ANALYSIS I, II

FRANZ HALTER-KOCH

Contents

1. Geordnete Körper und reelle Zahlen

1.1. Geordnete Mengen

Definition 1.1. Sei $R \neq \emptyset$ eine Menge. Eine zweistellige Relation $<$ auf R heißt *Ordnungsrelation* oder *Totalordnung* auf R und das Paar $(R, <)$ eine (*total-*)*geordnete Menge*, wenn für alle $x,\, y,\, z \in R$ gilt:

a) Trichotomie: Es gilt genau eine der drei Beziehungen $x < y,\ y < x,\ x = y$.

b) Transitivität: Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$.

Ist $<$ eine Ordnungsrelation auf R, so definiert man für $x,\, y \in R$:

- $x > y$, falls $y < x$.
- $x \leq y$, falls $x < y$ oder $x = y$.
- $x \geq y$, falls $x > y$ oder $x = y$.

Eine geordnete Menge $(R, <)$ heißt *dicht geordnet*, wenn

$$(\forall\, x,\, y \in R) \quad \big[\, x < y \implies (\exists z \in R) \;\; x < z < y \,\big]\,.$$

Bemerkungen:

1. Sei $(R, <)$ eine geordnete Menge und $\emptyset \neq Y \subset R$. Dann ist $<$ auch eine Ordnung auf Y [man nennt $(Y, <)$ eine *geordnete Teilmenge* von $(R, <)$].
2. Sei $(R, <)$ eine geordnete Menge. Dann gilt für alle $x,\, y,\, z \in R$:
$$x < y \;\Rightarrow\; x \leq y\,; \quad x \leq y \,\wedge\, y \leq x \;\Rightarrow\; x = y\,; \quad x \leq y \,\wedge\, y \leq z \;\Rightarrow\; x \leq z\,.$$
3. $(\mathbb{Q}, <)$ ist eine dicht geordnete Menge mit folgenden Eigenschaften:
   - Jedes $x \in \mathbb{Q}$ hat eine Darstellung in der Form
   $$x = \frac{p}{q} \quad \text{mit} \quad p \in \mathbb{Z} \;\text{ und }\; q \in \mathbb{N}\,,$$
   und für $p\,, p' \in \mathbb{Z}$ und $q,\, q' \in \mathbb{N}$ gilt:
   $$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff pq' = qp'\,, \quad \text{und} \quad \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} \iff pq' < qp'\,.$$
   - $(\forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{Q}) \quad \big[\, x < y \implies x + z < y + z \,\big]$.
   - $(\forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{Q}) \quad \big[\, x < y \,\wedge\, z > 0 \implies xz < yz \,\big]$.
   - Für $x,\, y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$ ist
   $$x < \frac{x+y}{2} < y\,.$$

Definition 1.2. Sei $(R, <)$ eine geordnete Menge, $\emptyset \neq A \subset R$ und $a \in R$.

1. a heißt *größtes Element* oder *Maximum* von A, wenn $\quad a \in A \,\wedge\, (\forall x \in A) \;\; x \leq a$.
   A hat höchstens ein Maximum [denn: Sind a_1 und a_2 Maxima von A, so ist $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $a_1 \leq a_2$ und $a_2 \leq a_1$, also $a_1 = a_2$].
   Ist a das Maximum von A, so schreibt man $a = \max(A)$, und $a = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$, falls $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

2. a heißt *obere Schranke* von A, wenn $(\forall x \in A)\ \ x \le a$.

   Ist a eine obere Schranke von A, so ist auch jedes $b \in R$ mit $b \ge a$ eine obere Schranke von A.

3. A heißt *nach oben beschränkt*, wenn A eine obere Schranke hat.

   Hat A ein Maximum, so ist A nach oben beschränkt, und $\max(A)$ ist die kleinste obere Schranke von A. Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$ ist nach oben beschränkt, hat aber kein Maximum.

4. a heißt *Supremum* von A, wenn a die kleinste obere Schranke von A ist. Formal:

$$\big[(\forall x \in A)\ \ x \le a\big] \wedge \big[(\forall y \in R)\ \ y < a \implies (\exists\, x \in A)\ \ x > y\big]$$

   Ist A nicht nach oben beschränkt, so besitzt A kein Supremum. Ist A nach oben beschränkt und $Y \neq \emptyset$ die Menge der oberen Schranken von A, so gilt: Genau dann ist a Supremum von A, wenn $a = \min(Y)$. Insbesondere hat A höchstens ein Supremum. Ist a Supremum von A, so schreibt man $a = \sup(A)$.

1′. a heißt *kleinstes Element* oder *Minimum* von A, wenn $a \in A\ \wedge\ (\forall x \in A)\ \ x \ge a$.

   A hat höchstens ein Minimum. Ist a das Minimum von A, so schreibt man $a = \min(A)$ oder einfach $a = \min\{a_1, \ldots, a_n\}$, falls $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$..

2′. a heißt *untere Schranke* von A, wenn $(\forall x \in A)\ \ x \ge a$.

   Ist a eine untere Schranke von A, so ist auch jedes $b \in R$ mit $b \le a$ eine untere Schranke von A.

3′. A heißt *nach unten beschränkt*, wenn A eine untere Schranke hat.

   Hat A ein Minimum, so ist A nach unten beschränkt, und $\min(A)$ ist die größte untere Schranke von A. Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ ist nach unten beschränkt, hat aber kein Minimum.

4′. a heißt *Infimum* von A, wenn a die größte untere Schranke von A ist. Formal:

$$\big[(\forall x \in A)\ x \ge a\big] \wedge \big[(\forall y \in R)\quad y > a \implies (\exists\, x \in A)\ x < y\big]$$

   Ist A nicht nach unten beschränkt, so besitzt A kein Infimum. Ist A nach unten beschränkt und $Y \neq \emptyset$ die Menge der unteren Schranken von A, so gilt: Genau dann ist a Infimum von A, wenn $a = \max(Y)$. Insbesondere hat A höchstens ein Infimum. Ist a Infimum von A, so schreibt man $a = \inf(A)$.

5. A heißt *beschränkt*, wenn A nach oben und nach unten beschränkt ist.

Bemerkungen:

1. Jede nicht-leere Teilmenge einer [nach oben, nach unten] beschränkten Menge ist [nach oben, nach unten] beschränkt.
2. Sei $(R, <)$ eine geordnete Menge und $\emptyset \neq A \subset R$. Dann gilt:
   (a) A hat ein Maximum $\iff$ A ist nach oben beschränkt, und $\sup(A) \in A$.
   Hat A ein Maximum, so ist $\sup(A) = \max(A)$.
   (b) A hat ein Minimum $\iff$ A ist nach unten beschränkt, und $\inf(A) \in A$.
   Hat A ein Minimum, so ist $\inf(A) = \min(A)$.

3. Jede nach unten beschränkte nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{Z}$ (also insbesondere jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$) hat ein Minimum, und jede nach oben beschränkte nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Maximum.

   Ist $x \in \mathbb{Q}$, so nennt man $q = \min\{c \in \mathbb{N} \mid cx \in \mathbb{Z}\}$ den *reduzierten Nenner* von x.

Satz 1.1. *Sei $(R, <)$ eine geordnete Menge.*

1. *Sei $A \subset R$ endlich, $|A| = n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine bijektive Abbildung*
$$a\colon \{1, \ldots, n\} \to A \quad \textit{mit} \quad a(1) < a(2) < \ldots < a(n)\,.$$
   Insbesondere ist $a(1) = \min(A)$ und $a(n) = \max(A)$.
2. *Sei $(R, <)$ dicht geordnet, $x,\ y \in R$ und $x < y$. Dann ist die Menge $\{z \in R \mid x < z < y\}$ unendlich.*

Beweis. 1. Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich.
$n \geq 2\,,\ n-1 \to n$: Sei $b_0 \in A$ und $A_0 = A \setminus \{b_0\}$. Dann ist $|A_0| = n - 1$, und nach Induktionsvoraussetzung hat A_0 ein größtes Element b_1. Ist $b_1 < b_0$, so ist $b_0 = \max(A)$, ist $b_1 > b_0$, so ist $b_1 = \max(A)$. In jedem Falle hat A ein größtes Element b, und nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine bijektive Abbildung $a_0\colon \{1, \ldots, n-1\} \to A \setminus \{b\}$ mit $a_0(1) < a_0(2) < \ldots < a_0(n-1)$. Definiert man $a\colon \{1, \ldots, n\} \to A$ durch $a(i) = a_0(i)$, falls $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, und $a(n) = b$, so hat a die gewünschten Eigenschaften.

2. Da $(R, <)$ dicht geordnet ist, ist $A = \{z \in R \mid x < z < y\} \neq \emptyset$, und wir nehmen an, A sei endlich. Nach 1. hat A ein kleinstes Element a. Dann ist aber $x < a < y$, und es gibt ein $b \in R$ mit $x < b < a$, also $b \in A$ und $b < a$, ein Widerspruch. □

Definition 1.3 (Monotonie)**.** Seien $(R, <)$ und $(R', <')$ geordnete Mengen. Eine Abbildung $f\colon R \to R'$ heißt

- [*nach oben, nach unten*] *beschränkt*, wenn die Menge $f(R) \subset R'$ [nach oben, nach unten] beschränkt ist. Explizit:

  f ist nach oben [unten] beschränkt $\iff$ $(\exists M \in \mathbb{R})\ (\forall x \in R)\ f(x) \leq M\ \ [\,f(x) \geq M\,]$.
- [*streng*] *monoton wachsend*, wenn
$$(\forall x,\ y \in R)\ \bigl(x < y \implies f(x) \leq f(y) \quad [\,f(x) < f(y)\,]\bigr)\,.$$
- [*streng*] *monoton fallend*, wenn
$$(\forall x,\ y \in R)\ \bigl(x < y \implies f(x) \geq f(y) \quad [\,f(x) > f(y)\,]\bigr)\,.$$
- [*streng*] *monoton*, wenn sie [streng] monoton wachsend oder [streng] monoton fallend ist.
- *ordnungstreu*, wenn f streng monoton wachsend ist.

Satz 1.2. *Seien $(R, <)$ und $(R', <')$ geordnete Mengen, und sei $f\colon R \to R'$ streng monoton wachsend [fallend]. Dann ist f injektiv, und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(R) \to R$ ist ebenfalls streng monoton wachsend [fallend].*

Beweis. Wir nehmen an, f sei streng monoton wachsend [ist f streng monoton fallend, so schließt man analog].

Seien $x_1, x_2 \in R$ mit $x_1 \neq x_2$. Dann ist entweder $x_1 < x_2$ oder $x_2 < x_1$ und daher entweder $f(x_1) < f(x_2)$ oder $f(x_2) < f(x_1)$, also auch $f(x_1) \neq f(x_2)$. Daher ist f injektiv.

Sind $y_1, y_2 \in f(R)$ und $y_1 < y_2$, so ist $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, denn aus $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ folgte $y_1 = f\bigl(f^{-1}(y_1)\bigr) \geq f\bigl(f^{-1}(y_2)\bigr) = y_2$. Daher ist auch f^{-1} streng monoton wachsend. □

Definition 1.4. $(R,<)$ sei eine geordnete Menge. Ein (*Dedekind'scher*) *Schnitt* von $(R,<)$ ist ein Paar (A,B), bestehend aus zwei nicht-leeren Teilmengen A und B von R, so dass gilt:

- $A \cup B = R$.
- $(\forall\, a \in A)\ (\forall\, b \in B)\ \ a < b$.

Ein Element $z \in R$ heißt *Schnittelement* von (A,B), wenn $(\forall a \in A)\ (\forall b \in B)\ \ a \leq z \leq b$.

Bemerkungen:

1. Sei $(R,<)$ eine geordnete Menge und $z \in R$. Dann ist
$$\bigl(\{x \in R \mid x < z\},\ \{x \in R \mid x \geq z\}\bigr)$$
ein Schnitt von $(R,<)$ mit Schnittelement z.
2. In einer dicht geordneten Menge hat ein Schnitt höchstens ein Schnittelement.
Beweis. Sei (A,B) ein Schnitt in der dicht geordneten Menge $(R,<)$. Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen an, (A,B) habe zwei Schnittelemente z_1, z_2 mit $z_1 < z_2$. Dann gibt es ein $x \in R$ mit $z_1 < x < z_2$. Da z_1 ein Schnittelement ist, folgt $x \in B$, und da z_2 ein Schnittelement ist, folgt $x \in A$. Daher ist $x < x$, ein Widerspruch! □
3. Sei $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\ \vee\ x^2 \leq 2\}$ und $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\ \wedge\ x^2 > 2\}$. Dann ist (A,B) ein Schnitt von $\mathbb{Q}$ ohne Schnittelement.
Beweis. Offensichtlich ist $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $\mathbb{Q} = A \cup B$, und für alle $a \in A$ und $b \in B$ ist $a < b$. Daher ist (A,B) ein Schnitt von $\mathbb{Q}$. Wir nehmen nun an, der Schnitt (A,B) besitze ein Schnittelement $z \in \mathbb{Q}$. Wegen $0 \in A$ und $2 \in B$ ist $0 \leq z \leq 2$.
FALL 1: $z^2 < 2$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $z^2 + \frac{1}{n} < 2$. Dann ist
$$\Bigl(z + \frac{1}{6n}\Bigr)^2 \;=\; z^2 + \frac{z}{3n} + \frac{1}{36n^2} \leq z^2 + \frac{1}{n}\Bigl(\frac{2}{3} + \frac{1}{36n}\Bigr) \;=\; z^2 + \frac{1}{n} \;<\; 2\,.$$
Damit folgt
$$z + \frac{1}{6n} \in A\,, \quad \text{also} \quad z + \frac{1}{6n} \leq z\,, \quad \text{ein Widerspruch!}$$
FALL 2: $z^2 > 2$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $z^2 - \frac{1}{n} > 2$. Wegen $z \leq 2$ ist dann
$$\Bigl(z - \frac{1}{6n}\Bigr)^2 \;=\; z^2 - \frac{z}{3n} + \frac{1}{36n^2} \;>\; z^2 - \frac{2}{3n} \;>\; z^2 - \frac{1}{n} \;>\; 2\,.$$
Damit folgt
$$z - \frac{1}{6n} \in B\,, \quad \text{also} \quad z - \frac{1}{6n} \geq z\,, \quad \text{ein Widerspruch!}$$
FALL 3: $z^2 = 2$.
Wir zeigen allgemeiner (durch Widerspruch): Es gibt kein $z \in \mathbb{Q}$ mit $z^2 = 2$.

