pyramiden mit den bisher dargestellten Methoden ist schwierig. Man benötigt dazu zum mindesten das Prinzip von Cavalieri (das aber nicht nur für Polyeder gilt). Wir behandeln zunächst allgemeinere Konzepte.

5.4 Jordan'scher Inhalt und Lebesgue'sches Maß.

Definition. Sei $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ eine beschränkte Menge. Für $N \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{Z}^d$ sei

$$W_{\mathbf{l}, N} = \left[\frac{l_1}{N}, \frac{l_1 + 1}{N} \right] \times \dots \times \left[\frac{l_d}{N}, \frac{l_d + 1}{N} \right]$$

der Würfel mit Kantenlänge $1/N$ und Basisecke \mathbf{l} ,

$$\overline{W}_N(\mathcal{A}) = \bigoplus_{\substack{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d \\ W_{\mathbf{l}, N} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset}} W_{\mathbf{l}, N}, \quad \overline{J}_N(\mathcal{A}) = V_d(\overline{W}_N(\mathcal{A}))$$

und

$$\underline{W}_N(\mathcal{A}) = \bigoplus_{\substack{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d \\ W_{\mathbf{l}, N} \subset \mathcal{A}}} W_{\mathbf{l}, N}, \quad \underline{J}_N(\mathcal{A}) = V_d(\underline{W}_N(\mathcal{A})).$$

Dann ist $\overline{W}_N(\mathcal{A}) \supset \mathcal{A} \supset \underline{W}_N(\mathcal{A})$, die Folge $(\overline{J}_N(\mathcal{A}))_{N \geq 1}$ ist monoton fallend, und die Folge $(\underline{J}_N(\mathcal{A}))_{N \geq 1}$ ist monoton wachsend. Man nennt $\underline{W}_N(\mathcal{A})$ ein

inneres und $\overline{W}_N(\mathcal{A})$ ein äußeres approximierendes Würfelnetz von \mathcal{A} der Feinheit $1/N$. Ist $([\underline{J}_N(\mathcal{A}), \overline{J}_N(\mathcal{A})])_{N \geq 1}$ eine Intervallschachtelung, so heißt \mathcal{A} Jordan-messbar und

$$J(\mathcal{A}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{J}_N(\mathcal{A}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \underline{J}_N(\mathcal{A})$$

heißt *Jordan'scher Inhalt* von \mathcal{A} .

Eigenschaften des Jordan'schen Inhaltes.

- i) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar, so sind auch $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ Jordan-messbar, und es ist

$$J(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = J(\mathcal{A}) + J(\mathcal{B}) - J(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}).$$

- ii) Ist $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar und $\beta: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Ähnlichkeitsabbildung mit Verzerrungsfaktor $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, so ist auch \mathcal{A}^β Jordan-messbar, und $J(\mathcal{A}^\beta) = \rho^d J(\mathcal{A})$.
- iii) Ist $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ ein Polyeder, so ist \mathcal{P} Jordan-messbar, und $J(\mathcal{P}) = V_d(\mathcal{P})$.
- iv) Jeder Eikörper ist Jordan-messbar. Genauer gilt: Ist $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ ein Eikörper, $\Pi_*(\mathcal{C})$ die Menge aller konvexen nicht-ausgearteten Polyeder \mathcal{P} mit $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ und $\Pi^*(\mathcal{C})$ die Menge aller konvexen nicht-ausgearteten Polyeder \mathcal{P} mit $\mathcal{P} \supset \mathcal{C}$, so folgt

$$J(\mathcal{C}) = \sup\{J(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \Pi_*(\mathcal{C})\} = \inf\{J(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \Pi^*(\mathcal{C})\}.$$

Definition. Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ offen. Für $N \in \mathbb{N}$ sei

$$\underline{J}_N(\mathcal{U}) = |\{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d \mid W_{\mathbf{l}, N} \subset \mathcal{U}\}| N^{-d} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

(man beachte die Verträglichkeit mit obiger Definition, falls \mathcal{U} beschränkt ist), und

$$\lambda(\mathcal{U}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \underline{J}_N(\mathcal{U}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Für eine kompakte Menge $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ sei

$$\lambda(\mathcal{K}) = \inf\{\lambda(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d \text{ offen, } \mathcal{U} \supset \mathcal{K}\}.$$

Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ heißt *Lebesgue-messbar*, wenn

$$\begin{aligned} \lambda(\mathcal{A}) &= \sup\{\lambda(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \subset \mathcal{A}, \mathcal{K} \text{ kompakt}\} \\ &= \inf\{\lambda(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d \text{ offen, } \mathcal{U} \supset \mathcal{A}\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

Man nennt dann $\lambda(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ das *Lebesgue'sche Maß* von \mathcal{A} . Ist $\lambda(\mathcal{A}) < \infty$, so heißt \mathcal{A} *quadrierbar*.

Eigenschaften des Lebesgue'schen Maßes.

- i) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar, so sind auch $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ Lebesgue-messbar, und es ist

$$\lambda(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) + \lambda(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \lambda(\mathcal{A}) + \lambda(\mathcal{B}).$$

- ii) Ist $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar und $\beta: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Ähnlichkeitsabbildung mit Verzerrungsfaktor $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, so ist auch \mathcal{A}^β Lebesgue-messbar, und $\lambda(\mathcal{A}^\beta) = \rho^d \lambda(\mathcal{A})$.
- iii) Ist $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar und beschränkt, so ist $\lambda(\mathcal{A}) < \infty$.
- iv) Jede kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^d ist Lebesgue-messbar.
- v) Ist $\emptyset \neq \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, so ist \mathcal{U} Lebesgue-messbar, $\lambda(\mathcal{U}) > 0$, und es gibt eine Teilmenge von \mathcal{U} , die nicht Lebesgue-messbar ist.
- vi) Ist $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar, $\lambda(\mathcal{A}) = 0$ und $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, so ist auch \mathcal{B} Lebesgue-messbar und $\lambda(\mathcal{B}) = 0$.
- vii) Ist $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 1}$ eine Folge paarweiser disjunkter Lebesgue-messbarer Teilmengen des \mathbb{R}^d , so ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ Lebesgue-messbar, und

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\mathcal{A}_n).$$

- viii) Ist $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar, so ist \mathcal{A} Lebesgue-messbar, und $\lambda(\mathcal{A}) = J(\mathcal{A})$.

Der Jordan'sche Inhalt ist auf Grund seiner Definition durch approximierende Würfelnetze geometrisch anschaulicher als das Lebesgue'sche Maß. Mit dem Lebesgue'schen Maß kann man aber (im Gegensatz zum Jordan'schen Inhalt) alle kompakten Mengen und auch nicht notwendig beschränkte Mengen messen. Der Nachweis der Jordan-Messbarkeit einer Menge $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ ist im allgemeinen schwierig. Das Verhalten des Jordan'schen Inhaltes und des Lebesgue'schen Maßes bei Ähnlichkeitsabbildungen folgt unmittelbar mittels der approximierenden Würfelnetze.

Konvention. Im folgenden schreiben wir stets V_d an Stelle von λ oder J , A an Stelle von V_2 und V an Stelle von V_3 .

Exhaustion. Sei $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 1}$ eine Folge Lebesgue-messbarer Mengen mit

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3 \subset \dots \quad \text{und} \quad A = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n.$$

Dann ist \mathcal{A} Lebesgue-messbar, und

$$V_d(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_d(\mathcal{A}_n).$$

Obwohl das Exhaustionsprinzip anschaulich offensichtlich ist, ist ein strenger Beweis nur im Rahmen der Lebesgue'schen Theorie möglich.

Flächen- und Volumsberechnungen. 1) Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $\mathcal{K}_r \subset \mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe mit Radius r . Ist $\mathcal{K} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |X| \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe

(in "Mittelpunktslage"), so gibt es eine Ähnlichkeitsabbildung $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{K}_r = \mathcal{K}^\beta$. Ist $\pi = A(\mathcal{K})$, so folgt

$$A(\mathcal{K}_r) = \pi r^2.$$

Die Berechnung von π erfolgt durch Approximation der Einheitskreisscheibe durch regelmäßige einbeschriebene und umbeschriebene Vielecke (Methoden von Cusanus und Archimedes).

2) Sei $\mathcal{S}_{r,\alpha}$ ein Kreissektor mit Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und Zentriwinkel $\alpha \in (0, 2\pi)$ (d. h., es gibt eine Kreislinie $k(M;r) \subset \mathbb{R}^2$ und einen Kreisbogen $b \subset k(M;r)$ mit Zentriwinkel α , so dass $\mathcal{S}_{r,\alpha} = \{M + \lambda X \mid X \in b, \lambda \in [0, 1]\}$). Dann ist

$$A(\mathcal{S}_{r,\alpha}) = r^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten: Ist $\alpha = (2\pi)/N$ mit $N \in \mathbb{N}$ und \mathcal{K}_r eine Kreisscheibe mit Radius r , so ist \mathcal{K}_r die Vereinigung von N zueinander kongruenten Kreissektoren mit Zentriwinkel α , wobei der Durchschnitt von je zweien den Inhalt 0 besitzt. Damit folgt $r^2\pi = N A(\mathcal{S}_{r,\alpha})$. Der allgemeine Fall folgt wieder mittels eines Stetigkeitsarguments.

3) Sei $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ Lebesgue-messbar und $h \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann heißt $\mathcal{P} = \mathcal{G} \times [0, h]$ ein (*gerades*) *Prisma mit Grundfläche \mathcal{G} und Höhe h* , und es ist

$$V(\mathcal{P}) = A(\mathcal{G})h.$$

Beweisskizze (im Falle der Jordan-Messbarkeit von \mathcal{G}): Für $N \in \mathbb{N}$ betrachte man die approximierenden Würfelnetze $\underline{\mathcal{W}}_N$ und $\overline{\mathcal{W}}_N$ der Feinheit $1/N$ von \mathcal{G} . Dann ist $\underline{\mathcal{W}}_N \times [0, h] \subset \mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{W}}_N \times [0, h]$, und $\underline{\mathcal{W}}_N \times [0, h]$, $\overline{\mathcal{W}}_N \times [0, h]$ sind Prismen mit polygonaler Grundfläche. Daher folgt die Behauptung wegen

$$V_2(\underline{\mathcal{W}}_N)h = V_3(\underline{\mathcal{W}}_N \times [0, h]) \leq V_3(\mathcal{P}) \leq V_3(\overline{\mathcal{W}}_N \times [0, h]) = V_2(\overline{\mathcal{W}}_N)h$$

und

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V_2(\underline{\mathcal{W}}_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} V_2(\overline{\mathcal{W}}_N) = V_2(\mathcal{G}).$$

5.5 Das Prinzip von Cavalieri.

Wir betrachten die Zerlegung $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ und schreiben die Punkte des \mathbb{R}^d in der Form

$$\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit } X \in \mathbb{R}^{d-1} \quad \text{und } y \in \mathbb{R}.$$

Für eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ und $y \in \mathbb{R}$ sei

$$\mathcal{A}_y = \left\{ X \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \right\}$$

die Niveaumenge von \mathcal{A} zum Niveau y .

Prinzip von Cavalieri. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{d-1} \times [a, b] \subset \mathbb{R}^d$ kompakte Teilmengen.

A. Quantitative Form. Die Funktion $y \mapsto V_{d-1}(\mathcal{A}_y)$ ist Lebesgue-integrierbar, und

$$V_d(\mathcal{A}) = \int_a^b V_{d-1}(\mathcal{A}_y) dy.$$

B. Qualitative Form. Sei $V_{d-1}(\mathcal{A}_y) = V_{d-1}(\mathcal{B}_y)$ für alle $y \in [a, b]$. Dann ist auch $V_d(\mathcal{A}) = V_d(\mathcal{B})$.

C. Additive Form. Sei $V_{d-1}(\mathcal{A}_y) = V_{d-1}(\mathcal{B}_y) + V_{d-1}(\mathcal{C}_y)$ für alle $y \in [a, b]$. Dann ist auch $V_d(\mathcal{A}) = V_d(\mathcal{B}) + V_d(\mathcal{C})$.

Bemerkungen zum Beweis. 1) Die Aussagen in **B.** und **C.** folgen unmittelbar aus der quantitativen Aussage in **A.** Diese gilt in voller Allgemeinheit nur für das Lebesgue'sche Maß, da die Niveaumengen einer Jordan-messbaren Menge nicht Jordan-messbar zu sein brauchen.

2) Aussage **C.** folgt aus **B.**, wenn $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$, denn dann ist $V_{d-1}(\mathcal{A}_y) = V_{d-1}((\mathcal{B} \cup \mathcal{C})_y)$ für alle $y \in [a, b]$ und daher $V_d(\mathcal{A}) = V_d(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = V_d(\mathcal{B}) + V_d(\mathcal{C})$. Im allgemeinen Fall braucht man nur \mathcal{C} durch ein geeignetes Translat

$$\mathcal{C} + \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{l} \in \mathbb{R}^{d-1}$$

zu ersetzen.

3) Für Eikörper hat man einen vom Integralbegriff unabhängigen Beweis von **B.**, welcher auf den approximierenden Würfelnetzen beruht. Grundidee: Haben \mathcal{A} und \mathcal{B} inhaltsgleiche Niveaumengen, so kann man jedes approximierende Würfelnetz von \mathcal{A} schichtenweise in eines von \mathcal{B} umbauen (Verfeinerung des "Bierdeckelarguments"). Präzise geht das wie folgt:

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{d-1} \times [a, b]$ Eikörper, und sei (ohne Einschränkung) $a = 0$ und $b = h \in \mathbb{N}$ (das kann man durch eine Translation und Vergrößerung des einschließenden Intervalls stets erreichen). Dann sind die Niveaumengen $\mathcal{A}_y, \mathcal{B}_y \subset \mathbb{R}^{d-1}$ wieder Eikörper, also Jordan-messbar. Sei

$$V_{d-1}(\mathcal{A}_y) = V_{d-1}(\mathcal{B}_y) \quad \text{für alle } y \in [0, h].$$

Es genügt, zu zeigen: Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $V_d(\mathcal{A}) \leq V_d(\mathcal{B}) + \varepsilon$. Sei also $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$V_d(\mathcal{A}) \leq V_d(\underline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{A})) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad V_d(\mathcal{B}) \geq V_d(\overline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{B})) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für alle $y \in [0, h]$ ist $\underline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{A})_y \subset \mathcal{A}_y \subset \overline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{A})_y$. Für $k \in [1, Nh]$ sei

$$y_k = \frac{1}{N} \left(k - \frac{1}{2} \right) \in \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right).$$

Dann ist $\overline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{A})_y = \overline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{A})_{y_k}$ und $\underline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{A})_y = \underline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{A})_{y_k}$ für alle $y \in (\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N})$,

$$\underline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{A}) = \bigoplus_{k=1}^{Nh} \underline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{A})_{y_k} \times \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right], \quad \overline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{A}) = \bigoplus_{k=1}^{Nh} \overline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{A})_{y_k} \times \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right].$$

Dieselben Relationen gelten auch für \mathcal{B} an Stelle von \mathcal{A} . Damit folgt

$$\begin{aligned} V_d(\mathcal{A}) &\leq V_d(\underline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{A})) + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{k=1}^{Nh} \frac{1}{N} V_{d-1}(\underline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{A})_{y_k}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{Nh} V_{d-1}(\mathcal{A}_{y_k}) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{Nh} V_{d-1}(\mathcal{B}_{y_k}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{Nh} \frac{1}{N} V_{d-1}(\overline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{B})_{y_k}) + \frac{\varepsilon}{2} = V_d(\overline{\mathcal{W}}_N(\mathcal{B})) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq V_d(\mathcal{B}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Die obige Schlussweise liefert auch die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{Nh} V_{d-1}(\mathcal{A}_{y_k}) - V_d(\mathcal{A}) \right| \leq \varepsilon.$$

Beachtet man, dass die Summe in dieser Ungleichung eine Riemann'sche Summe für die Funktion $y \mapsto V_{d-1}(\mathcal{A}_y)$ ist, so folgt die Riemann-Integrierbarkeit dieser Funktion und damit

$$V_d(\mathcal{A}) = \int_0^h V_{d-1}(\mathcal{A}_y) dy.$$

Anwendung des Prinzips von Cavalieri (ohne und mit Integralrechnung).