Angenommen, es sei $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. Dann ist auch $(-x)^2 = 2$, und daher können wir $x > 0$ annehmen. Sei $q \in \mathbb{N}$ der reduzierte Nenner von x und $p \in \mathbb{N}$ mit $qx = p$. Dann sind p und q nicht beide gerade, denn sonst könnte man durch 2 kürzen und erhielte eine Bruchdarstellung von x mit kleinerem Nenner. Es folgt

$$x^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2}\,, \quad \text{also} \quad 2q^2 = p^2\,.$$

Daher ist p^2 eine gerade Zahl, und da das Quadrat einer ungeraden Zahl wieder ungerade ist, ist auch p eine gerade Zahl, $p = 2p_0$ mit $p_0 \in \mathbb{N}$. Einsetzen liefert $2q^2 = 4p_0^2$, also $q^2 = 2p_0^2$. Daher ist q^2 und damit auch q eine gerade Zahl, ein Widerspruch! □

Anschauliches Beispiel:
Sei $\mathcal{G}$ eine anschauliche Gerade mit Nullpunkt O und Einheitspunkt E (eine *Zahlengerade*) und sei $\iota_0 \colon \mathbb{Q} \to \mathcal{G}$ die (injektive) Abbildung, welche die Darstellung der rationalen Zahlen auf $\mathcal{G}$ beschreibt. Für zwei Punkte $P, Q \in \mathcal{G}$ definieren wir $P \prec Q$, falls P links von Q liegt. Dann ist $(\mathcal{G}, \prec)$ eine (aus anschaulich-geometrischen Gründen) dicht geordnete Menge, in der jeder Schnitt ein Schnittelement besitzt, und ι_0 ist eine ordnungstreue Abbildung. In $(\mathbb{Q}, <)$ (und daher auch in $(\iota_0(\mathbb{Q}), \prec)$) gibt es Schnitte ohne Schnittelement. Insbesondere ist $\iota_0(\mathbb{Q}) \subsetneqq \mathcal{G}$.
Ziel („reelle Zahlen"): Konstruktion einer Erweiterung $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ und einer Bijektion $\iota \colon \mathbb{R} \to \mathcal{G}$ mit $\iota \,|\, \mathbb{Q} = \iota_0$.

Satz 1.3. *Sei $(R, <)$ eine geordnete Menge, (A, B) ein Schnitt von $(R, <)$ und $z \in R$.*

1. *Ist $z = \sup(A)$ oder $z = \inf(B)$, so ist z ein Schnittelement von (A, B).*
2. *Sei $(R, <)$ dicht geordnet und z ein Schnittelement von (A, B). Dann folgt*

$$z = \sup(A) = \inf(B)\,.$$

Beweis. Wir beweisen beide Aussagen für das Supremum.

1. Sei $z = \sup(A)$. Dann ist $(\forall\, x \in A)\ \ x \le z$. Ist $y \in B$, so folgt $(\forall\, x \in A)\ \ x \le y$, also auch $z \le y$.

2. Nach Definition ist z eine obere Schranke von A. Daher bleibt zu zeigen: Ist $y \in R$ und $y < z$, so ist y keine obere Schranke von A.

Sei also $y \in R$ und $y < z$. Wegen der Dichtheit gibt es ein $u \in R$ mit $y < u < z$. Da z Schnittelement ist, folgt $u \in A$, und daher ist y keine obere Schranke von A. □

Satz und Definition 1.4. *Sei $(R, <)$ eine geordnete Menge. Dann sind äquivalent*:

(a) *Jeder Schnitt in $(R, <)$ hat ein Schnittelement in R.*
(b) *Jede nicht-leere nach oben beschränkte Menge hat ein Supremum.*
(c) *Jede nicht-leere nach unten beschränkte Menge hat ein Infimum.*

Sind diese Bedingungen erfüllt, so heißt $(R, <)$ *vollständig.*

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz von (a) und (b).

(a) $\Rightarrow$ (b) Sei $\emptyset \ne A \subset R$ nach oben beschränkt. Hat A ein Maximum, so ist nichts zu zeigen. Habe also A kein Maximum und sei Y die (nicht-leere) Menge der oberen Schranken von A. Dann ist $(R \setminus Y, Y)$ ein Schnitt in $(R, <)$ und besitzt nach Voraussetzung ein Schnittelement $z \in R$. Wir zeigen $z \in Y$ (dann ist $z = \min(Y)$, also $z = \sup(A)$).

Angenommen, es sei $z \in R \setminus Y$. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $a > z$. Dann ist aber a obere Schranke von A, also $a = \max(A)$, ein Widerspruch.

(b) $\Rightarrow$ (a) Nach Satz 1.3. $\square$

1.2. Geordnete Körper

Definition 1.5. Eine *Gruppe* $G = (G, e, *)$ besteht aus eine Menge G mit einem (ausgezeichneten) Element $e \in G$ und einer Verknüpfung

$$*\colon \begin{cases} G\times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & x*y \end{cases}$$

auf G, so dass gilt:

A1. $*$ ist assoziativ [das heißt, $(\forall x,\, y,\, z \in G)\ \ x*(y*z) = (x*y)*z$].

A2. $(\forall x \in G)\ \ x*e = e*x = x$.

A3. $(\forall x \in G)\ (\exists x' \in G)\ \ x*x' = e$.

Man nennt G eine *abelsche Gruppe*, wenn $*$ eine kommutative Verknüpfung ist, das heißt,

$$(\forall x,\, y \in G)\ \ x*y = y*x\,.$$

Man nennt G eine multiplikative [additive] Gruppe, wenn die Verknüpfung als Multiplikation (Addition) geschrieben wird.

Man nennt e das neutrale Element der Gruppe (man nennt es Einselement bei multiplikativen Gruppen und Nullelement bei additiven Gruppen).

Zu jedem $x \in G$ gibt es genau ein $x' \in G$ mit $x*x' = x'*x = e$ (dieses nennt man das Inverse von x).

Beweis. Seien $x',\, x'' \in G$ mit $x*x' = x'*x = e$ und $x*x'' = x''*x = e$. Dann ist $x'' = x''*(x*x') = (x''*x)*x' = e*x' = x'$. $\square$

Das Inverse eines Elements $x \in G$ wird bei additiven Gruppen mit $-x$ und sonst mit x^{-1} bezeichnet.

Beispiele:

1. Multiplikations- und Additionsgruppen von Körpern (siehe Definition 1.6), Additionsgruppen von Vektorräumen.

2. Additionsgruppe von $\mathbb{Z}$.

3. $X \neq \emptyset$ sei eine Menge. Dann ist die Menge $\mathrm{Bij(X)}$ aller Bijektionen $f\colon X \to X$, versehen mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen, eine Gruppe mit neutralem Element id_X. Das Inverse ist in diesem Falle die Umkehrabbildung. Die Guppe $\mathrm{Bij(X)}$ ist genau dann abelsch, wenn $|X| \le 2$.

Definition 1.6. Ein *Körper* $(K,\, 0_K,\, 1_K,\, +_K,\, \cdot_K)$ besteht aus einer Menge K mit zwei (ausgezeichneten) Elementen $0_K \in K$ und $1_K \in K$ und zwei Verknüpfungen

$$+_K\colon \begin{cases} K\times K & \to & K \\ (x,y) & \mapsto & x+_K y \end{cases} \quad \text{und} \quad \cdot_K\colon \begin{cases} K\times K & \to & K \\ (x,y) & \mapsto & x\cdot_K y \end{cases}$$

auf K, so dass gilt:

A1. $+_K$ ist assoziativ und kommutativ.

A2. $(\forall x \in K)\ \ x +_K 0_K = x$.

A3. $(\forall x \in K)\ (\exists x' \in K)\ \ x +_K x' = 0_K$.

M1. $\cdot_K$ ist assoziativ und kommutativ.

M2. $(\forall x \in K)\ \ x \cdot_K 1_K = x$.

M3. $(\forall x \in K \setminus \{0\})\ \ (\exists \widetilde{x} \in K)\ x \cdot_K \widetilde{x} = 1_K$.

D. $(\forall x,\, y,\, z \in K)\ \ x \cdot_K (y +_K z) = (x \cdot_K y) +_K (x \cdot_K z)$.

Man nennt 0_K die *Null* von K, 1_K die *Eins* von K, $+_K$ die *Addition* von K und $\cdot_K$ die *Multiplikation* von K.

Bekanntes Beispiel: $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Ein abstraktes Beispiel:
$\mathbb{F}_2 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ sei eine Menge aus 2 Elementen, $\boldsymbol{+}$ und $\boldsymbol{\cdot}$ seien definiert durch

$$\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} + \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{0} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Dann ist $(\mathbb{F}_2, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot})$ ein Körper.

Konventionen und Rechenregeln: Sei $(K,\, 0_K,\, 1_K,\, +_K,\, \cdot_K)$ ein Körper.

1. Man schreibt, soferne Verwechslungen nicht zu befürchten sind, einfach $0,\, 1,\, +,\, \cdot$ an Stelle von $0_K,\, 1_K,\, +_K,\, \cdot_K$, und K an Stelle von $(K,\, 0,\, 1,\, +,\, \cdot)$, und macht die Konventionen $xy = x \cdot y$ und „Punkt- vor Strichrechnung". Damit erhalten die Körperaxiome die folgende einfachere Gestalt:

   A1. $(\forall x,\, y,\, z \in K)\ \ (x + y) + z = x + (y + z) \quad \wedge \quad x + y = y + x$.

   A2. $(\forall x \in K)\ \ x + 0 = x$.

   A3. $(\forall x \in K)\ (\exists x' \in K)\ \ x + x' = 0$.

   M1. $(\forall x,\, y,\, z \in K)\ \ (xy)z = x(yz) \quad \wedge \quad xy = yx$.

   M2. $(\forall x \in K)\ \ x \cdot 1 = x$.

   M3. $(\forall x \in K \setminus \{0\})\ \ (\exists \widetilde{x} \in K)\ x \cdot \widetilde{x} = 1$.

   D. $(\forall x,\, y,\, z \in K)\ \ x(y + z) = xy + xz$.

2. Sei $x \in K$. Dann gibt es genau ein $x' \in K$ mit $x + x' = 0$. Dieses heißt *Negatives* von x und wird mit $-x$ bezeichnet. Für $x, y \in K$ sei $x - y = x + (-y)$. Für das Minuszeichen gelten die üblichen Rechenregeln.

   Die Eigenschaften A1, A2 und A3 besagen: $(K, 0, +)$ ist eine additive abelsche Gruppe. Man nennt die $(K, 0, +)$ die *Additionsgruppe* von K.

3. Für die Addition mehrerer Elemente verwenden wir das Summenzeichen, die leere Summe erhält den Wert 0. Für $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in K$ und $l \in \{1, \ldots, k\}$ ist dann

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{l} x_i + \sum_{i=l+1}^{k} x_i\,.$$

   Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in K$ definiert man die *Vielfachen* durch

$$nx = \sum_{i=1}^{n} x \quad \text{und} \quad n(-x) = -nx\,.$$

Sind $x,\, y \in K$ und $m,\, n \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$(-n)x = -nx\,, \quad (m+n)x = mx + nx\,, \quad (mn)x = m(nx) \ \text{ und } \ n(x+y) = nx + ny\,.$$

Ist $\mathbb{Z} \subset K$ und stimmen die Addition und die Multiplikation von K auf $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation überein, so ist das Vielfache nx dasselbe wie das Produkt aus n und x in K.

4. Sei $K^\times = K \setminus \{0\}$. Zu jedem $x \in K^\times$ gibt es genau ein $\widetilde{x} \in K^\times$ mit $x\widetilde{x} = 1$. Dieses heißt *Inverses* von x und wird mit x^{-1} bezeichnet.