Im folgenden schreiben wir Punkte des \mathbb{R}^3 in der Form

$$\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad X \in \mathbb{R}^2 \quad y \in \mathbb{R}.$$

1) Schiefes Prisma. Sei $h \in \mathbb{R}_{>0}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Dann heißt

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} X + t\mathbf{b} \\ th \end{pmatrix} \mid X \in \mathcal{G}, t \in [0, 1] \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

ein *schiefes Prisma* mit Grundfläche \mathcal{G} , Höhe h und Verschiebungsvektor \mathbf{b} . Ist \mathcal{P}^* ein gerades Prisma mit Grundfläche \mathcal{G} und Höhe h , so gilt für alle $y \in [0, h]$

$$\mathcal{P}_y = \mathcal{G} + \frac{y}{h} \mathbf{b},$$

also folgt $A(\mathcal{P}_y) = A(\mathcal{G}) = A(\mathcal{P}_y^*)$ und daher $V(\mathcal{P}) = V(\mathcal{P}^*) = A(\mathcal{G})h$. Mit Hilfe der Integralrechnung folgt

$$V(\mathcal{P}) = \int_0^h A(\mathcal{G}) dy = A(\mathcal{G})h.$$

2) Pyramiden. Sei $h \in \mathbb{R}_{>0}$, $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ kompakt. Dann heißt

$$\mathcal{P} = \bigcup_{X \in \mathcal{G} \times \{0\}} XS = \left\{ \begin{pmatrix} (1-t)X + tS_0 \\ th \end{pmatrix} \mid X \in \mathcal{G}, t \in [0, 1] \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine *Pyramide mit Grundfläche \mathcal{G} , Spitze S und Höhe h* . Für $y \in [0, h]$ ist

$$\mathcal{P}_y = \left(1 - \frac{y}{h}\right)\mathcal{G} + \frac{y}{h}S_0, \quad \text{also} \quad A(\mathcal{P}_y) = \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 A(\mathcal{G}).$$

Daher haben alle Pyramiden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe dasselbe Volumen. Für den Nachweis der Formel

$$V(\mathcal{P}) = A(\mathcal{G}) \frac{h}{3}$$

genügt es daher, das für eine spezielle Pyramide zu tun. Sei \mathcal{P}^* ein gerades Prisma mit einem gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck $\mathcal{D} = ABC$ mit rechtem Winkel bei B als Grundfläche, $A'B'C'$ als (korrespondierender) Deckfläche und Höhe $h = \overline{AA'}$. Dann besitzt \mathcal{P}^* eine elementargeometrische Zerlegung in die Pyramiden $\mathcal{P}_1 = ABCA'$, $\mathcal{P}_2 = BCA'B'$ und $\mathcal{P}_3 = CA'B'C'$. \mathcal{P}_1 hat die Grundfläche ABA' und die Höhe \overline{BC} , \mathcal{P}_2 hat die Grundfläche $BA'B'$ und die Höhe \overline{BC} . Wegen $ABA' \equiv BA'B'$ ist $V_3(\mathcal{P}_1) = V_3(\mathcal{P}_2)$. \mathcal{P}_2 hat aber auch die Grundfläche BCB' und die Höhe $\overline{A'B'}$. \mathcal{P}_3 hat die Grundfläche $CB'C'$ und die Höhe $\overline{A'B'}$. Wegen $BCB' \equiv CB'C'$ ist $V_3(\mathcal{P}_2) = V_3(\mathcal{P}_3)$. \mathcal{P}_1 ist auch eine Pyramide mit Grundfläche \mathcal{D} und Höhe h , und daher folgt

$$V_2(\mathcal{D})h = V_3(\mathcal{P}^*) = V_3(\mathcal{P}_1) + V_3(\mathcal{P}_2) + V_3(\mathcal{P}_3) = 3V_3(\mathcal{P}_1).$$

Also gilt die zu beweisende Formel für \mathcal{P}_1 .

Mit Hilfe der Integralrechnung folgt unmittelbar für das Volumen der Pyramide wie oben

$$V(\mathcal{P}) = \int_0^h A(\mathcal{P}_y) dy = \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 A(\mathcal{G}) dy = A(\mathcal{G}) \left[-\frac{h}{3} \left(1 - \frac{y}{h}\right)^3 \right]_0^h = A(\mathcal{G}) \frac{h}{3}.$$

3) Kugel. Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $\mathcal{Z} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |X| \leq r\} \times [0, r]$,

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid |X| \leq y \leq r \right\}, \quad \mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \left| \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} \right| \leq r, y \geq 0 \right\}.$$

Ist $\mathcal{K}_r \subset \mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe mit Radius r , so ist \mathcal{Z} ist ein gerades Prisma mit Grundfläche \mathcal{K}_r und Höhe r , also

$$V(\mathcal{Z}) = \pi r^3.$$

\mathcal{H} ist eine eingeschriebene Halbkugel, und \mathcal{P} ist eine Pyramide mit Grundfläche \mathcal{K}_r und Höhe r , also

$$V(\mathcal{P}) = \frac{\pi r^3}{3}.$$

Elementargeometrisch ist \mathcal{Z} ein gerader Kreiszyylinder mit Radius und Höhe r und \mathcal{P} ein eingeschriebener auf der Spitze stehender gerader Kreiskegel. Für $y \in [0, r]$ ist $\mathcal{Z}_y = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |X| \leq r\}$,

$$\mathcal{P}_y = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |X| \leq y\} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_y = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |X| \leq \sqrt{r^2 - y^2}\},$$

also

$$A(\mathcal{Z}_y) = r^2\pi = y^2\pi + (r^2 - y^2)\pi = A(\mathcal{P}_y) + A(\mathcal{H}_y).$$

Mit der additiven Form des Prinzips von Cavalieri folgt

$$V(\mathcal{Z}) = V(\mathcal{P}) + V(\mathcal{H}), \quad \text{also} \quad V(\mathcal{H}) = \frac{2}{3}r^3\pi.$$

Für die Vollkugel \mathcal{B} vom Radius r folgt daraus

$$V(\mathcal{B}) = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

4) Durch Funktionsgraphen definierte Flächen und Rotationskörper.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, sei $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], g(x) \leq y \leq f(x) \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{G} \subset [a, b] \times \mathbb{R}$, und für $x \in [a, b]$ ist

$$\mathcal{G}_x = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{G} \right\} = [g(x), f(x)].$$

Mit Hilfe des quantitativen Prinzips von Cavalieri (jetzt in etwas anderer Bezeichnung) folgt

$$A(\mathcal{G}) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Sei nun $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und \mathcal{R} der durch Rotation von \mathcal{G} um die x -achse entstehende Körper, also

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b], g(x) \leq |Y| \leq f(x) \right\}.$$

Für $x \in [a, b]$ sei

$$\mathcal{R}_x = \left\{ Y \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{R} \right\};$$

dann ist $A(\mathcal{R}_x) = \pi[f(x)^2 - g(x)^2]$, also

$$V(\mathcal{R}) = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx.$$

Didaktische Bemerkung. Die Existenz eines anschaulichen Flächeninhalts unter dem Graphen einer stetigen nicht-negativen Funktion auf einem kompakten Intervall kann auch zur Begründung des Integralbegriffs herangezogen werden, siehe dazu den folgenden Abschnitt **5.6**.

5) Ellipse und Ellipsoid. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

eine Ellipsenfläche mit den Achsen a, b und

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

ein Ellipsoid mit den Achsen a, b, c . Wegen

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-a, a], -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\}$$

folgt nach **4)** (unter Benutzung der Substitution $x = a \sin t$ und der Identität $2 \cos^2 t = 1 + \cos 2t$)

$$A(\mathcal{E}_{a,b}) = \int_{-a}^a 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = ab \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = ab\pi.$$

Für die Berechnung von $V(\mathcal{E}_{a,b,c})$ verwenden wir das Prinzip von Cavalieri. Es ist $\mathcal{E}_{a,b,c} \subset \mathbb{R}^2 \times [-c, c]$, und für $z \in [-c, c]$ ist

$$(\mathcal{E}_{a,b,c})_z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} \right\} = \mathcal{E}_{a'(z), b'(z)}$$

mit

$$a'(z) = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \quad \text{und} \quad b'(z) = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Daraus folgt

$$V(\mathcal{E}_{a,b,c}) = \int_{-c}^c A(\mathcal{E}_{a'(z), b'(z)}) dz = \int_{-c}^c ab\pi \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = ab\pi \left[z - \frac{z^3}{3c^2} \right]_{-c}^c = \frac{4}{3} abc\pi.$$

Der Spezialfall $a = b = c$ liefert wieder die bereits bekannten Formeln für Kreis und Kugel.

5.6 Das Riemann'sche Integral.

Die Berechnung unbestimmter Integrale gehört zur Differentialrechnung. Das bestimmte Integral hat mit der Inhaltslehre zu tun, und erst der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gestattet die Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe des Algorithmus "Setze im unbestimmten Integral die Grenzen ein".

Elementargeometrische Definition des Integrals. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a \leq w < z \leq b$. Sei zunächst $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$\mathcal{F}_{f,w,z} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid w \leq x \leq z, 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$

die durch den Graphen von $f|_{[w,z]}$ und die x -achse definierte Fläche. Wir nehmen an, dass jede solche Menge $\mathcal{F}_{f,w,z}$ einen (elementargeometrischen) Flächeninhalt $A(\mathcal{F}_{f,w,z})$ besitzt und definieren das *elementargeometrische Integral* von f über $[w, z]$ durch

$$I_w^z(f) = A(\mathcal{F}_{f,w,z}).$$

Für eine beliebige stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x) + C \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$; dann definiere man

$$\begin{aligned} I_w^z(f) &= I_w^z(f + C) - C(z - w) \\ &= A\left(\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid w \leq x \leq z, -C \leq y \leq f(x) \right\}\right) - A([w, z] \times [-C, 0]). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist diese Definition unabhängig von der Wahl von C .

Mit Hilfe dieses einfachen Integralbegriffs wird nun ein Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung geführt.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in elementargeometrischer Form. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definiert durch} \quad F(x) = I_a^x(f).$$

Dann ist F differenzierbar und $F' = f$.

Hilfssatz. Seien $w, z \in \mathbb{R}$, $w < z$, und sei $f: [w, z] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [w, z]$ mit $I_w^z(f) = (z - w)f(\xi)$.

Beweis des Hilfssatzes. Wegen der Stetigkeit von f gibt es $x_*, x^* \in [w, z]$ mit

$$f(x_*) = \min\{f(x) \mid x \in [w, z]\} \quad \text{und} \quad f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in [w, z]\}.$$

Der Anschauung entnehmen wir die Ungleichungen

$$(z - w)f(x_*) \leq A(\mathcal{F}_{f,w,z}) \leq (z - w)f(x^*),$$

und aus der Stetigkeit der Funktion $z \mapsto (w - z)f(z)$ folgt die Behauptung mit Hilfe des Zwischenwertsatzes.

Beweis des Hauptsatzes. Sei zunächst $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $x \in [a, b]$. Nach dem Hilfssatz gibt es zu jedem $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x + h \in [a, b]$ ein $t = t(x, h) \in [0, 1]$ mit

$$F(x+h) - F(x) = \begin{cases} I_x^{x+h}, & \text{falls } h > 0 \\ -I_{x+h}^x, & \text{falls } h < 0 \end{cases} = hf(x+th),$$

und daraus folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Sei nun f beliebig, $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $f(x) + C \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Sei $F_0: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F_0(x) = I_a^x(f + C)$. Dann ist F_0 differenzierbar, $F_0' = f + C$ und $F(x) = F_0(x) - C(x - a)$. Daher ist auch F differenzierbar, und es folgt $F' = f$.

Didaktische Bemerkung. Die elementargeometrische Form des Hauptsatzes ist die niedrigste Stufe der Exaktheit, auf dem das bestimmte Integral behandelt werden sollte. Bei der Formulierung wurde bewusst auf das Integralzeichen verzichtet. Natürlich muss man in der Schule auch das Integralzeichen einführen. Dabei sollten aber streng die folgenden drei Begriffe auseinandergehalten werden: Unbestimmtes Integral (= Stammfunktion), Integral (= "bestimmtes" Integral) und Flächeninhalt (als geometrischer Begriff; das Integral über eine beliebige stetige Funktion ist keine Fläche!).

Man beachte, dass das unbestimmte Integralzeichen kein "Funktionszeichen" im Sinne der Logik ist. Die Schreibweise

$$F(x) = \int f(x) dx$$

heißt doch " $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$ " oder $F' = f$ oder (in der Sprache der Differentiale ausgedrückt) $dF(x) = f(x) dx$. Jede der Schreibweisen soll gewisse Assoziationen wecken: Die Gleichung zwischen Differentialen bezieht sich auf "infinitesimale Änderungen", das Integralzeichen ist ein symbolisches Summenzeichen über solche infinitesimale Änderungen.

Dass F nicht die einzige Stammfunktion von f ist, wird häufig durch die (auch nicht sehr glückliche) Schreibweise

$$F(x) = \int f(x) dx + C$$

ausgedrückt.

Nach Möglichkeit sollte auch eine von der geometrischen Anschauung unabhängige Definition des Riemann'schen Integrals gegeben werden. Die dazu verwendeten Darboux'schen Unter- und Obersummen haben doppelte Bedeutung: Sie dienen sowohl der näherungsweise Berechnung eines elementargeometrisch eingeführten Integrals als auch zu einer präzisen Definition des Riemann'schen Integrals.

Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Eine Zerlegung \mathfrak{z} von $[a, b]$ der Feinheit $\delta(\mathfrak{z}) \in \mathbb{R}_{>0}$ ist eine endliche Folge $\mathfrak{z} = (z_0, z_1, \dots, z_m)$ reeller Zahlen mit $a = z_0 < z_1 < \dots < z_m = b$ mit $\delta(\mathfrak{z}) = \max\{z_j - z_{j-1} \mid 1 \leq j \leq m\}$. Für eine solche Zerlegung \mathfrak{z} setzt man

$$m_j(f, \mathfrak{z}) = \inf\{f(x) \mid x \in [z_{j-1}, z_j]\}, \quad M_j(f, \mathfrak{z}) = \sup\{f(x) \mid x \in [z_{j-1}, z_j]\}$$

und definiert die *Darboux'schen Summen* durch

$$S^*(f, \mathfrak{z}) = \sum_{j=1}^m (z_j - z_{j-1}) M_j(f, \mathfrak{z}) \quad \text{und} \quad S_*(f, \mathfrak{z}) = \sum_{j=1}^m (z_j - z_{j-1}) m_j(f, \mathfrak{z}).$$

Die Funktion f heißt *Riemann-integrierbar* (über $[a, b]$), wenn

$$\inf\{S^*(f, \mathfrak{z}) \mid \mathfrak{z} \text{ Zerlegung von } [a, b]\} = \sup\{S_*(f, \mathfrak{z}) \mid \mathfrak{z} \text{ Zerlegung von } [a, b]\}.$$

Dann gibt es genau eine reelle Zahl I mit $S_*(f, \mathfrak{z}) \leq I \leq S^*(f, \mathfrak{z})$; diese heißt *Riemann-Integral* von f über $[a, b]$,

$$I = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx.$$

Sei wieder $\mathfrak{z} = (z_0, z_1, \dots, z_m)$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Ein Zwischenpunktvektor \mathbf{x} von \mathfrak{z} ist eine endliche Folge $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ mit $x_j \in [z_{j-1}, z_j]$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Man nennt dann

$$S(f, \mathfrak{z}, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m (z_j - z_{j-1}) f(x_j)$$

die *Riemannsche Summe* zur Zerlegung \mathfrak{z} mit dem Zwischenpunktvektor \mathbf{x} .

Hauptsatz über das Riemann'sche Integral. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

A. Riemann'sches Lemma. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- a) f ist Riemann-integrierbar über $[a, b]$.
- b) Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für jede Zerlegung \mathfrak{z} von $[a, b]$ der Feinheit $\delta(\mathfrak{z}) < \delta$ gilt:

$$S^*(f, \mathfrak{z}) - S_*(f, \mathfrak{z}) < \varepsilon.$$

- c) Für jede Folge $(\mathfrak{z}_n)_{n \geq 1}$ von Zerlegungen von $[a, b]$ mit $(\delta(\mathfrak{z}_n))_{n \geq 1} \rightarrow 0$ und beliebige Zwischenpunktvektoren \mathbf{x}_n von \mathfrak{z}_n ist die Folge $(S(f, \mathfrak{z}_n, \mathbf{x}_n))_{n \geq 0}$ konvergent.