   Die Eigenschaften M1, M2 und M3 besagen: $(K^\times, 1, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. Man nennt die $(K^\times, 1, \cdot)$ die *Multiplikationsgruppe* von K. Für $x \in K$ und $y \in K^\times$ sei

   $$\frac{x}{y} = xy^{-1}\,, \quad \text{also insbesondere} \quad \frac{1}{y} = y^{-1}\,.$$

   Es gelten die üblichen Rechenregeln für Brüche.
5. Für die Multiplikation mehrerer Elemente verwenden wir das Produktzeichen, das leere Produkt erhält den Wert 1. Für $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in K$ und $l \in \{1, \ldots, k\}$ ist dann

   $$\prod_{i=1}^{k} x_i = \prod_{i=1}^{l} x_i \prod_{i=l+1}^{k} x_i\,.$$

6. Für $x,\, y \in K$ gilt $(-x)y = x(-y) = -xy$, und $\bigl[\, xy = 0 \iff x = 0 \ \vee \ y = 0 \,\bigr]$.
7. Für $x \in K$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die *Potenz* x^k durch

   $$x^k = \prod_{i=1}^{k} x\,, \quad \text{also insbesondere} \quad x^0 = 1\,.$$

   Ist $x \in K^\times$ und $k \in \mathbb{N}$, so definieren wir $x^{-k} = (x^{-1})^k$. Es gelten die Potenzrechenregeln:
   - Für alle $a,\, b \in K^\times$ und $m,\, n \in \mathbb{Z}$ ist
     $$a^{-n} = (a^{-1})^n\,, \quad a^{m+n} = a^m \cdot a^n\,, \quad a^{mn} = (a^m)^n \quad \text{und} \quad (ab)^n = a^n b^n\,.$$
   - Für $a,\, b \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist
     $$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \quad \text{und} \quad a^n - b^n = (a-b) \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}\,.$$
   - Für $q \in K \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist
     $$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\,.$$

Definition 1.7. Ein *geordneter Körper* $R = (R,\, 0,\, 1,\, +,\, \cdot,\, <)$ ist ein Körper $(R,\, 0,\, 1,\, +,\, \cdot)$, gemeinsam mit einer Ordnungsrelation $<$ auf R, so dass für alle $x,\, y,\, z \in R$ gilt:

$$x < y \implies x + z < y + z \qquad \text{und} \qquad x < y \ \wedge \ z > 0 \implies xz < yz\,.$$

Einfache Folgerungen: Sei $R = (R,\, 0,\, 1,\, +,\, \cdot,\, <)$ ein geordneter Körper und $x,\, y,\, z \in R$.

1. $x \le y \implies x + z \le y + z\,.$
2. $x \le y \ \wedge \ z \ge 0 \implies xz \le yz\,.$

3. $[x > 0 \ \wedge \ y > 0] \implies [x + y > 0 \ \wedge \ xy > 0]$.
4. $x \le y \iff -y \le -x$.

   Beweis. Aus $x \le y$ folgt $-y = x + (-x - y) \le y + (-x - y) = -x$, und aus $-y \le -x$ folgt in gleicher Weise $x = -(-x) \le -(-y) = y$. □
5. $x < y \ \wedge \ z < 0 \implies xz > yz$.

   Beweis. Aus $x < y$ und $z < 0$ folgt $-z > 0$ nach 1. also $-xz = x(-z) < y(-z) = -yz$ und daher $yz < xz$. □
6. $x^2 \ge 0$, $1 > 0$, und $[x > 0 \implies x^{-1} > 0]$.

   Beweis. Aus $x > 0$ folgt $x^2 > 0$. Aus $x < 0$ folgt $-x > 0$, also ebenfalls $x^2 = (-x)^2 > 0$. Daher ist in jedem Falle $x^2 \ge 0$, und $1 = 1^2 > 0$. Wäre $x > 0$ und $x^{-1} < 0$, so folgte $1 = x \cdot x^{-1} < x \cdot 0 = 0$, ein Widerspruch.
7. Sei $0 < x < y$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $0 < y^{-1} < x^{-1}$, $0 < x^n < y^n$ und $0 < nx < ny$.

   Beweis. Nach 3. ist $x^{-1} > 0$ und $y^{-1} > 0$, also ist auch $x^{-1}y^{-1} > 0$ und
   $$y^{-1} = x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1}.$$
   Die Ungleichungen $0 < x^n < y^n$ und $0 < nx < ny$ folgen mittels Induktion nach n (Übung!).

Bisher einziges Beispiel: $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot, <)$.
Wichtigstes Beispiel: $\mathbb{R}$ (kommt gleich, siehe Satz 1.8)

Definition 1.8.

1. Seien $R = (R, 0, 1, +, \cdot)$ und $R' = (R', 0', 1', +', \cdot')$ Körper und $j\colon R \to R'$ eine Abbildung.

   j heißt *Einbettung* oder *Körperhomomorphismus*, wenn $j(0) = 0'$, $j(1) = 1'$, und für alle $x, y \in R$ ist
   $$j(x + y) = j(x) + j(y) \quad \text{und} \quad j(x \cdot y) = j(x) \cdot' j(y).$$
   Ein (*Körper-*)*Isomorphismus* ist eine bijektive Einbettung. R und R' heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $j\colon R \to R'$ gibt.

   Ist $R \subset R'$ und die Einlagerung $R \hookrightarrow R'$ eine Einbettung, so nennt man R einen *Teilkörper* von R' und R' einen *Oberkörper* von R.
2. Seien $R = (R, 0, 1, +, \cdot, <)$ und $R' = (R', 0', 1', +', \cdot', <')$ geordnete Körper.

   Ein *Ordnungsisomorphismus* $j\colon R \to R'$ ist ein ordnungstreuer Isomorphismus (siehe Definition 1.3). R und R' heißen *ordnungsisomorph*, wenn es einen Ordnungsisomorphismus $j\colon R \to R'$ gibt.

   Ist $R \subset R'$ und die Einlagerung $R \hookrightarrow R'$ eine ordnungstreue Einbettung, so nennt man R einen *geordneten Teilkörper* von R' und R' einen *geordneten Oberkörper* von R.

Bemerkungen:

1. Sei $j\colon R \to R'$ eine Einbettung von Körpern. Dann ist j injektiv, und für alle $x \in R$, $z \in R^\times$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt
   $$j(nx) = n\, j(x) \quad \text{und} \quad j(z^n) = j(z)^n.$$
   Beweis. Aus $x + (-x) = 0$ folgt $j(x) +' j(-x) = j(0) = 0$ und daher $j(-x) = -j(x)$. Aus $z\, z^{-1} = 1$ folgt $j(z) \cdot' j(z^{-1}) = j(1) = 1$ und daher $j(z^{-1}) = j(z)^{-1}$.

Mittels Induktion folgen nun für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichungen $j(nx) = n\,j(x)$ und $j(z^n) = j(z)^n$ (Übung!).

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $j((-n)x) = j(-nx) = -j(nx) = -(n\,j(x)) = (-n)j(x)$ und in gleicher Weise $j(z^{-n}) = j((z^n)^{-1}) = j(z^n)^{-1} = (j(z)^n)^{-1} = j(z)^{-n}$.

Es bleibt die Injektivität von j zu zeigen. Seien $x,\, y \in R$ mit $x \neq y$. Dann ist

$$1_{R'} = j(1_R) = j\big((x-y)(x-y)^{-1}\big) = \big(j(x) - j(y)\big)\, j(x-y)^{-1}\,, \quad \text{also} \quad j(x) \neq j(y)\,. \quad \square$$

2. Ist $j\colon R \to R'$ ein (Ordnungs-)isomorphismus (geordneter) Körper, so haben R und R' hinsichtlich Addition, Multiplikation und der Ordnungsrelation dieselben Eigenschaften. Insbesondere ist R genau dann ein vollständig geordneter Körper, wenn R' das ist.
3. Ist $j\colon R \to R'$ eine (ordnungstreue) Einbettung (geordneter) Körper, so ist $j(R) \subset R'$ ein (geordneter) Teilkörper und die Abbildung $j\colon R \to j(R)$ ein (Ordnungs-)Isomorphismus.

   Unter diesen Voraussetzungen werden wir häufig nicht mehr zwischen den Elemente $x \in R$ und ihren Bildern $j(x) \in R'$ unterscheiden. Damit wird R zum (geordneten) Teilkörper von R'. Wir sagen, wir ,,identifizieren" $j(R)$ mit R. Mengentheoretisch genauer wird dieser Prozess durch den folgenden Satz beschrieben.

Satz 1.5 (Austauschsatz)**.** *Sei $j\colon R \to R'$ eine (ordnungstreue) Einbettung (geordneter) Körper. Dann gibt es einen (geordneten) Oberkörper $R^* \supset R$ und einen (Ordnungs-)Isomorphismus $j^*\colon R^* \to R'$ mit $j^* \,|\, R = j$.*

Beweis. Wir benötigen die folgende mengentheoretische (im Rahmen unserer naiven Mengenlehre anschaulich klare) Aussage.

Existenz elementfremder Exemplare. Seien A und B Mengen und $A \neq \emptyset$. Dann gibt es eine Menge A' mit $A' \cap B = \emptyset$ und eine bijektive Abbildung $\varphi\colon A' \to A$ (man nennt dann A' ein *zu B elementfremdes Exemplar* von A).

Seien nun $R = (R,\, 0,\, 1,\, +,\, \cdot)$ und $R' = (R',\, 0',\, 1',\, +',\, \cdot')$ Körper. Ist j ein Isomorphismus, so ist nichts zu zeigen. Sei also $R' \setminus j(R) \neq \emptyset$, sei Ω eine Menge mit $\Omega \cap R = \emptyset$ und $\varphi\colon \Omega \to R' \setminus j(R)$ eine bijektive Abbildung. Sei $R^* = R \cup \Omega$ und sei $j^*\colon R^* \to R'$ definiert durch

$$j^*(x) = \begin{cases} j(x)\,, & \text{falls} \quad x \in R\,, \\ \varphi(x)\,, & \text{falls} \quad x \in \Omega\,. \end{cases}$$

j^* ist bijektiv, und wir definieren Verknüpfungen $+^*$ und $\cdot^*$ auf R^* durch

$$x +^* y = j^{*-1}\big(j^*(x) +' j^*(y)\big) \quad \text{und} \quad x \cdot^* y = j^{*-1}\big(j^*(x) \cdot' j^*(y)\big)\,.$$

Dann ist $R^* = (R^*,\, 0,\, 1,\, +^*,\, \cdot^*)$ ein Körper, $R \subset R^*$ ein Teilkörper und $j^*\colon R^* \to R'$ ein Isomorphismus mit $j^* \,|\, R = j$.

Seien nun R und R' geordnete Körper mit Ordnungsrelationen $<$ und $<'$, und sei j ordnungstreu. Wir definieren eine Ordnungsrelation $<^*$ auf R^* durch

$$x <^* y \quad \Longleftrightarrow \quad j^*(x) <' j^*(y)\,.$$

Damit ist dann R^* ein geordneten Körper, $R \subset R^*$ ist ein geordneter Teilkörper, und j^* ist ein Ordnungsisomorphismus. $\square$

Satz 1.6. *Sei R ein geordneter Körper.*

1. *Dann gibt es genau eine Einbettung* $j\colon \mathbb{Q} \to R$*, und diese ist ordnungstreu. Insbesondere ist* $\mathbb{Q}_R = j(\mathbb{Q})$ *ein geordneter Teilkörper von* R *und* $j\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_R$ *ein Ordnungsisomorhismus.*

   Für $p \in \mathbb{Z}$ *und* $q \in \mathbb{N}$ *ist*
   $$j\Big(\frac{p}{q}\Big) = \frac{p1_R}{q1_R} \in R\,, \quad \textit{und es ist} \quad \mathbb{Q}_R = \Big\{\frac{p1_R}{q1_R}\ \Big|\ p \in \mathbb{Z}\,,\ q \in \mathbb{N}\Big\} \subset R\,.$$
2. *Es gibt einen zu* R *ordnungsisomorphen geordneten Oberkörper* R' *von* $\mathbb{Q}$.

Beweis. Es genügt, 1. zu zeigen. Damit folgt dann 2. aus Satz 1.5.

Eindeutigkeit. Sei $j\colon \mathbb{Q} \to R$ eine Einbettung und $x = q^{-1}p \in \mathbb{Q}$ (mit $q \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{Z}$). Dann ist $q1_R > 0_R$, und
$$j(x) = j(q^{-1})\,j(p) = j(q\,1)^{-1}\,j(p\,1) = [q\,j(1)]^{-1}[p\,j(1)] = \frac{p1_R}{q1_R}\,.$$

Existenz und Ordnungstreue. Wir definieren $j\colon \mathbb{Q} \to R$ durch
$$j(x) = \frac{p1_R}{q1_R}\,, \quad \text{falls} \quad x = \frac{p}{q} \quad \text{mit} \quad p \in \mathbb{Z} \ \text{ und } \ q \in \mathbb{N}\,,$$
und wir müssen die Unabhängigkeit dieser Definition von der Bruchdarstellung von x zeigen. Dazu beweisen wir:
$$(\forall p,\, p' \in \mathbb{Z})\ (\forall q,\, q' \in \mathbb{N}) \quad \Big[\frac{p}{q} \le \frac{p'}{q'} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p1_R}{q1_R} \le \frac{p'1_R}{q'1_R}\Big]$$
(damit folgt auch die Ordnungstreue). Seien $p,\, p' \in \mathbb{Z}$ und $q,\, q' \in \mathbb{N}$. Dann gilt:
$$\begin{aligned}\frac{p}{q} \le \frac{p'}{q'} \quad \Longrightarrow \quad p'q - pq' \ge 0 \quad &\Longrightarrow \quad (p'q - pq')1_R = (p'1_R)(q1_R) - (p1_R)(q'1_R) \ge 0\\ &\Longrightarrow \quad \frac{p1_R}{q1_R} \le \frac{p'1_R}{q'1_R}\,.\end{aligned}$$
Die Beziehungen $j(x+y) = j(x)+j(y)$ und $j(xy) = j(x)j(y)$ sind leicht nachzurechnen. □

Satz 1.7 (Bernoulli'sche Ungleichung)**.** *Sei* $R = (R,\, 0,\, 1,\, +,\, \cdot,\, <)$ *ein geordneter Körper,* $a \in R$, $a \ge -1$ *und* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $(1+a)^n \ge 1 + na$. *Ist außerdem* $a \ne 0$ *und* $n \ge 2$, *so folgt* $(1+a)^n > 1 + na$.