B. Existenzsatz. Besitzt f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, so ist f Riemann-integrierbar, und für jede Folge $(\mathfrak{z}_n)_{n \geq 1}$ von Zerlegungen von $[a, b]$ mit $(\delta(\mathfrak{z}_n))_{n \geq 1} \rightarrow 0$ und beliebige Zwischenpunktvektoren \mathbf{x}_n von \mathfrak{z}_n gilt:

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} S^*(f, \mathfrak{z}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_*(f, \mathfrak{z}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathfrak{z}_n, \mathbf{x}_n).$$

C. Linearität. Die Menge \mathcal{R} der über $[a, b]$ Riemann-integrierbaren beschränkten Funktionen ist bezüglich der wertweisen Addition, Multiplikation und Skalarmultiplikation eine \mathbb{R} -Algebra, und das Riemann-Integral ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

D. Additivität. Ist $a < c < b$, so ist f genau dann über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, wenn f über $[a, c]$ und über $[c, b]$ Riemann-integrierbar ist, und dann ist

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

E. Hauptsatz der Differentialrechnung. Sei f stetig und $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(z) = \int_a^z f(x) dx.$$

Dann ist F differenzierbar, und $F' = f$.

Ein stringenter Beweis dieses Satzes benötigt raffinierte Epsilontik und insbesondere den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit. Er übersteigt das Schulniveau bei weitem. Der Kalkül der Darboux'schen Summen zeigt, dass das (frei von geometrischer Anschauung definierte) Riemann'sche Integral mit dem elementargeometrischen Integral übereinstimmt.

5.7 Kurven und Bogenlänge.

Der Kurvenbegriff. Sei $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine stetige Abbildung. Dann nennt man f eine (*parametrisierte*) *Kurve* oder einen *Weg*, $[a, b]$ das *Parameterintervall* und $f([a, b]) \subset \mathbb{R}^d$ die *Spur* von f . Eine Teilmenge $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$ heißt *Linie*, wenn sie Spur eines Weges ist; jeder Weg $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $f([a, b]) = \mathcal{L}$ heißt *Parametrisierung* von \mathcal{L} . Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Weg. Für eine Zerlegung $\mathfrak{z} = (z_0, z_1, \dots, z_m)$ von $[a, b]$ sei

$$L(f, \mathfrak{z}) = \sum_{j=1}^m |f(z_j) - f(z_{j-1})|$$

die Länge des durch die Zerlegung \mathfrak{z} definierten approximierenden Polygonzuges. Dann heißt

$$L(f) = \sup\{L(f, \mathfrak{z}) \mid \mathfrak{z} \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

die *Bogenlänge* oder *Weglänge* von f . f heißt *rektifizierbar*, wenn $L(f) < \infty$.

Zur Motivation der Begriffsbildungen: Ein Weg f beschreibt die Bewegung eines Teilchens in einem Zeitintervall $[a, b]$ ($f(t)$ ist der Aufenthaltsort des Teilchens zum Zeitpunkt t), $L(f)$ ist die Gesamtstrecke des zurückgelegten Weges einschließlich eventueller mehrfacher Durchläufe mancher Teile der Bahn. Um zu einem geometrischen Begriff der Länge der Bahn zu kommen, müssen wir definieren, was ein einfacher Durchlauf ist.

Eine Linie $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$ heißt *doppelpunktfrei* oder *einfach*, wenn es eine Parametrisierung $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ von \mathcal{L} gibt, so dass $f|_{[a, b]}$ injektiv ist; jede solche Parametrisierung heißt eine *einfache Kurve* oder eine *einfache Parametrisierung* von \mathcal{L} . Ist $f(a) = f(b)$, so nennt man \mathcal{L} eine *einfach geschlossene Linie* und f eine *einfach geschlossene Kurve*.

Satz und Definition.

- i) Sei $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$ eine einfache Linie und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine einfache Parametrisierung von \mathcal{L} . Dann hängt $L(f)$ nur von \mathcal{L} ab und heißt *Länge von \mathcal{L}* , $L(\mathcal{L}) = L(f)$.
- ii) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und stückweise stetig differenzierbar. Dann ist

$$L(f) = \int_a^b |f'(x)| dx \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Bemerkung zur Formulierung des Satzes. Es ist $f = (f_1, \dots, f_d)$ mit stetigen Funktionen $f_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. "stückweise stetig differenzierbar" heißt: Es gibt eine Zerlegung $\mathfrak{z} = (z_0, z_1, \dots, z_m)$ von $[a, b]$, so dass für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ und alle $i \in \{1, \dots, d\}$ gilt: $f_i|_{[z_{j-1}, z_j]}$ ist differenzierbar mit stetiger Ableitung. Dann ist

$$\int_a^b |f'(x)| dx = \sum_{j=1}^m \int_{z_{j-1}}^{z_j} \sqrt{\sum_{i=1}^d f_i'(x)^2} dx.$$

Für beide Sätze kann nur eine heuristische Beweisidee, kein vollständiger Beweis angegeben werden. Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und $\mathfrak{z} = (z_0, z_1, \dots, z_m)$ eine hinreichend feine Zerlegung von $[a, b]$, so folgt

$$\begin{aligned} L(f) &\approx L(f, \mathfrak{z}) = \sum_{j=1}^m \left| \frac{f(z_j) - f(z_{j-1})}{z_j - z_{j-1}} \right| (z_j - z_{j-1}) \approx \sum_{j=1}^m |f'(z_j)| (z_j - z_{j-1}) \\ &\approx \int_a^b |f'(x)| dx. \end{aligned}$$

Ist $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine weitere stetig differenzierbare Funktion mit $f([a, b]) = g([c, d])$ und sind f und g injektiv, so ist $\varphi = g^{-1} \circ f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ stetig differenzierbar und bijektiv, also monoton, etwa monoton wachsend (im anderen

Falle schließt man analog). Wegen $f = g \circ \varphi$ und $\varphi'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ folgt

$$\int_a^b |f'(x)| dx = \int_a^b |g'(\varphi(x))| \varphi'(x) dx = \int_c^d |g'(y)| dy,$$

was die Invarianz der Bogenlänge von der einfachen Parametrisierung zeigt.

Durch Graphen definierte Linien. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist der Graph \mathcal{G}_f eine einfache Linie und

$$\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{definiert durch} \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix},$$

ist eine einfache Parametrisierung von \mathcal{G}_f . Wegen

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\varphi'(x)| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

folgt

$$L(\mathcal{G}_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Jordan'scher Kurvensatz. Sie $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Linie. Dann besitzt \mathbb{R}^2 eine Zerlegung in disjunkte zusammenhängende Teilmengen

$$\mathbb{R}^2 = \mathcal{L} \cup \text{Inn}(\mathcal{L}) \cup \text{Au}(\mathcal{L}),$$

wobei $\text{Inn}(\mathcal{L})$ beschränkt und $\text{Au}(\mathcal{L})$ unbeschränkt ist. $\text{Inn}(\mathcal{L})$ und $\text{Au}(\mathcal{L})$ sind offen, und $\mathcal{L} = \text{Rd}(\text{Inn}(\mathcal{L})) = \text{Rd}(\text{Au}(\mathcal{L}))$.

Man nennt $\text{Inn}(\mathcal{L})$ das *Innengebiet* und $\text{Au}(\mathcal{L})$ das *Außengebiet von \mathcal{L}* . Der Beweis dieses anschaulich so evidenten Satzes erfordert Methoden der algebraischen Topologie oder der komplexen Funktionentheorie.

Polygonzüge. Seien $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^d$, so dass

$$A_i A_{i+1} \cap \bigcup_{j=1}^i A_{j-1} A_j = \{A_i\} \quad \text{für alle} \quad i \in \{1, \dots, n-2\}$$

und außerdem entweder

$$A_{n-1} A_n \cap \bigcup_{j=1}^{n-1} A_{j-1} A_j = \{A_{n-1}\}$$

oder

$$A_n = A_0 \quad \text{und} \quad A_{n-1} A_n \cap \bigcup_{j=1}^{n-1} A_{j-1} A_j = \{A_{n-1}, A_0\}.$$

Dann nennt man

$$\mathcal{L} = A_0A_1 \dots A_n = A_0A_1 \cup A_1A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}A_n$$

einen *einfachen Polygonzug*, und zwar im ersten Fall einen *offenen Polygonzug* und im zweiten Fall einen *einfach geschlossenen Polygonzug* (beachte: Ein offener Polygonzug ist keine offene Menge!). \mathcal{L} ist eine einfache Linie (man finde eine einfache Parametrisierung!), und es ist

$$L(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \overline{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^n |A_i - A_{i-1}|.$$

Ist $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon und $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$ zusammenhängend (das ist insbesondere erfüllt, falls \mathcal{P} konvex ist), so ist $\mathcal{L} = \text{Rd}(\mathcal{P})$ ein einfach geschlossener Polygonzug,

$$\mathcal{P} = \overline{\text{Inn}(\mathcal{L})} \quad \text{und} \quad U(\mathcal{P}) = L(\mathcal{L}).$$

Ist $\mathcal{L} = P_0P_1 \dots P_{n-1}P_0$, so nennt man \mathcal{P} "das n -eck $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ " und nummeriert üblicherweise die Punkte P_0, \dots, P_{n-1} entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn.