Beweis. Induktion nach n. Ist $n \le 1$ oder $a = 0$, so ist die Behauptung trivial.

$n \ge 1\,,\ n-1 \to n\colon$ Sei $a \ne 0$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $(1+a)^{n-1} \ge 1 + (n-1)a$. Wegen $1 + a \ge 0$ folgt
$$(1+a)^n \ge (1+a)^{n-1}(1+a) \ge \big(1 + (n-1)a\big)(1+a) = 1 + na + (n-1)a^2 > 1 + na\,. \quad \square$$

Satz und Definition 1.8 (Existenz und Eindeutigkeit der reellen Zahlen)**.**

1. *Es gibt einen vollständigen geordneten Oberkörper von* $\mathbb{Q}$.
2. *Seien* R *und* R' *vollständige geordnete Oberkörper von* $\mathbb{Q}$. *Dann gibt es genau einen Ordnungsisomorphimus* $\Phi\colon R \to R'$, *und für diesen ist* $\Phi\,|\,\mathbb{Q} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.

Der (bis auf einen eindeutig bestimmten Ordnungsisomorphismus) eindeutig bestimmte vollständige geordnete Oberkörper von $\mathbb{Q}$ heißt *Körper der reellen Zahlen* und wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Geometrische Veranschaulichung:
Sei $\mathcal{G}$ eine anschauliche Gerade mit Nullpunkt O und Einheitspunkt E wie in 1.1 und Ordnungsrelation $\prec$ wie in 2.3. Sei $\iota_0 \colon \mathbb{Q} \to \mathcal{G}$ die ordnungstreue Abbildung, welche die Darstellung der rationalen Zahlen auf $\mathcal{G}$ beschreibt. Dann gibt es genau eine ordnungstreue bijektive Abbildung $\iota \colon \mathbb{R} \to \mathcal{G}$ mit $\iota \,|\, \mathbb{Q} = \iota_0$. Diese heißt *Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengeraden.*

Wir schicken dem (in Abschnitt 1.8 folgenden) Beweis von Satz 1.8 zwei Sätze über vollständig geordnete Körper voran, welche im Folgenden nur für den zu konstruierenden Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen interessant sind, aber beim Beweis der Einzigkeit von $\mathbb{R}$ (bis auf Ordnungsisomorphis) benötigt werden.

Satz 1.9. *Sei R ein vollständig geordneter Körper, und seien $X,\, Y \subset R_{>0}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Dann sind auch die Mengen*

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} \quad \textit{und} \quad XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$$

nach oben beschränkt, und es gilt:

$$\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)\,, \quad \sup(XY) = \sup(X)\sup(Y)\,.$$

Beweis. Sei $a = \sup(X)$ und $b = \sup(Y)$. Dann gilt für alle $x \in X$ und $y \in Y$:

$$x + y \le a + b \quad \text{und} \quad xy \le ab\,.$$

Daher ist $a + b$ eine obere Schranke von $X + Y$ und ab eine obere Schranke von XY. Wir müssen daher zeigen:

1. Ist $z \in R$ und $z < a + b$, so gibt es $x \in X$ und $y \in Y$ mit $z < x + y$.
2. Ist $z \in R$ und $z < ab$, so gibt es $x \in X$ und $y \in Y$ und $z < xy$.

1. Sei $z < a + b$ und

$$\varepsilon = \frac{a + b - z}{2} \in R_{>0}\,.$$

Dann gibt es $x \in X$ und $y \in Y$ mit $a - \varepsilon < x$ und $b - \varepsilon < y$, und es ist $x + y > a + b - 2\varepsilon = z$.

2. Sei $z < ab$ und

$$\varepsilon = \frac{ab - z}{a + b} \in R_{>0}\,.$$

Dann gibt es ein $x \in X$ und $y \in Y$ mit $a - \varepsilon < x$ und $b - \varepsilon < y$, und wir erhalten

$$xy > (a - \varepsilon)(b - \varepsilon) = ab - (a + b)\varepsilon + \varepsilon^2 > ab - (a + b)\varepsilon = z\,. \qquad \square$$

Satz 1.10. *Sei R ein vollständig geordneter Oberkörper von $\mathbb{Q}$.*

1. *Jede (in R) nach oben beschänkte nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Maximum, und jede (in R) nach unten beschänkte nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Minimum.*
2. $\mathbb{N}$ *ist (in R) nicht nach oben beschränkt, und* $\mathbb{Z}$ *ist (in R) nicht nach unten beschränkt.*
3. *Seien $a,\, b \in R$. Dann gilt:*
   (a) (Satz des Archimedes und Eudoxus) $a > 0 \;\Rightarrow\; (\exists n \in \mathbb{N}) \;\; na > b \;\;\wedge\;\; \frac{1}{n} < a.$

(b) $a < b \;\Rightarrow\; \big|\{r \in \mathbb{Q} \mid a < r < b\}\big| = \infty$.

Beweis. 1. Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$ nach oben beschränkt und $a = \sup(A)$. Ist $a \in A$, so ist $a = \max(A)$. Ist $a \notin A$, so gibt es ein $x \in A$ mit $a-1 < x < a$, und es gibt ein $y \in A$ mit $x < y < a$. Dann ist aber $0 < y - x < 1$ und $y - x \in \mathbb{Z}$, ein Widerspruch.

Die Aussage für nach unten beschränkte Mengen beweist man analog.

2. Wäre $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, so hätte $\mathbb{N}$ nach 1. ein Maximum $a \in \mathbb{N}$, aber $a+1 \in \mathbb{N}$ und $a+1 > a$, ein Widerspruch! Die Aussage für $\mathbb{Z}$ beweist man analog.

3. (a) Nach 2. gibt es $n_1,\, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 > \frac{b}{a}$ und $n_2 > \frac{1}{a}$. Dann hat $n = \max\{n_1,\, n_2\}$ die gewünschte Eigenschaft.

(b) Wir zeigen zuerst: Es gibt ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$. Nach (a) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b - a$, und nach 1. existiert $m = \max(\{l \in \mathbb{Z} \mid l < nb\})$. Dann ist $m < nb \le m+1$, also

$$\frac{m}{n} < b \le \frac{m+1}{n} \quad \text{und} \quad \frac{m}{n} \ge b - \frac{1}{n} > a\,.$$

Wir nehmen nun (entgegen der Behauptung) an, es sei $\{r \in \mathbb{Q} \mid a < r < b\} = \{r_1, \ldots, r_m\}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $a < r_1 < r_2 < \ldots < r_m < b$. Dann gibt es nach dem eben Gezeigten ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < r_1$, ein Widerspruch! □

1.3. Beweis von Satz 1.8 (Existenz und Eindeutigkeit der reellen Zahlen)

Wir zeigen die Existenzaussage in **A15** und die Eindeutigkeitsaussagen in **A16** und **A17**.

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{Q}$ heißt *Oberklasse*, wenn gilt:

(O1) $\emptyset \neq X \subsetneq \mathbb{Q}$.

(O2) $(\forall x \in X)\ (\forall y \in \mathbb{Q})\ (x < y \implies y \in X)$.

(O3) X hat kein Minimum.

Offensichtlich ist eine Teilmenge $X \subset \mathbb{Q}$ genau dann eine Oberklasse, wenn $(\mathbb{Q} \setminus X, X)$ ein Schnitt ist und X kein Minimum besitzt.

Ω sei die Menge aller Oberklassen. Für $r \in \mathbb{Q}$ sei $X(r) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > r\}$ (also $X(r) \in \Omega$), und für $X_1, X_2 \in \Omega$ sei

$$X_1 + X_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}\,.$$

A1. $(\forall\, X_1,\, X_2 \in \Omega) \quad X_1 + X_2 \in \Omega$

Beweis von **A1**. Seien $X_1,\, X_2 \in \Omega$. Wir müssen zeigen, dass die Menge $X_1 + X_2$ die Eigenschaften **(O1)**, **(O2)** und **(O3)** besitzt.

(O1) Nach Definition ist $X_1 + X_2 \neq \emptyset$. Es genügt nun, zu zeigen:

$$(\forall\, z_1 \in \mathbb{Q} \setminus X_1)\ (\forall\, z_2 \in \mathbb{Q} \setminus X_2) \quad z_1 + z_2 \notin X_1 + X_2\,.$$

Wir nehmen an, diese Behauptung sei falsch. Dann gibt es $z_1 \in \mathbb{Q} \setminus X_1$ und $z_2 \in \mathbb{Q} \setminus X_2$ mit $z_1 + z_2 \in X_1 + X_2$, also $z_1 + z_2 = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$. Dann ist aber entweder $z_1 > x_1$ oder $z_2 > x_2$, also nach **(O2)** entweder $z_1 \in X_1$ oder $z_2 \in X_2$, ein Widerspruch.

(O2) Sei $x \in X_1 + X_2,\ y \in \mathbb{Q}$ und $x < y$. Dann ist $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$. Wegen $y - x_1 > x_2$ ist $y - x_1 \in X_2$ und daher $y = x_1 + (y - x_1) \in X_1 + X_2$.

(O3) Ist $x \in X_1 + X_2$, $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, so gibt es $y_1 \in X_1$ und $y_2 \in X_2$ mit $y_1 < x_1$ und $y_2 < x_2$, also $y_1 + y_2 \in X_1 + X_2$ und $y_1 + y_2 < x$. Daher hat $X_1 + X_2$ kein Minimum. □

A2. $(X_1, X_2) \mapsto X_1 + X_2$ ist eine assoziative und kommutative Verknüpfung auf Ω.

Beweis von **A2**. Nach **A1** ist $+\colon \Omega \times \Omega \to \Omega$ eine Verknüpfung. Für X_1, X_2, $X_3 \in \Omega$ ist

$$X_1 + X_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\} = \{x_2 + x_1 \mid x_2 \in X_2,\ x_1 \in X_1\} = X_2 + X_1$$

und

$$\begin{aligned}(X_1 + X_2) + X_3 &= \{(x_1 + x_2) + x_3 \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ x_3 \in X_3\} \\ &= \{x_1 + (x_2 + x_3) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ x_3 \in X_3\} = X_1 + (X_2 + X_3)\,. \quad \square\end{aligned}$$

A3. $(\forall\, X \in \Omega) \quad X + X(0) = X$.

Beweis von **A3**. $\supset$: Ist $x \in X$ und $y \in X(0)$, so ist $x + y > x$, also auch $x + y \in X$.
$\subset$: Sei $x \in X$. Da X kein Minimum hat, gibt es ein $y \in X$ mit $y < x$, und dann ist $x = y + (x - y) \in X + X(0)$. □

A4. Sei $X \in \Omega$ und $a \in \mathbb{Q}_{>0}$. Dann gibt es ein $l \in \mathbb{Z}$ mit $la \in X$ und $(l-1)a \notin X$.

Beweis von **A4**. Sei $x \in X$, $y \in \mathbb{Q} \setminus X$, und seien m, $n \in \mathbb{N}$ mit $an > x$ und $am > -y$. Dann ist $an \in X$, $-am \notin X$, und wir betrachten die Menge $T = \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (n-k)a \notin X\} \subset \mathbb{N}_0$. Wegen $n + m \in T$ ist $T \neq \emptyset$. Ist $k_0 = \min(T)$, so folgt $(n - k_0)a \notin X$, $k_0 \neq 0$ und $(n - k_0 + 1)a \in X$. Daher leistet $l = n - k_0 + 1 \in \mathbb{Z}$ das Gewünschte. □

Für eine Teilmene $X \subset \mathbb{Q}$ sei $-X = \{x \in \mathbb{Q} \mid -x \in X\} = \{-x \mid x \in X\}$, und

$$X^- = \begin{cases} \mathbb{Q} \setminus (-X), & \text{falls } \mathbb{Q} \setminus (-X) \text{ kein Minimum hat,} \\ \big(\mathbb{Q} \setminus (-X)\big) \setminus \{a\}, & \text{falls } a = \min\big(\mathbb{Q} \setminus (-X)\big)\,. \end{cases}$$

A5. $(\forall X \in \Omega)\ \ [\,X^- \in \Omega \quad \wedge \quad X + X^- = X(0)\,]$.

Beweis von **A5**. Sei $X \in \Omega$.

$X^- \in \Omega$: Wegen $\emptyset \neq X \subsetneq \mathbb{Q}$ ist auch $\emptyset \neq \mathbb{Q} \setminus X \subsetneq \mathbb{Q}$. Ist $x \in \mathbb{Q} \setminus (-X)$ und $y \in \mathbb{Q}$ mit $y > x$, so folgt $-x \notin X$ und $-x > -y$, also $-y \notin X$ und $y \in \mathbb{Q} \setminus (-X)$. Daher sind **(O1)** und **(O2)** für $\mathbb{Q} \setminus (-X)$ erfüllt. Hat $\mathbb{Q} \setminus (-X)$ kein Minimum, so folgt $X^- = \mathbb{Q} \setminus (-X) \in \Omega$. Ist $a = \min(\mathbb{Q} \setminus (-X))$, so folgt $X^- = (\mathbb{Q} \setminus (-X)) \setminus \{a\} = X(a) \in \Omega$.