Umfang von Ovalen. Ein nicht-ausgearteter Eikörper $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Oval*. Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ ein Oval. Dann ist $\mathcal{L} = \text{Rd}(\mathcal{C})$ eine einfach geschlossene Linie. Ist $P \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$, so hat jede von P ausgehende Halbgerade mit \mathcal{L} genau einen Punkt gemeinsam. Definiert man

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{L} \quad \text{durch} \quad f(t) = \left[P + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right] \cap \mathcal{L},$$

so ist f eine einfache Parametrisierung von \mathcal{L} . Man nennt

$$U(\mathcal{C}) = L(\mathcal{L})$$

den *Umfang von \mathcal{C}* .

Approximationssatz für den Umfang von Ovalen. Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ ein Oval.

- i) Sei $\Pi_*(\mathcal{C})$ die Menge aller konvexen Polygone \mathcal{P} mit $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ und $\Pi^*(\mathcal{C})$ die Menge aller konvexen Polygone \mathcal{P} mit $\mathcal{P} \supset \mathcal{C}$. Dann ist

$$U(\mathcal{C}) = \sup\{U(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \Pi_*(\mathcal{C})\} = \inf\{U(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \Pi^*(\mathcal{C})\}.$$

- ii) Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $\mathcal{C}_\varepsilon = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}(X, \mathcal{C}) \leq \varepsilon\}$. Dann ist auch \mathcal{C}_ε ein Oval, und

$$U(\mathcal{C}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{A(\mathcal{C}_\varepsilon) - A(\mathcal{C})}{\varepsilon}.$$

Dieser Approximationssatz scheint anschaulich evident zu sein, ein präziser Beweis erfordert jedoch eine subtile Vertauschung von Grenzübergängen.

Auf Aussage **i)** diesem Approximationssatz beruht die Approximation des Kreisumfanges durch einbeschriebene und umbeschriebene regelmäßige Vielecke. Sei $\mathcal{K} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |X| \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Für $n \geq 3$ sei s_n die Seite des einbeschriebenen und S_n die Seite des umbeschriebenen regelmäßigen n -ecks. Dann folgt

$$\pi = A(\mathcal{K}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nS_n}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ns_n}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} \right)^{-1}$$

und

$$U(\mathcal{K}) = \lim_{n \rightarrow \infty} nS_n = \lim_{n \rightarrow \infty} ns_n = 2\pi.$$

Man kann also π sowohl durch den Flächeninhalt als auch durch den Umfang des Einheitskreises definieren.

Aussage **ii)** des Approximationssatzes gestattet eine andere Herleitung der Formel für den Umfang des Einheitskreises. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $\mathcal{K}_\varepsilon = (1 + \varepsilon)\mathcal{K}$ und daher

$$U(\mathcal{K}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{A(\mathcal{K}_\varepsilon) - A(\mathcal{K})}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{(1 + \varepsilon)^2 \pi - \pi}{\varepsilon} = 2\pi.$$

Umfang der Ellipse. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < b \leq a$, und sei

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

eine Ellipse mit den Halbachsen a, b . Die Terminologie ist schlampig und unterscheidet nicht zwischen Ellipsenfläche (diese ist ein nicht-ausgearteter Oval) und ihrem Rand. Definiert man

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{durch} \quad f(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix},$$

so ist f eine einfache Parametrisierung von \mathcal{L} (eine andere als die für Ovale im allgemeinen angegebene). Es ist

$$|f'(t)| = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Daraus folgt

$$L(\mathcal{L}) = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt.$$

Im Falle $a = b$ erhält man die Formel $U = 2\pi a$ für den Kreisumfang, im Falle $a \neq b$ ist obiges Integral nicht "elementar" auswertbar. Man nennt es ein *elliptisches Integral 2. Gattung*.

Das Treppenphänomen. Sei $(f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \geq 1}$ eine Folge rektifizierbarer Wege, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Weg und $(f_n(t))_{n \geq 1} \rightarrow f(t)$ für alle $t \in [a, b]$. Dann folgt nicht $(L(f_n))_{n \geq 1} \rightarrow L(f)$. Beispiel: Approximiere die Diagonale des Einheitsquadrates im \mathbb{R}^2 durch "Treppen" der Länge 2.

5.8 Flächen im \mathbb{R}^3 .

Parallelkörper. Für eine Teilmenge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert man die ε -Parallelkörper \mathcal{C}_ε und $\mathcal{C}_{-\varepsilon}$ durch

$$\mathcal{C}_\varepsilon = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \text{dist}(X, \mathcal{C}) \leq \varepsilon\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_{-\varepsilon} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid K(X, \varepsilon) \subset \mathcal{C}\},$$

wobei $K(X, \varepsilon) = \{X\}_\varepsilon = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid \overline{PX} \leq \varepsilon\}$.

Satz 1. Sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ ein eigentliches Polyeder.

- i) Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $\text{Rd}(\mathcal{P})_\varepsilon \subset \mathcal{P}_\varepsilon \setminus \mathcal{P}_{-\varepsilon}$.
- ii) Es gibt eine nur von \mathcal{P} abhängige Zahl $k(\mathcal{P}) \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt:

$$V(\mathcal{P}) + O(\mathcal{P})\varepsilon - k(\mathcal{P})\varepsilon^2 < V(\mathcal{P}_\varepsilon) < V(\mathcal{P}) + O(\mathcal{P})\varepsilon + k(\mathcal{P})\varepsilon^2.$$

iii) Es ist

$$O(\mathcal{P}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(\mathcal{P}_\varepsilon) - V(\mathcal{P})}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{V(\text{Rd}(\mathcal{P})_\varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

Die Aussage **i)** ist anschaulich klar, und **iii)** ist eine einfache Folgerung aus **i)** und **ii)**. Ein vollständiger Beweis von **ii)** ist zwar elementar, aber lang. Grundidee: Bette die Kanten des Polyeders in Zylinder mit Radius ε ein, und schätze das Gesamtvolumen dieser Zylinder durch $k(\mathcal{P})\varepsilon^2$ ab. Details kann man gut am Würfel oder am Tetraeder durchführen.

Der Minkowski'sche Flächenbegriff. Sei nun $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ kompakt. Dann ist auch \mathcal{F}_ε kompakt. Existiert der Grenzwert

$$F(\mathcal{F}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{V(\mathcal{F}_\varepsilon)}{2\varepsilon},$$

so nennt man \mathcal{F} *flächenhaft messbar im Minkowski'schen Sinne* und $F(\mathcal{F})$ den *Flächeninhalt von \mathcal{F}* .

Satz 2.

- i) Sei $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3$ eine einfache Linie und $L(\mathcal{L}) < \infty$. Dann ist \mathcal{L} flächenhaft messbar, und $F(\mathcal{L}) = 0$.
- ii) Seien $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathbb{R}^3$ kompakt und flächenhaft messbar. Dann ist auch $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ flächenhaft messbar, und

$$F(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = F(\mathcal{F}_1) + F(\mathcal{F}_2) - F(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2).$$

Ist insbesondere $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ enthalten in einer Vereinigung endlich vieler Linien endlicher Länge, so folgt

$$F(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = F(\mathcal{F}_1) + F(\mathcal{F}_2).$$

Definition der Oberfläche. Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ kompakt, und sei $\text{Rd}(\mathcal{C})$ flächenhaft messbar im Minkowski'schen Sinne. Dann sagt man, \mathcal{C} besitzt eine Oberfläche und nennt

$$O(\mathcal{C}) = F(\text{Rd}(\mathcal{C}))$$

die Oberfläche von \mathcal{C} .

Auf Grund von Satz 1 stimmt diese Definition für eigentliche Polyeder mit der elementargeometrische Definition der Oberfläche überein.

Approximationsatz für die Oberflächen von Eikörpern. Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ ein nicht-ausgearteter Eikörper. Dann besitzt \mathcal{C} eine Oberfläche, und diese kann man wie folgt berechnen.

- i) Sei $\Pi_*(\mathcal{C})$ die Menge aller konvexen nicht-ausgearteten Polyeder \mathcal{P} mit $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ und $\Pi^*(\mathcal{C})$ die Menge aller konvexen nicht-ausgearteten Polyeder \mathcal{P} mit $\mathcal{P} \supset \mathcal{C}$. Dann ist

$$O(\mathcal{C}) = \sup\{O(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \Pi_*(\mathcal{C})\} = \inf\{O(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \Pi^*(\mathcal{C})\}.$$

- ii) Es ist

$$O(\mathcal{C}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(\mathcal{C}_\varepsilon) - V(\mathcal{C})}{\varepsilon}.$$

Heuristische Beweisidee: Approximiere \mathcal{C} durch konvexe Polyeder und wende Satz 1 an. Für einen präzisen Beweis sind Grenzprozesse zu vertauschen und dafür subtile Gleichmäßigkeitsaussagen zu beweisen.

Beispiele. 1) **Gerades Prisma.** Sei $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ ein Oval, $h \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\mathcal{P} = \mathcal{G} \times [0, h] \subset \mathbb{R}^3$ ein gerades Prisma mit Grundfläche \mathcal{G} . Dann ist

$$O(\mathcal{P}) = 2A(\mathcal{G}) + U(\mathcal{G})h.$$

Das in der Schule übliche und anschaulich einsichtige Argument für die Gültigkeit dieser Formel besteht im Abwickeln der Mantelfläche $\text{Rd}(\mathcal{G}) \times [0, h]$ zum Rechteck $[0, U(\mathcal{G})] \times [0, h]$. So anschaulich dieser Begriff des Abwickelns ist, so schwierig ist er präzise zu fassen (Differentialgeometrie der Flächen). Andere Möglichkeiten des Beweises: **a.** Approximation durch Polyeder; **b.** Direkte Berechnung der Parallelkörper.

a. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, und seien $\mathcal{G}_*, \mathcal{G}^*$ Polygone mit $\mathcal{G}_* \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{G}^*$, $A(\mathcal{G}^*) - A(\mathcal{G}_*) \leq \varepsilon$ und $U(\mathcal{G}^*) - U(\mathcal{G}_*) \leq \varepsilon$. Dann sind $\mathcal{G}_* \times [0, h]$, $\mathcal{G}^* \times [0, h]$ konvexe nicht-ausgeartete Polyeder, $\mathcal{G}_* \times [0, h] \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{G}^* \times [0, h]$ und

$$O(\mathcal{G}^* \times [0, h]) - O(\mathcal{G}_* \times [0, h]) = [2A(\mathcal{G}^*) + U(\mathcal{G}^*)h] - [2A(\mathcal{G}_*) + U(\mathcal{G}_*)h] \leq (2+h)\varepsilon.$$

Da $O(\mathcal{G}_* \times [0, h]) \leq O(\mathcal{P}) \leq O(\mathcal{G}^* \times [0, h])$, folgt die Behauptung für $\varepsilon \rightarrow 0+$.

- b.** Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist

$$(\mathcal{G}_\varepsilon \times [0, h]) \cup (\mathcal{G} \times [-\varepsilon, h + \varepsilon]) \subset \mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathcal{G}_\varepsilon \times [-\varepsilon, h + \varepsilon].$$

Wegen $(\mathcal{G}_\varepsilon \times [0, h]) \cap (\mathcal{G} \times [-\varepsilon, h + \varepsilon]) = \mathcal{G} \times [0, h]$ und der Volumsformel für ein gerades Prisma folgt

$$A(\mathcal{G}_\varepsilon)h + A(\mathcal{G})(h + 2\varepsilon) - 2A(\mathcal{G})h \leq V(\mathcal{P}_\varepsilon) - V(\mathcal{P}) \leq A(\mathcal{G}_\varepsilon)(h + 2\varepsilon) - A(\mathcal{G})h,$$

und daher

$$\frac{A(\mathcal{G}_\varepsilon) - A(\mathcal{G})}{\varepsilon} h + 2A(\mathcal{G}) \leq \frac{V(\mathcal{P}_\varepsilon) - V(\mathcal{P})}{\varepsilon} \leq \frac{A(\mathcal{G}_\varepsilon) - A(\mathcal{G})}{\varepsilon} h + 2\varepsilon A(\mathcal{G}_\varepsilon).$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt die Behauptung.

Stufen des mathematischen Verständnisses (aus didaktischer Sicht): 1) die Formel kennen und anwenden können; 2) die Formel aus geometrischen Gründen einsehen; 3) ihre Beweisbedürftigkeit einsehen; 4) eine Beweisidee kennen.

2) Pyramiden und Kegel. Die in der Schule übliche Herleitung der Oberflächenformel für einen geraden Kegel mit Basisradius r und Höhe h erfolgt durch Abwicklung der Mantelfläche zu einem Kreissektor mit Radius $\sqrt{r^2 + h^2}$ und Bogenlänge $2\pi r$. Für dieses Verfahren gilt das in 1) Gesagte. Wir leiten hier eine Approximation durch gerade Pyramiden mit regelmäßigen Vielecken als Grundfläche her.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und $\mathcal{E}_n \subset \mathbb{R}^2$ das regelmäßige n -eck mit Mittelpunkt O und Umkreisradius r . Dann ist

$$\mathcal{E}_n = \text{conv}(Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}) \quad \text{mit} \quad Z_\nu = \begin{pmatrix} r \cos \frac{2\pi\nu}{n} \\ r \sin \frac{2\pi\nu}{n} \end{pmatrix},$$

und

$$s_n = \overline{Z_0 Z_1} = \overline{Z_1 Z_2} = \dots = \overline{Z_{n-1} Z_0} = 2r \sin \frac{\pi}{n}$$

ist die Kantenlänge von \mathcal{E}_n . Wegen $\text{Rd}(\mathcal{P}_n) = Z_0 Z_1 \dots Z_{n-1} Z_0$ folgt

$$U(\mathcal{E}_n) = ns_n = 2rn \sin \frac{\pi}{n}.$$

\mathcal{E}_n hat eine elementargeometrische Zerlegung in n kongruente Dreiecke mit Grundlinie s_n und Höhe $r \cos \frac{\pi}{n}$, also folgt

$$A(\mathcal{E}_n) = nr^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{ns_n^2}{4} \cot \frac{\pi}{n}.$$

Sei wieder $\mathcal{K} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |X| \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Dann ist \mathcal{E}_n das $r\mathcal{K}$ einbeschriebene regelmäßige n -eck. Sei \mathcal{E}_n^* das $r\mathcal{K}$ umbeschriebene regelmäßige n -eck und r^* der Umkreisradius von \mathcal{E}_n^* . Dann folgt $r = r^* \cos \frac{\pi}{n}$, also

$$U(\mathcal{E}_n^*) = \frac{U(\mathcal{E}_n)}{\cos \frac{\pi}{n}} = 2rn \tan \frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad A(\mathcal{E}_n^*) = \frac{A(\mathcal{E}_n)}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} = nr^2 \tan \frac{\pi}{n}.$$

Wegen $\mathcal{E}_n \subset r\mathcal{K} \subset \mathcal{E}_n^*$ und den Grenzwertbeziehungen

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{E}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi r \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r = \lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{E}_n^*), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A(\mathcal{E}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi r^2 \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} A(\mathcal{E}_n^*)\end{aligned}$$

erhält man wieder die bekannten Formeln für den Kreis.