$X + X^- = X(0)$:
$\subset$: Sei $x \in X$, $y \in X^-$. Dann ist $-y \notin X$, also $-y < x$ und daher $x + y \in \mathbb{Q}_{>0} = X(0)$.
$\supset$: Sei $z \in X(0) = \mathbb{Q}_{>0}$. Nach **A4** gibt es ein $l \in \mathbb{Z}$ mit $lz \in X$ und $(l-1)z \notin X$. Daher folgt $-(l-1)z \in \mathbb{Q} \setminus (-X)$. Da X kein Minimum besitzt, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $lz - \varepsilon \in X$. Dann ist $(l-1)z - \varepsilon \notin X$, also $-(l-1)z + \varepsilon \in X^-$ und $z = (lz - \varepsilon) + [-(l-1)z + \varepsilon] \in X + X^-$. □

Für $X_1, X_2 \in \Omega$ definiert man

$$X_1 < X_2\,, \quad \text{falls} \quad X_1 \supsetneq X_2\,.$$

A6. $(\Omega,\, X(0),\, +)$ ist eine additive abelsche Gruppe. Für $X \in \Omega$ ist X^- das Negative von X. $<$ ist eine Ordnung auf Ω, und $(\forall\, X,\, X_1,\, X_2 \in \Omega) \quad X_1 < X_2 \implies X + X_1 < X + X_2$.

Beweis von **A6**. Nach **A2**, **A3** und **A5** ist $(\Omega,\, X(0),\, +)$ eine additive abelsche Gruppe, und für $X \in \Omega$ ist $X + X^- = X(0)$. Es genügt nun, die Trichotomie von $<$ zu zeigen (die Transitivität von $<$ und die Monotonie von $+$ sind offensichtlich).
Wir müssen zeigen: Sind $X_1,\, X_2 \in \Omega$ und $X_1 \not\subset X_2$ so ist $X_2 \subset X_1$. Seien also $X_1,\, X_2 \in \Omega$ und $x \in X_1 \setminus X_2$. Ist $y \in X_2$, so folgt $x < y$, also $y \in X_1$. Daher ist $X_2 \subset X_1$. □

Sei $\Omega^+ = \{X \in \Omega \mid X \subset \mathbb{Q}_{>0}\} = \{X \in \Omega \mid X \geq X(0)\}$. Für $X_1,\, X_2 \in \Omega^+$ ist nach **A6** auch $X_1 + X_2 \in \Omega^+$, und wir definieren

$$X_1X_2 = \{x_1x_2 \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\} \subset \mathbb{Q}_{>0}\,.$$

A7. $(\forall\, X_1,\, X_2 \in \Omega^+) \quad X_1X_2 \in \Omega^+$.

Beweis von **A7**. Seien $X_1,\, X_2 \in \Omega^+$. Wir müssen zeigen, dass die Menge X_1X_2 die Eigenschaften **(O1)**, **(O2)** und **(O3)** besitzt.

(O1) Wegen $\emptyset \neq X_1 \subset \mathbb{Q}_{>0}$ und $\emptyset \neq X_2 \subset \mathbb{Q}_{>0}$ ist auch $\emptyset \neq X_1X_2 \subset \mathbb{Q}_{>0} \subsetneq \mathbb{Q}$.

(O2) Sei $x \in X_1X_2$, $y \in \mathbb{Q}$ und $x < y$. Dann ist $x = x_1x_2$ mit $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$, also

$$\frac{y}{x_1} > \frac{x}{x_1} = x_2\,, \quad \frac{y}{x_1} \in X_2 \quad \text{und} \quad y = x_1\frac{y}{x_1} \in X_1X_2\,.$$

(O3) Sei $x = x_1x_2 \in X_1X_2$ mit $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$. Dann gibt es $y_1 \in X_1$ und $y_2 \in X_2$ mit $y_1 < x_1$ und $y_2 < x_2$. Wegen $y_1,\, y_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$ folgt $y_1y_2 < x_1x_2$ und $y_1y_2 \in X_1X_2$. Daher hat X_1X_2 kein Minimum. □

A8. $(X_1, X_2) \mapsto X_1X_2$ ist eine assoziative und kommutative Verknüpfung auf Ω^+, und

$$(\forall\, X,\, X_1,\, X_2 \in \Omega^+) \quad X(X_1 + X_2) = XX_1 + XX_2\,.$$

Beweis von **A8**. Nach **A7** ist $(X_1, X_2) \mapsto X_1X_2$ eine Verknüpfung auf Ω^+. Für alle $X,\, X_1,\, X_2 \in \Omega^+$ ist

$$\begin{aligned} X_1X_2 &= \{x_1x_2 \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\} = \{x_2x_1 \mid x_2 \in X_2,\ x_1 \in X_1\} = X_2X_1\,,\\ (X_1X_2)X &= \{(x_1x_2)x \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ x \in X\}\\ &= \{x_1(x_2x) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ x \in X\} = X_1(X_2X)\,, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X(X_1 + X_2) &= \{x(x_1 + x_2) \mid x \in X,\, x_1 \in X_1,\, x_2 \in X_2\}\\ &= \{xx_1 + xx_2 \mid x \in X,\, x_1 \in X_1,\, x_2 \in X_2\} \subset XX_1 + XX_2\,. \end{aligned}$$

Sei nun $z \in XX_1 + XX_2$. Dann ist $z = xx_1 + x'x_2$ mit $x,\, x' \in X$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, und wir können ohne Einschränkung $x \leq x'$ annehmen. Dann ist

$$z = \overline{x}\,(x_1 + x_2) \quad \text{mit} \quad \overline{x} = \frac{xx_1 + x'x_2}{x_1 + x_2}\,.$$

Wegen $\overline{x} \geq x$ ist $\overline{x} \in X$ und daher $z \in X(X_1 + X_2)$. □

A9. $(\forall\, X \in \Omega^+) \quad XX(1) = X$.

Beweis von **A9**. Sei $X \in \Omega^+$
$\subset$: Ist $x \in X$ und $z \in X(1)$, so ist $x \geq 0$ und $z > 1$, also $xz > x$ und daher $xz \in X$.
$\supset$: Sei $x \in X$. Da X kein Minimum besitzt, gibt es ein $y \in X$ mit $y < x$, und es ist $x = y(xy^{-1}) \in XX(1)$. □

A10. Sei $X \in \Omega^+ \setminus \{X(0)\}$ und $a \in X(1)$. Dann gibt es ein $l \in \mathbb{Z}$ mit $a^l \in X$ und $a^{l-1} \notin X$.

Beweis von **A10**. Sei $x \in X$ und $y \in X(0) \setminus X$. Wegen $a-1>0$ gibt es $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n(a-1) > x$ und $m(a-1) > y^{-1}$. Nach Satz 1.7.6 ist $a^n \ge 1+n(a-1) > x$, folglich $a^n \in X$, und $a^m \ge 1+m(a-1) > y^{-1}$, also $a^{-m} < y$, und daher $a^{-m} \notin X$. Sei nun $T = \{k \in \mathbb{N}_0 \mid a^{n-k} \notin X\}$. Wegen $n+m \in T$ ist $T \ne \emptyset$. Ist $k_0 = \min(T)$, so folgt $a^{n-k_0} \notin X$, $k_0 \ne 0$ und $a^{n-k_0+1} \in X$. Daher leistet $l = n-k_0+1 \in \mathbb{Z}$ das Gewünschte. □

Für $X \in \Omega^+ \setminus \{X(0)\}$ sei $X^\vee = \{x^{-1} \mid x \in X\}$ und

$$X^{-1} = \begin{cases} \mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee\,, & \text{falls} \quad \mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee \quad \text{kein Minimum hat,} \\ (\mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee) \setminus \{a\}, & \text{falls} \quad a = \min(\mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee)\,. \end{cases}$$

A11. $(\forall\, X \in \Omega^+ \setminus \{X(0)\})\ \ [\, X^{-1} \in \Omega^+ \quad \wedge \quad XX^{-1} = X(1)\,]$.

Beweis von **A11**. Sei $X \in \Omega^+ \setminus \{X(0)\}$.

$X^{-1} \in \Omega^+$: Es ist $\mathbb{Q}_{>0} \supsetneq X$, und aus $r \in \mathbb{Q}_{>0} \setminus X$ folgt $r^{-1} \in \mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee$. Daher ist $\emptyset \ne \mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee \subset \mathbb{Q}_{>0} \subsetneq \mathbb{Q}$. Ist $x \in \mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee$, $y \in \mathbb{Q}$ und $y > x$, so ist $x^{-1} \notin X$ und $x^{-1} > y^{-1}$, also auch $y^{-1} \notin X$ und daher $y \in \mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee$. Damit folgt, dass $\mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee$ die Bedingungen **(O1)** und **(O2)** erfüllt. Hat $\mathbb{Q} \setminus X^\vee$ kein Minimum, so folgt $X^{-1} = \mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee \in \Omega^+$. Ist $a = \min(\mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee)$, so folgt $X^{-1} = (\mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee) \setminus \{a\} = X(a) \in \Omega^+$.

$XX^{-1} = X(1)$:
$\subset$: Sei $x \in X$ und $y \in X^{-1} \subset \mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee$. Dann ist $y^{-1} \notin X$, also $y^{-1} < x$ und daher $xy \in X(1)$.
$\supset$: Sie $z \in X(1)$. Nach **A10** gibt es ein $l \in \mathbb{Z}$ mit $z^l \in X$ und $z^{l-1} \notin X$. Da X kein Minimum besitzt, gibt es ein $a \in X$ mit $a < z^l$. Wegen $az^{-1} < z^{l-1}$ ist $az^{-1} \notin X$, also $a^{-1}z \in \mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee$. Nun ist aber auch $z^{1-l} \in \mathbb{Q}_{>0} \setminus X^\vee$ und $z^{1-l} < a^{-1}z$, also $a^{-1}z \in X^{-1}$ und $z = a(a^{-1}z) \in XX^{-1}$. □

Für $X, Y \in \Omega$ definieren wir

$$X{\bullet}Y = \begin{cases} XY\,, & \text{falls} \quad X, Y \in \Omega^+\,, \\ (X^-Y)^-\,, & \text{falls} \quad X \notin \Omega^+,\ Y \in \Omega^+\,, \\ (XY^-)^-, & \text{falls} \quad X \in \Omega^+,\ Y \notin \Omega^+\,, \\ X^-Y^-, & \text{falls} \quad X, Y \notin \Omega^+\,. \end{cases}$$

A12. $(X,Y) \mapsto X \bullet Y$ ist eine kommutative und assoziative Verknüpfung auf Ω, und

$$(\forall\, X,\, Y \in \Omega)\ \ [\, X{\bullet}Y^- = X^-{\bullet}Y = (X{\bullet}Y)^- \quad \wedge \quad X^-{\bullet}Y^- = X{\bullet}Y\,]\,.$$

Beweis von **A12**. Für $X \in \Omega$ sei

$$|X| = \begin{cases} X, & \text{falls} \quad X \in \Omega^+\,, \\ X^-, & \text{falls} \quad X \notin \Omega^+\,. \end{cases}$$

Nach **A8** ist $(X,Y) \mapsto X{\bullet}Y$ eine kommutative und assoziative Verknüpfung auf Ω^+, und für alle X_1, X_2, $X_3 \in \Omega$ gilt:

- $X_1{\bullet}X_2 = X_2{\bullet}X_1 = |X_1||X_2|$, falls X_1, X_2 beide oder beide nicht zu Ω^+ gehören, und $X_1{\bullet}X_2 = X_2{\bullet}X_1 = (|X_1||X_2|)^-$ sonst.

- $X_1{\scriptstyle\bullet}(X_2{\scriptstyle\bullet}(X_3) = (X_1{\scriptstyle\bullet}X_2){\scriptstyle\bullet}X_3 = |X_1||X_2||X_3|$, falls keine oder genau zwei der Oberklassen X_1, X_2, X_3 zu Ω^+ gehören, und $X_1{\scriptstyle\bullet}(X_2{\scriptstyle\bullet}X_3) = (X_1{\scriptstyle\bullet}X_2){\scriptstyle\bullet}X_3 = (|X_1||X_2||X_3|)^-$ sonst.

Daher ist $(X,Y) \mapsto X{\scriptstyle\bullet}Y$ auch kommutativ und assoziativ auf Ω. Wir zeigen nun:

$$(\forall\, X,\, Y \in \Omega) \quad X{\scriptstyle\bullet}Y^- = (X{\scriptstyle\bullet}Y)^-\,.$$

FALL 1: $X,\, Y \in \Omega^+$. Dann ist $X^-{\scriptstyle\bullet}Y = ((X^-)^-{\scriptstyle\bullet}Y)^- = (X{\scriptstyle\bullet}Y)^-$.
FALL 2: $X \in \Omega^+,\ Y \notin \Omega^+$. Dann ist $X^-{\scriptstyle\bullet}Y = (X^-)^-Y^- = XY^- = [(XY^-)^-]^- = (X{\scriptstyle\bullet}Y)^-$.
FALL 3: $X \notin \Omega^+,\ Y \in \Omega^+$. Dann ist $X^-{\scriptstyle\bullet}Y = X^-Y = [(X^-Y)^-]^- = (X{\scriptstyle\bullet}Y)^-$.
FALL 4: $X,\, Y \notin \Omega^+$. Dann ist $X^-{\scriptstyle\bullet}Y = (X^-Y^-)^- = (X{\scriptstyle\bullet}Y)^-$.
Wegen der Kommutativität von ${\scriptstyle\bullet}$ folgt nun auch $X^-{\scriptstyle\bullet}Y = (X{\scriptstyle\bullet}Y)^-$ für alle $X,\, Y \in \Omega$, und $X^-{\scriptstyle\bullet}Y^- = (X^-{\scriptstyle\bullet}Y)^- = ((X{\scriptstyle\bullet}Y)^-)^- = X{\scriptstyle\bullet}Y$. $\square$

A13. Für alle $X,\, X_1,\, X_2 \in \Omega$ ist $X{\scriptstyle\bullet}X(1) = X,\ X{\scriptstyle\bullet}(X_1 + X_2) = (X{\scriptstyle\bullet}X_1) + (X{\scriptstyle\bullet}X_2)$, und im Falle $X > X(0)$ gilt: $X_1 < X_2 \implies X{\scriptstyle\bullet}X_1 < X{\scriptstyle\bullet}X_2$.

Beweis von **A13**. Für $X \in \Omega^+$ ist $X{\scriptstyle\bullet}X(1) = XX(1) = X$ nach **A9**. Ist $X \notin \Omega^+$, so folgt $X{\scriptstyle\bullet}X(1) = (X^-X(1))^- = (X^-)^- = X$.
Für den Nachweis des Distributivgesetzes benutzen wir die Rechenregeln aus **A12** und unterscheiden mehrere Fälle.
FALL 1: $X \in \Omega^+$ und $X_1 + X_2 \in \Omega^+$. Sind $X_1,\, X_2 \in \Omega^+$, so folgt die Behauptung aus **A8**. Sind X_1 und X_2 nicht beide in Ω^+, so genügt es (wegen der Kommutativität der Addition), den Fall $X_1 \in \Omega^+,\ X_2 \notin \Omega^+$ zu betrachten. In diesem Falle ist

$$X{\scriptstyle\bullet}(X_1 + X_2) + (X{\scriptstyle\bullet}X_2^-) = X{\scriptstyle\bullet}(X_1 + X_2 + X_2^-) = X{\scriptstyle\bullet}X_1\,,$$

und wegen $X{\scriptstyle\bullet}X_2^- = (X{\scriptstyle\bullet}X_2)^-$ folgt

$$X{\scriptstyle\bullet}(X_1 + X_2) = X{\scriptstyle\bullet}(X_1 + X_2) + (X{\scriptstyle\bullet}X_2^-) + (X{\scriptstyle\bullet}X_2) = (X{\scriptstyle\bullet}X_1) + (X{\scriptstyle\bullet}X_2)\,.$$

FALL 2: $X \in \Omega^+$ und $X_1 + X_2 \notin \Omega^+$. Dann ist $(X_1 + X_2)^- = X_1^- + X_2^- \in \Omega^+$, und nach FALL 1 folgt

$$X{\scriptstyle\bullet}(X_1+X_2) = (X{\scriptstyle\bullet}(X_1^- + X_2^-))^- = (X{\scriptstyle\bullet}X_1^- + X{\scriptstyle\bullet}X_2^-)^- = (X{\scriptstyle\bullet}X_1^-)^- + (X{\scriptstyle\bullet}X_2^-)^- = X{\scriptstyle\bullet}X_1 + X{\scriptstyle\bullet}X_2\,.$$

FALL 3: $X \notin \Omega^+$. Nach FALL 1 und FALL 2 folgt

$$X{\scriptstyle\bullet}(X_1+X_2) = (X^-{\scriptstyle\bullet}(X_1+X_2))^- = (X^-{\scriptstyle\bullet}X_1+X^-{\scriptstyle\bullet}X_2)^- = (X^-{\scriptstyle\bullet}X_1)^- + (X^-{\scriptstyle\bullet}X_2)^- = X{\scriptstyle\bullet}X_1 + X{\scriptstyle\bullet}X_2\,.$$

Es bleibt die Monotonie der Multiplikation zu beweisen. Seien also $X,\, X_1,\, X_2 \in \Omega,\ X > X(0)$ und $X_1 < X_2$. Dann ist $X_2 + X_1^- > X_1 + X_1^- = X(0)$ (nach **A5**) und daher

$$X(0) < X{\scriptstyle\bullet}(X_2 + X_1^-) = X{\scriptstyle\bullet}X_2 + X{\scriptstyle\bullet}X_1^- = X{\scriptstyle\bullet}X_2 + (X{\scriptstyle\bullet}X_1)^-\,,$$

woraus $X{\scriptstyle\bullet}X_1 < X{\scriptstyle\bullet}X_2 + (X{\scriptstyle\bullet}X_1)^- + X{\scriptstyle\bullet}X_1 = X{\scriptstyle\bullet}X_2$ folgt. $\square$

A14. $(\Omega,\, X(0),\, X(1),\, +,\, {\scriptstyle\bullet},\, <)$ ist ein vollständig geordneter Körper.

Beweis von **A14**. Nach **A5** ist $(\Omega,\, X(0)+)$ eine additive abelsche Gruppe. Nach **A12** ist ${\scriptstyle\bullet}$ eine kommutative und assoziative Verknüpfung auf Ω, nach **A13** ist $X(1)$ das neutrale Element von ${\scriptstyle\bullet}$ und es gilt das Distributivgesetz. Für $X \in \Omega^+ \setminus \{X(0)\}$ folgt $X{\scriptstyle\bullet}X^{-1} = XX^{-1} = X(1)$ nach **A11**. Ist $X \in \Omega \setminus \Omega^+$, so ist $X^- \in\in \Omega^+ \setminus \{X(0)\}$, also $(X^-)^{-1} \in \Omega^+ \setminus \{X(0\}$ und $X^-(X^-)^{-1} = X(1)$ (wieder nach **A11**). Mit $X' = [(X^-)^{-1}]^- \in \Omega \setminus \Omega^+$ folgt dann $X{\scriptstyle\bullet}X' = X(1)$ auf Grund der Definition von ${\scriptstyle\bullet}$. Nach **A6** ist $<$ eine Ordnung auf Ω, bezüglich der die Addition monoton ist, und nach **A13** ist auch die Multiplikation monoton. Daner ist $(\Omega,\, X(0),\, X(1),\, +,\, \cdot,\, <)$ ist ein geordneter Körper.

Es bleibt zu zeigen: Jeder Schnitt in Ω besitzt ein Schnittelement.

Sei $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ein Schnitt in Ω und

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (\exists X \in \mathcal{B})\ x \in X\}\,.$$

Wir werden zeigen: B erfüllt **(O1)**, **(O2)** und **(O3)** (also $B \in \Omega$), und B ist Schnittelement von $(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

(O1) Wegen $\mathcal{B} \ne \emptyset$ gibt es ein $X \in \mathcal{B}$, und nach Definition ist $X \subset B$, also $B \ne \emptyset$. Wegen $\mathcal{A} \ne \emptyset$ gibt es ein $Y \in \mathcal{A}$, und für alle $X \in \mathcal{B}$ ist $Y < X$, also $Y \supsetneq X$. Ist $y \in \mathbb{Q} \setminus Y$, so folgt $(\forall X \in \mathcal{B}) y \notin X$, also $y \notin B$ und daher $B \ne \mathbb{Q}$.

(O2) Sei $x \in B$ und $y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$. Ist $X \in \mathcal{B}$ mit $x \in X$, so folgt $y \in X$ und daher $y \in B$.

(O3) Wir nehmen an, B habe ein Minimum. Ist $b = \min(B)$ und $X \in \mathcal{B}$ mit $b \in X$, so ist $X \subset B$ und daher auch $b = \min(X)$, ein Widerspruch.

Es bleibt zu zeigen: $(\forall X \in \mathcal{A})\ (\forall Y \in \mathcal{B})\ \ X \le B \le Y$.

Ist $Y \in \mathcal{B}$, so folgt $Y \subset B$, also $B \le Y$. Wir nehmen nun an, es sei $X \in \mathcal{A}$ und $B < X$. Dann ist $X \subsetneq B$, es gibt also ein $x \in B \setminus X$. Sei $Y \in \mathcal{B}$ mit $x \in Y$. Dann ist $Y \not\subset X$, also $X \subsetneq Y$ und daher $Y < X$, ein Widerspruch! □

A15. Es gibt einen vollständigen geordneten Oberkörper von $\mathbb{Q}$.

Beweis von **A15.** Nach **A14** und Satz 1.6. □

A16. Seien R und R' geordnete Oberkörper von $\mathbb{Q}$. Dann gibt es höchstens einen Ordnungsisomorphismus $\Phi\colon R \to R'$, und für diesen ist $\Phi \,|\, \mathbb{Q} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.

Beweis von **A16.** Ist $\Phi\colon R \to R'$ ein Ordnungsisomorphismus, so ist $\Phi \,|\, \mathbb{Q}\colon \mathbb{Q} \to R'$ eine Einbettung, und aus Satz 1.6 folgt $\Phi \,|\, \mathbb{Q} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.

Seien nun $\Phi_1,\, \Phi_2\colon R \to R'$ Ordnungsisomorphismen. Dann ist auch $\Phi = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1\colon R \to R$ ein Ordnungsisomorphismus, und es ist $\Phi \,|\, \mathbb{Q} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. Wir nehmen nun an, es sei $x \in R$ mit $\Phi(x) < x$ (ist $\Phi(x) > x$, so betrachten wir $-x$ an Stelle von x). Nach Satz 1.10 gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $\Phi(x) < r < x$, und damit folgt $r = \Phi(r) < \Phi(x)$, ein Widerspruch. □

A17. Seien $R = (R,\, 0,\, 1,\, +,\, \cdot,\, <)$ und $R' = (R',\, 0',\, 1',\, +',\, \cdot',\, <')$ vollständige geordnete Oberkörper von $\mathbb{Q}$. Dann gibt es einen Ordnungsisomorphismus $\varphi\colon R \to R'$.

Beweis von **A17***.* Wir werden laufend Satz 1.10 verwenden, ohne das jedes Mal explizit zu erwähnen. Für eine nach oben beschränkte Teilmenge $\emptyset \ne X \subset \mathbb{Q}_{\ge 0}$ bezeichne $\sup_R(X)$ ihr Supremum in R und $\sup_{R'}(X)$ ihr Supremum in R'.

Für $x \in R$ sei $L_x = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \le x\}$. Dann ist $\sup_R(L_x) = x$, L_x ist in $\mathbb{Q}$ (und daher auch in R') nach oben beschränkt, und wir definieren $\varphi\colon R \to R'$ durch $\varphi(x) = \sup_{R'}(L_x)$. Dann ist $\varphi \,|\, \mathbb{Q} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$, und wir zeigen die folgenden Behauptungen **a.** bis **d.**.

a. φ ist ordnungstreu:

Seien $x,\, y \in R$, $x < y$, und seien $s_1,\, s_2 \in \mathbb{Q}$ mit $x < s_1 < s_2 < y$. Dann ist s_1 eine obere Schranke von L_x und $s_y \in L_y$, also $\varphi(x) \le' s_1 < s_2 \le' \varphi(y)$.

b. $(\forall x,\, y \in R)\ \ \varphi(x+y) = \varphi(x) +' \varphi(y)$.
Wir zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0})\quad -\varepsilon <' \varphi(x) +' \varphi(y) -' \varphi(x+y) <' \varepsilon$.
Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$, und seien $x_1,\, y_1,\, x_2,\, y_2 \in \mathbb{Q}$, so dass

$$x - \frac{\varepsilon}{4} < x_1 < x < x_2 < x + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{und} \quad y - \frac{\varepsilon}{4} < y_1 < y < y_2 < y + \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Dann folgt $x_1 + y_1 < x + y < x_2 + y_2$,

$$x_1 = \varphi(x_1) <' \varphi(x) <' \varphi(x_2) = x_2\,, \quad y_1 = \varphi(y_1) <' \varphi(y) <' \varphi(y_2) = y_2$$

und $x_1 + y_1 = \varphi(x_1 + y_1) <' \varphi(x+y) <' \varphi(x_2 + y_2) = x_2 + y_2$. Damit erhalten wir

$$-\varepsilon < x_1 + y_1 - (x_2 + y_2) <' \varphi(x) +' \varphi(y) -' \varphi(x+y) <' x_2 + y_2 - (x_1 + y_1) < \varepsilon\,.$$

c. $(\forall x,\, y \in R)\ \ \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot' \varphi(y)$.
Sei zuerst $x > 0$ und $y > 0$. Wir zeigen wieder: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0})\quad -\varepsilon <' \varphi(x) \cdot' \varphi(y) -' \varphi(x \cdot y) <' \varepsilon$.
Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$, sei $z \in \mathbb{N}$ mit $z > x$ und $z > y$, und sei $\varepsilon_1 \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $\varepsilon_1 < x$, $\varepsilon_1 < y$ und $4z\varepsilon_1 < \varepsilon$.
Seien $x_1,\, y_1,\, x_2,\, y_2 \in \mathbb{Q}$, so dass

$$x - \varepsilon_1 < x_1 < x < x_2 < x + \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad y - \varepsilon_1 < y_1 < y < y_2 < y + \varepsilon_1\,.$$

Dann folgt $x_1 y_1 < x \cdot y < x_2 y_2$,

$$x_1 = \varphi(x_1) <' \varphi(x) <' \varphi(x_2) = x_2\,, \quad y_1 = \varphi(y_1) <' \varphi(y) <' \varphi(y_2) = y_2$$

und $x_1 y_1 = \varphi(x_1 y_1) <' \varphi(x \cdot y) <' \varphi(x_2 y_2) = x_2 y_2$. Damit erhalten wir

$$-(x_2 y_2 - x_1 y_1) <' \varphi(x) \cdot' \varphi(y) -' \varphi(x \cdot y) < x_2 y_2 - x_1 y_1\,,$$

und wegen $x_2 y_2 - x_1 y_1 = x_2(y_2 - y_1) + (x_2 - x_1) y_1 < 2z\varepsilon_1 + 2z\varepsilon_1 < \varepsilon$ folgt die Behauptung.