Sei nun $h \in \mathbb{R}_{>0}$, \mathcal{P}_n die Pyramide mit Grundfläche \mathcal{E}_n und Spitze $S = (0, 0, h)^t$, \mathcal{P}_n^* die Pyramide mit Grundfläche \mathcal{E}_n^* und Spitze S und \mathcal{P} die Pyramide mit Grundfläche $r\mathcal{K}$ und Spitze S . \mathcal{P} ist ein nicht-ausgearteter Eikörper, \mathcal{P}_n und \mathcal{P}_n^* sind konvexe nicht-ausgeartete Polyeder, und $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}_n^*$. Elementargeometrisch ist \mathcal{P} ein gerader Kreiskegel mit Basisradius r und Höhe h . Die Seitenflächen von \mathcal{P}_n sind $\mathcal{E}_n \times \{0\}$ und n kongruente Dreiecke mit Grundlinie s_n und Höhe $\sqrt{r^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} + h^2}$. Damit folgt

$$O(\mathcal{P}_n) = A(\mathcal{E}_n) + \frac{ns_n}{2} \sqrt{r^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} + h^2} = r\pi \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \left[r \cos \frac{\pi}{n} + \sqrt{r^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} + h^2} \right],$$

und entsprechend

$$O(\mathcal{P}_n^*) = r^* \pi \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \left[r^* \cos \frac{\pi}{n} + \sqrt{r^{*2} \cos^2 \frac{\pi}{n} + h^2} \right] = \frac{r\pi}{\cos \frac{\pi}{n}} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \left[r + \sqrt{r^2 + h^2} \right].$$

Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O(\mathcal{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} O(\mathcal{P}_n^*) = r\pi \left[r + \sqrt{r^2 + h^2} \right]$$

und daher

$$O(\mathcal{P}) = r\pi \left[r + \sqrt{r^2 + h^2} \right].$$

3) Kugel. Sei $\mathcal{B} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid |X| \leq 1\}$ die Einheitskugel des \mathbb{R}^3 . Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist dann $r\mathcal{B}$ eine Vollkugel vom Radius r und

$$V(r\mathcal{B}) = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $(r\mathcal{B})_\varepsilon = (r + \varepsilon)\mathcal{B}$, und es folgt

$$O(r\mathcal{B}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{V((r\mathcal{B})_\varepsilon) - V(r\mathcal{B})}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{4}{3} \pi (3r^2 + 3r\varepsilon + \varepsilon^2) = 4\pi r^2.$$

Schwarz'sches Phänomen. Eine Approximation einer Fläche im \mathbb{R}^3 durch beliebige (nicht konvexe) Polyeder braucht keine Approximation des Flächeninhaltes zu liefern (Analogon zum Treppenphänomen für Linien). Dazu das folgende Beispiel.

Sei $k = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |X| = 1\}$ die Einheitskreislinie und $\mathcal{F} = k \times [0, 1]$ ein Zylindermantel im \mathbb{R}^3 . Für $n, N \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, approximiere \mathcal{F} durch $4Nn$ Dreiecksflächen wie folgt. Seien die Punkte $P_{\nu,\mu}$ ($0 \leq \nu \leq n$, $0 \leq \mu \leq N$) und $Q_{\nu,\mu}$ ($0 \leq \nu \leq n$, $0 \leq \mu \leq N-1$) definiert durch

$$P_{\nu,\mu} = \left(\cos \frac{2\pi\nu}{n}, \sin \frac{2\pi\nu}{n}, \frac{\mu}{N} \right)^t, \quad Q_{\nu,\mu} = \left(\cos \frac{2\pi(\nu + \frac{1}{2})}{n}, \sin \frac{2\pi(\nu + \frac{1}{2})}{n}, \frac{\mu + \frac{1}{2}}{N} \right)^t,$$

Dann wird \mathcal{F} approximiert durch die $4Nn$ Dreiecke

$$P_{\nu,\mu}P_{\nu+1,\mu}Q_{\nu,\mu}, \quad P_{\nu,\mu+1}P_{\nu+1,\mu+1}Q_{\nu,\mu}, \quad P_{\nu,\mu}P_{\nu,\mu+1}Q_{\nu,\mu}, \quad P_{\nu+1,\mu}P_{\nu+1,\mu+1}Q_{\nu,\mu}$$

für $0 \leq \nu < n$ und $0 \leq \mu < N$. Alle diese Dreiecke haben ihre Ecken auf \mathcal{F} . $2Nn$ diese Dreiecke haben

$$\text{Grundlinie } 2 \sin \frac{\pi}{n}, \quad \text{Höhe } \sqrt{\left(\frac{1}{2N}\right)^2 + \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2},$$

und $2Nn$ diese Dreiecke haben

$$\text{Grundlinie } \frac{1}{N}, \quad \text{Höhe } \sqrt{\left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{n}}.$$

Für die Gesamtfläche der Dreiecke ergibt sich (nach einiger Rechnerei)

$$\begin{aligned} F_{N,n} &= 2Nn \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\left(\frac{1}{2N}\right)^2 + \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2} + Nn \frac{1}{N} \sqrt{\left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{n}} \\ &= \pi \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \sqrt{1 + \frac{N^2 \pi^4}{n^4} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^4} + \pi \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

Wählt man nun $N = N(n)$ in Abhängigkeit von n und ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n^2} = C \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\},$$

so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{N,n} = \pi \left(1 + \sqrt{1 + \pi^4 C^2}\right).$$

Insbesondere erhält man für $C = \infty$ das "Ziehharmonika-Phänomen".

Durch Funktionsgraphen definierte Rotationsflächen. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig differenzierbar. Sei \mathcal{F} die durch Rotation des Graphen \mathcal{G}_f um die x -achse entstehende Fläche, also

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b], |Y| = f(x) \right\}.$$

Dann ist \mathcal{F} flächenhaft messbar, und

$$F(\mathcal{F}) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

In der Schule kann nur eine heuristische Beweisidee gegeben werden. Ist f eine lineare Funktion, so ist \mathcal{F} ein gerader Kreiskegelstumpf mit Radien $f(a)$ und $f(b)$ und Höhe $b - a$. In diesem Falle verifiziert man die Formel direkt.

Für beliebiges f und hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist

$$\mathcal{F}_\varepsilon \approx \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f_{-\varepsilon}(x) \leq |Y| \leq f_\varepsilon(x) \right\}$$

mit

$$f_{\pm\varepsilon}(x) = f(x) \pm \frac{\varepsilon}{\cos \alpha(x)}, \quad \text{wobei } f'(x) = \tan \alpha(x).$$

Daraus folgt (mit einem Fehler von höchstens der Größenordnung ε^2)

$$V(\mathcal{F}_\varepsilon) \approx \pi \int_a^b [f_\varepsilon(x)^2 - f_{-\varepsilon}(x)^2] dx = 4\pi\varepsilon \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

und daraus die Behauptung.

Analytische Berechnung des Flächeninhaltes. Sei $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, \mathcal{D} kompakt und \mathcal{U} offen. Sei

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften: Die Komponentenfunktionen φ_i besitzen stetige partielle Ableitungen, und die Jacobi'sche Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{pmatrix}$$

hat überall den Rang 2. In diesem Falle nennt man $\mathcal{F} = \varphi(\mathcal{D})$ ein C^1 -Flächenstück und φ eine Parametrisierung von \mathcal{F} . Für $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$ ist dann

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{a}) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\mathbf{a}) \right|$$

der Flächeninhalt des von den Tangentialvektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{a})$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\mathbf{a})$ aufgespannten Parallelepipeds im Punkte $\varphi(\mathbf{a})$. Das Flächenstück \mathcal{F} ist flächenhaft messbar im Minkowski'schen Sinne, und es ist

$$F(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{D}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{x}) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x}.$$

Ist $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck, so kann man das zweidimensionale Integral durch ein einfaches Doppelintegral ersetzen:

$$\int_{\mathcal{D}} (\dots) d\mathbf{x} = \int_a^b \int_c^d (\dots) dx dy.$$

Der Beweis benötigt den Transformationsatz für dreidimensionale Integrale und ein bisschen Differentialgeometrie.

Beweis der Flächenformel für Rotationsflächen mit der analytischen Formel. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig differenzierbar und

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b], |Y| = f(x) \right\}.$$

Eine Parametrisierung von \mathcal{F} ist

$$\varphi: [a, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{definiert durch} \quad \varphi(x, t) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \cos t \\ f(x) \sin t \end{pmatrix},$$

Es ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(x) \cos t & -f(x) \sin t \\ f'(x) \sin t & f(x) \cos t \end{pmatrix},$$

und folglich

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| = \left| \begin{pmatrix} f'(x)f(x) \\ -f(x) \cos t \\ -f(x) \sin t \end{pmatrix} \right| = f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Damit folgt die behauptete Flächenformel.