Seien nun $x,\, y \in R$ beliebig, und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $x + n > 0$ und $y + n > 0$. Nach dem eben Gezeigten ist dann $\varphi\big((n+x)\cdot(n+y)\big) = \varphi(n+x) \cdot' \varphi(n+y)$, und aus **b.** folgt $\varphi(nx) = n\varphi(x)$ und $\varphi(ny) = n\varphi(y)$. Damit erhalten wir

$$\varphi\big((n+x)\cdot(n+y)\big) = \varphi(n^2 + nx + ny + x \cdot y) = n^2 +' n\varphi(x) +' n\varphi(y) +' \varphi(x \cdot y)$$

und

$$\varphi(n+x) \cdot' \varphi(n+y) = (n +' \varphi(x)) \cdot' (n +' \varphi(y)) = n^2 +' n\varphi(x) +' n\varphi(y) +' \varphi(x) \cdot' \varphi(y)\,,$$

also $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot' \varphi(y)$.

d. φ ist surjektiv.
Sei $x' \in R' \setminus \mathbb{Q}$ und $X = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \le' x'\}$. Dann ist X nach oben beschränkt (in R', also in $\mathbb{Q}$ und daher in R). Sei $x = \sup_R(X) \in R^+$. Wir zeigen: $X = \{r \in \mathbb{Q}_{\ge 0} \mid r \le x\}$ (dann folgt $x' = \varphi(x)$).

Nach Definition ist $X \subset \{r \in \mathbb{Q} \mid r \le x\}$. Sei $r \in \mathbb{Q}$ und $r \le x$. Dann ist $r < x$, und es gibt ein $r' \in X$ mit $r < r'$. Damit folgt $r < r' \le' x'$, also $r \in X$. $\square$

1.4. Existenz von Wurzeln

Satz und Definition 1.11.

1. *Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\alpha^n = a$. Es ist $\alpha < 1$, falls $a < 1$, und $\alpha > 1$, falls $a > 1$.*

   Die Zahl $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\alpha^n = a$ heißt *n-te Wurzel* aus a. Man schreibt $\alpha = \sqrt[n]{a}$. Man nennt $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$ die *Quadratwurzel* und $\sqrt[3]{a}$ die *Kubikwurzel* aus a.
2. *Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Dann hängt die Zahl $\sqrt[q]{a^p} \in \mathbb{R}_{>0}$ nur von r (und nicht von der Bruchdarstellung $r = \frac{p}{q}$) ab.*

   Man definiert $a^r = \sqrt[q]{a^p}$. Im Falle $r > 0$ definiert man $0^r = 0$.

Beweis. 1. Aus den Bemerkungen nach Definition 1.7 folgt: Sind $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$, so folgt $0 \leq \alpha_1^n < \alpha_2^n$. Daher genügt es, die Existenz von α zu zeigen. Dazu zeigen wir zuerst:

A. Seien $x,\ y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x^n < a < y^n$. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < y$ und $(x+\varepsilon)^n < a < (y-\varepsilon)^n$.

Beweis von **A.** Sei

$$x_1 = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} x^{n-\nu} \quad \text{und} \quad y_1 = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} y^{n-\nu}\,.$$

Es ist $x_1 \geq 0$, $y_1 > 0$, und wir wählen $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\varepsilon < \min\{1, y\}$, $\varepsilon y_1 < y^n - a$ und $\varepsilon x_1 < a - x_1^n$. Dann folgt $(\forall \nu \in \mathbb{N})$ $\bigl[\varepsilon^\nu \leq \varepsilon \ \wedge\ (-\varepsilon)^\nu \geq -\varepsilon\bigr]$, also

$$(x+\varepsilon)^n = x^n + \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} x^{n-\nu}\varepsilon^\nu \leq x^n + \varepsilon x_1 < a$$

und

$$(y-\varepsilon)^n = y^n + \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} y^{n-\nu}(-\varepsilon)^\nu \geq y^n - \varepsilon y_1 > a\,. \quad \text{Damit ist } \mathbf{A} \text{ gezeigt.}$$

Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid x^n \leq a\}$ ist nach oben beschränkt (offensichtlich ist $\max\{1, a\}$ eine obere Schranke von M), und es sei $\alpha = \sup(M)$. Dann ist $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und wir zeigen $\alpha^n = a$. Wäre $\alpha^n < a$, so gäbe es nach **A** ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $(\alpha+\varepsilon)^n < a$, also $\alpha + \varepsilon \in M$, ein Widerspruch. Wäre $\alpha^n > a$, so gäbe es nach **A** ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $(\alpha-\varepsilon)^n > a$, und dann wäre auch $\alpha - \varepsilon$ eine obere Schranke von M, ebenfalls ein Widerspruch.

2. Sei $r = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ mit $p,\ p' \in \mathbb{Z}$ und $q,\ q' \in \mathbb{N}$. Dann ist $pq' = p'q$, und wir erhalten

$$\bigl(\sqrt[q]{a^p}\,\bigr)^{qq'} = \bigl[\bigl(\sqrt[q]{a^p}\,\bigr)^q\bigr]^{q'} = (a^p)^{q'} = a^{pq'} = a^{p'q} = (a^{p'})^q = \bigl[\bigl(\sqrt[q']{a^{p'}}\,\bigr)^{q'}\bigr]^q = \bigl(\sqrt[q']{a^{p'}}\,\bigr)^{qq'},$$

also $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}$. □

Bemerkung:
Sei $a \in \mathbb{R}_{<0}$ und $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Dann gibt es genau ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha^n = a$, nämlich $\alpha = -\sqrt[n]{-a}$. Man definiert dann auch $\sqrt[n]{a} = \alpha$.
Vorsicht bei dieser Definition! Es ist $\sqrt[6]{(-27)^2} = 3$, aber $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Satz 1.12. *Seien $a,\ b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $r,\ s \in \mathbb{Q}$.*

1. $a^{r+s} = a^r a^s$, $a^{-r} = (a^{-1})^r$, $a^r b^r = (ab)^r$ *und* $(a^r)^s = a^{rs}$.
2. $a < b \ \wedge\ r > 0 \implies a^r < b^r$, *und* $a < b \ \wedge\ r < 0 \implies a^r > b^r$.
3. $r < s \ \wedge\ a > 1 \implies a^r < a^s$, *und* $r < s \ \wedge\ a < 1 \implies a^r > a^s$.

Beweis. Sei $r = \frac{p}{q}$ und $s = \frac{p'}{q'}$ mit $p, p' \in \mathbb{Z}$ und $q, q' \in \mathbb{N}$.

1. Es ist

$$(a^{r+s})^{qq'} = a^{pq'+p'q} = a^{pq'}a^{p'q} = (a^p)^{q'}(a^{p'})^q = \big[(a^r)^q\big]^{q'}\big[(a^s)^{q'}\big]^q = (a^r)^{qq'}(a^s)^{qq'} = (a^ra^s)^{qq'}\,,$$

und daher folgt $a^{r+s} = a^ra^s$. Insbesondere ist $a^ra^{-r} = a^0 = 1$ und daher $a^{-r} = (a^r)^{-1}$. Es ist $(a^rb^r)^q = (a^r)^q(b^r)^q = a^pb^p = (ab)^p = \big[(ab)^r\big]^q$ und daher $a^rb^r = (ab)^r$. Schließlich ist

$$\big[(a^r)^s\big]^{qq'} = \big[[(a^r)^s]^{q'}\big]^q = \big[(a^r)^{p'}\big]^q = \big[(a^r)^q\big]^{p'} = (a^p)^{p'} = a^{pp'} = (a^{rs})^{qq'}\,, \quad \text{also} \quad (a^r)^s = a^{rs}\,.$$

2. Aus $a < b$ und $r > 0$ folgt $p > 0$ und $a^{-1}b > 1$ und daher

$$1 < \sqrt[q]{(a^{-1}b)^p} = (a^{-1}b)^r = (a^r)^{-1}b^r\,, \quad \text{also} \quad a^r < b^r\,.$$

Aus $a < b$ und $r < 0$ folgt $-r > 0$, also $(a^r)^{-1} = a^{-r} < b^{-r} = (b^r)^{-1}$ und daher $b^r < a^r$.

3. Aus $r < s$ und $a > 1$ folgt $0 < s - r$, also $1 = a^0 < a^{s-r} = a^s(a^r)^{-1}$ und daher $a^r < a^s$. Im Falle $a < 1$ schließt man ebenso. □

Satz 1.13 (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel)**.** *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \;\leq\; \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\,, \quad \textit{mit Gleichheit genau dann, wenn} \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_n\,.$$

Beweis. Ist $a_\nu = 0$ für ein $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ oder $a_1 = \ldots = a_n$, so ist die Behauptung offensichtlich richtig. Seien also $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{>0}$ nicht alle gleich. Wir zeigen zuerst:

A. Ist $a_1 + \ldots + a_n = n$, so ist $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n < 1$.

Beweis von **A.** Induktion nach n. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.
$n \geq 2$, $n - 1 \to n$: Da es auf die Reihenfolge der Faktoren nicht ankommt, können wir (eventuell nach geeigneter Umnummerierung) $a_{n-1} < 1$ und $a_n > 1$ annehmen. Aus

$$a_1 + \ldots + a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n - 1) = n - 1 \quad \text{folgt} \quad a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-2}(a_{n-1} + a_n - 1) \leq 1$$

(nach Induktionsvoraussetzung), und wegen $a_{n-1}(a_n - 1) < a_n - 1$ ist $a_{n-1}a_n < a_{n-1} + a_n - 1$. Damit folgt $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-2}(a_{n-1}a_n) < a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-2}(a_{n-1} + a_n - 1) \leq 1$, also **A**.

Seien nun $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\lambda = a_1 + \ldots + a_n$. Für $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ sei $a'_\nu = \lambda^{-1}na_\nu$. Dann ist $a'_1 + \ldots + a'_n = n$, es ist nicht $a'_1 = \ldots = a'_n = 1$, und daher nach **A**

$$a'_1 \cdot \ldots \cdot a'_n = \Big(\frac{n}{\lambda}\Big)^n a_1 \cdot \ldots \cdot a_n < 1\,, \quad \text{also} \quad \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} < \frac{\lambda}{n} = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\,. \qquad □$$

1.5. Absolutbetrag und Vorzeichen

Definition 1.9. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir das *Vorzeichen* oder *Signum* von x durch

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls} \;\; x > 0 \;\; \text{(dann heißt } x \text{ \textit{positiv})}, \\ -1\,, & \text{falls} \;\; x < 0 \;\; \text{(dann heißt } x \text{ \textit{negativ})}, \\ 0\,, & \text{falls} \;\; x = 0\,. \end{cases}$$

und den *Absolutbetrag* von x durch

$$|x| = \operatorname{sgn}(x)\, x = \begin{cases} x\,, & \text{falls} \quad x \ge 0\,, \\ -x\,, & \text{falls} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Bemerkungen: Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$.

1. $|a| = |-a| = \sqrt{a^2} = \max\{a, -a\} \ge a$.
2. $|a| < b \iff -b < a < b$.
3. $|a| < |b| \iff a^2 < b^2$.
4. Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt: $|b-a| < r \iff a-r < b < a+r$.
5. Es ist
$$\max(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} \quad \text{und} \quad \min(a,b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}\,.$$
6. $|ab| = |a|\,|b|$.
7. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass $(\forall x \in A)\ \ |x| \le M$.
8. Für $a \in \mathbb{R}$ gilt:
   (a) $a \le 0 \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ a < \varepsilon \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ a \le \varepsilon$.
   (b) $a = 0 \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ |a| < \varepsilon \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ |a| \le \varepsilon$.

Satz 1.14 (Dreiecksungleichung)**.** *Für* $a,\ b \in \mathbb{R}$ *ist* $\big||a| - |b|\big| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$.

Beweis. Aus $|a \pm b|^2 = (a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab \le |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2$ folgt $|a+b| \le |a|+|b|$, und aus $\big||a|-|b|\big|^2 = (|a|-|b|)^2 = |a|^2+|b|^2-2|a||b| \le a^2+b^2 \pm 2ab = (a \pm b)^2$ folgt $\big||a| - |b|\big| \le |a \pm b|$. □

1.6. Erweiterte Zahlengerade; Intervalle

Definition 1.10.

1. Wir fügen zu $\mathbb{R}$ zwei neue Elemente $\infty = +\infty$ und $-\infty$ hinzu und vereinbaren (für alle $a \in \mathbb{R}$) die folgenden Relationen und Rechenregeln:
$$-\infty < a < \infty\,, \quad a \pm \infty = \pm\infty + a = \pm\infty\,, \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0\,, \quad |\pm\infty| = \infty\,,$$
$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty\,, & \text{falls} \quad a > 0\,, \\ \mp\infty\,, & \text{falls} \quad a < 0\,. \end{cases}$$
$$\infty + \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty\,,$$
$$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - \infty = \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$$
$$0 \cdot (\pm\infty),\ \ (\pm\infty) \cdot 0,\ \ \infty - \infty,\ \ -\infty + \infty \ \text{ und } \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \ \text{ sind nicht definiert.}$$
Man nennt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ die *erweiterte Zahlengerade* oder *Zweipunktkompaktifizierung* von $\mathbb{R}$.

2. Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Ist A nicht nach oben beschränkt, so setzt man $\sup(A) = \infty$. Ist A nicht nach unten beschränkt, so setzt man $\inf(A) = -\infty$. Man definiert ferner $\sup(\emptyset) = -\infty$ und $\inf(\emptyset) = \infty$.

   Damit sind $\sup(A)$ und $\inf(A)$ für alle Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ definiert, und es gilt:
   $$\sup(A) \in \mathbb{R} \iff A \text{ ist nicht leer und nach oben beschränkt.}$$
   $$\inf(A) \in \mathbb{R} \iff A \text{ ist nicht leer und nach unten beschränkt.}$$

3. Eine Teilmenge $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt *Intervall*, wenn es $a,\, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ gibt, so dass die Menge I eine der folgenden 4 Formen hat:
   - $[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \le x \le b\}$ (*abgeschlossenes Intervall*)
   - $(a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\}$ (*offenes Intervall*)
   - $[a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \le x < b\}$ (*rechsseitig halboffenes Intervall*)
   - $(a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \le b\}$ (*linksseitig halboffenes Intervall*)

   Man nennt a und b die *Eckpunkte* von I.

Beispiele:
$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$, $\mathbb{R}_{\ge 0} = [0, \infty)$, $\mathbb{R}_{<0} = (-\infty, 0)$.
Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $[-a, a] = \big\{x \in \mathbb{R} \bigm| |x| \le a\big\}$ und $(-a, a) = \big\{x \in \mathbb{R} \bigm| |x| < a\big\}$.
Für $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ gilt:
A ist beschränkt $\iff$ $(\exists M \in \mathbb{R}_{>0})\ A \subset (-M, M)$ $\iff$ $(\exists M \in \mathbb{R}_{>0})\ A \subset [-M, M]$.

Satz 1.15. *Seien* $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$, $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$, $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ *und* $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$.

1. $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$, *falls* $\lambda > 0$, *und* $\sup(\lambda A) = \lambda \inf(A)$, *falls* $\lambda < 0$. *Insbesondere ist* $\sup(-A) = -\inf(A)$ *und* $\inf(-A) = -\sup(A)$.
2. $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ *und* $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Beweis. 1. FALL 1: $\lambda > 0$. Ist A nicht nach oben beschränkt, so ist $\sup(A) = \infty$, und auch λA ist nicht nach oben beschränkt (denn zu jedem $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $a \in A$ mit $a > \lambda^{-1} M$ und daher $\lambda a > M$). Also ist auch $\sup(\lambda A) = \infty = \lambda \sup(A)$.

Sei nun A nach oben beschränkt und $a = \sup(A)$. Für alle $x \in A$ ist dann $x \le a$, also auch $\lambda x \le \lambda a$, und daher ist λa eine obere Schranke von λA. Sei nun $c \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von λA. Für alle $x \in A$ ist dann $\lambda x \le c$, also $x \le \lambda^{-1} c$ und daher auch $a \le \lambda^{-1} c$, also $\lambda a \le c$. Damit folgt $\lambda a = \sup(\lambda A)$.

FALL 2: $\lambda < 0$. Ist A nicht nach oben beschränkt, so ist $\sup(A) = \infty$, und λA ist nicht nach unten beschränkt (denn zu jedem $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $a \in A$ mit $a > \lambda^{-1} M$ und daher $\lambda a < M$). Also ist $\inf(\lambda A) = -\infty = \lambda \sup(A)$.

Sei nun A nach oben beschränkt und $a = \sup(A)$. Für alle $x \in A$ ist dann $x \le a$, also $\lambda x \ge \lambda a$, und daher ist λa eine untere Schranke von λA. Sei nun $c \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von λA. Für alle $x \in A$ ist dann $\lambda x \ge c$, also $x \le \lambda^{-1} c$ und daher auch $a \le \lambda^{-1} c$, also $\lambda a \ge c$. Damit folgt $\lambda a = \inf(\lambda A)$.

2. Ist A nicht nach oben beschänkt, so ist auch $A + B$ nicht nach oben beschränkt (denn ist $M \in \mathbb{R}$ und $b \in B$, so gibt es ein $a \in A$ mit $a > -b + M$, also $a + b > M$). Also ist in diesem Falle $\sup(A + B) = \infty = \sup(A) + \sup(B)$. Ist B nicht nach oben beschränkt, so schließt man genauso.

Seien nun A und B nach oben beschränkt, $a = \sup(A)$ und $b = \sup(B)$. Ist nun $x \in A$ und $y \in B$, so folgt $x \le a$ und $y \le b$, also $x + y \le a + b$, und daher ist $a + b$ eine obere Schranke von $A + B$. Sei nun $c \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von $A + B$. Für jedes $x \in A$ ist dann $c - x$ eine obere Schranke von B und daher $c - x \ge b$, also $c - b \ge x$. Demnach ist aber $c - b$ eine obere Schranke von A, also $c - b \ge a$ und daher $c \ge a + b$. Damit folgt $a + b = \sup(A + B)$.
Mit 1. folgt $\inf(A+B) = -\sup\bigl[-(A+B)\bigr] = -\bigl[\sup(-A)+\sup(-B)\bigr] = \inf(A)+\inf(B)$. $\square$

Satz 1.16 (Struktursatz für Intervalle von $\mathbb{R}$)**.** *Sei* $I \subset \mathbb{R}$*, und seien* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$*. Dann sind äquivalent*:

(a) $|I| \ge 2$, $\inf(I) = a$, $\sup(I) = b$, *und* $(\forall x, y \in I)\ \bigl[\, x < y \ \Rightarrow\ [x, y] \subset I \,\bigr]$.

(b) $a < b$, *und es liegt einer der folgenden Fälle vor*:
- $I = (a, b)$.
- $a \in \mathbb{R}$ *und* $I = [a, b)$.
- $b \in \mathbb{R}$ *und* $I = (a, b]$.
- $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $I = [a, b]$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) Wegen $|I| \ge 2$ ist $a < b$, nach Definition ist $I \subset [a, b] \cap \mathbb{R}$. Ist $z \in (a, b)$, also $a < z < b$, so gibt es $x, y \in I$ mit $x < z < y$, und aus $[x, y] \subset I$ folgt $z \in I$. Daher ist $(a, b) \subset I$, und es liegt einer der folgenden vier Fälle vor:
FALL 1: $a \notin I$ und $b \notin I$. Dann ist $I = (a, b)$.
FALL 2: $a \in I$ und $b \notin I$. Dann ist $a \in \mathbb{R}$ und $I = [a, b)$.
FALL 3: $a \notin I$ und $b \in I$. Dann ist $b \in \mathbb{R}$ und $I = (a, b]$.
FALL 4: $a \in I$ und $b \in I$. Dann ist $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $I = [a, b]$.

(b) $\Rightarrow$ (a) In jedem Falle ist $(a, b) \subset I \subset [a, b] \cap \mathbb{R}$, und aus $a < b$ folgt $|I| \ge 2$. Sind $x, y \in I$ mit $x < y$, so folgt in jedem Falle auch $[x, y] \subset I$. Daher genügt es, $\inf(I) = a$ und $\sup(I) = b$ zu zeigen. Wir zeigen $\inf(I) = a$ [$\sup(I) = b$ zeigt man genauso].
Ist $a \in I$, so ist $a = \min(I)$ und daher auch $a = \inf(I)$. Im Falle $a = -\infty$ ist I nicht nach unten beschänkt und daher $\inf(I) = -\infty = a$. Ist $a \in \mathbb{R} \setminus I$, so ist a wegen $I \subset [a, b]$ eine untere Schranke von I. Ist $x > a$ und $x > y > a$, so ist $y \in I$, also x keine untere Schranke von I. Daher ist a die größte untere Schranke von I. $\square$

2. Normierte Räume, komplexe Zahlen und Polynomfunktionen

2.1. Lineare Räume und Algebren

Definition 2.1. Es sei $K = (K, 0, 1, +, \cdot)$ ein Körper und $X = (X, 0, , +)$ eine additive Gruppe [genauer: $K = (K, 0_K, 1_K, +_K, \cdot_K)$ und $X = (X, 0_X, +_X)$].

1. Eine *K-lineare Struktur* oder *K-Vektorraumstruktur* auf X ist eine Abbildung

$$K \times X \;\to\; X\,, \quad (\lambda, v) \;\mapsto\; \lambda \cdot v = \lambda v\,, \qquad \text{genannt } \textit{Skalarmultiplikation}\,,$$

so dass für alle $x, y \in X$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt:

L1. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y\,.$

L2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x\,.$

L3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x\,.$

L4. $1x = x\,.$

Einfache Folgerungen: Für alle $x \in X$ und $\lambda \in K$ gilt:

(a) $\lambda x = 0 \iff \lambda = 0 \;\vee\; x = 0\,.$

(b) $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -\lambda x$, insbesondere $-x = (-1)x$.

2. Ein *K-Vektorraum* oder *K-linearer Raum* ist eine additive Gruppe X, gemeinsam mit einer K-linearen Struktur $K \times X \to X$. In diesem Zusammenhang nennt man die Elemente von X *Vektoren* und die Elemente von K *Skalare.* Auch zwischen der Skalarmultiplikation und der Addition folgen wir der Konvention "Punkt- vor Strichrechnung" (L1. und L2. sind bereits so zu lesen).

3. Sei X ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subset X$ heißt (K*-linearer*) *Teilraum* oder *K-Untervektorraum* von X, wenn gilt:

T1. $0_X \in W\,.$

T2. $(\forall x, y \in W)\; x + y \in W.$

T3. $(\forall x \in W)\; (\forall \lambda \in K)\; \lambda x \in W.$

Offensichtlich sind $\{0_X\}$ und X selbst K-Untervektorräume von X, und jeder K-Untervektorraum von X is selbst ein K-Vektorraum.

Standardbeispiel:

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben die Elemente von K^n als Zeilenvektoren in der Form $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_1, \ldots, x_n \in K$ und definieren eine Addition auf K^n durch

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\,.$$

Setzt man $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in K^n$, so ist $(K^n, \mathbf{0}, +)$ eine additive Gruppe, und das Negative eines Vektors $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ist $-\boldsymbol{x} = (-x_1, \ldots, -x_n)$ [Nachrechnen!].

Für $\lambda \in K$ und $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ sei $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Dann ist

$$K \times K^n \;\to\; K^n\,, \quad (\lambda, \boldsymbol{x}) \mapsto \lambda\boldsymbol{x}$$

eine K-lineare Struktur auf K^n [Nachrechnen!]. Man sagt auch, Addition und Skalarmultiplikation auf K^n sind *komponentenweise* definiert.

K^n, versehen mit dieser Addition und dieser K-linearen Struktur, heißt *n-dimensionaler Standardraum*. Insbesondere ist $K^1 = K$, und wir setzen $K^0 = \{0\}$ (der triviale Vektorraum oder

Nullraum). Die Vektoren $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i^n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (mit 1 in der i-ten Komponente) heißen *n-dimensionale Einheitsvektoren.*

Geometrische Deutung:

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für $p \in X$ und $0 \neq a \in X$ heißt $p + \mathbb{R}a = \{p + \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die *Gerade* durch p mit Richtungsvektor a. Insbesondere ist die Gerade $\mathbb{R}a$ durch den Nullpunkt ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von X.

Für $x, y \in X$ heißt $[x, y] = \{x + t(y - x) \mid t \in [0, 1]\}$ die Verbindungsstrecke von x und y. Ist $x \neq y$, so gibt es genau eine Gerade $G \subset X$ mit $\{x, y\} \subset G$. Diese heißt *Verbindungsgerade* von x und y und ist gegeben durch $G = x + \mathbb{R}(y - x)$.

Die Vektoren $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ kann man als Punkte und als Äquivalenzklassen von Pfeilen deuten. Insbesondere bedient man sich der üblichen geometrischen Veranschaulichung von $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ als Zahlengerade, voon $\mathbb{R}^2$ als euklidische Ebene mit einem cartesischen Koordinatensystem und von $\mathbb{R}^3$ als Anschauungsraum.

Für $m, n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathsf{M}_{m,n}(K)$ die Menge der (m, n)-Matrizen über K. Dann ist $\mathsf{M}_{m,n}(K) = K^{mn}$ (wobei man die Komponenten der Vektoren in einem rechteckigen Schema mit m Zeilen und n Spalten anordnet).

Definition 2.2. Sei K ein Körper und X ein K-Vektorraum.

1. Eine *K-Algebrenstruktur* auf X ist eine Verknüpfung $*\colon X \times X \to X$, so dass für alle $x, x', y, , y' \in X$ und $\lambda \in K$ gilt:
   A1. $x * (y + y') = x * y + x * y'$.
   A2. $(x + x') * y = x * y + x' * y$.
   A3. $\lambda(x * y) = (\lambda x) * y = x * (\lambda y)$.
2. Eine *K-Algebra* $X = (X, *)$ ist ein K-Vektorraum X, gemeinsam mit einer K-Algebrenstruktur $*$ auf X. Ist $*$ assoziativ [kommutativ], so nennt man X eine *assoziative* [*kommutative*] *K-Algebra.*

   Man nennt $*$ die Algebrenmultiplikation von X. Man schreibt (soferne Verwechslungen nicht zu befürchten sind) wieder $x \cdot y = xy$ an Stelle von $x * y$ und folgt der Konvention "Punkt- vor Strichrechnung".
3. Sei $X = (X, *)$ eine K-Algebra. Eine Teilmenge $W \subset X$ heißt *K-Teilalgebra* oder *K-Unteralgebra*, wenn W ein K-Untervektorraum von X ist, und $(\forall x, y \in W)\ x * y \in W$.

   Jede K-Teilalgebra von X ist selbst eine K-Algebra.

Beispiele:

1. Teilkörper: Ist K ein Körper und $Q \subset K$ ein Teilkörper, so ist K eine (assoziative und kommutative) Q-Algebra, und Q ist eine Q-Teilalgebra von K. Insbesondere ist K eine K-Algebra.

2. Matrixalgebren: Sei K ein Körper und $\mathsf{M}_n(K)$ die Menge der $n{\times}n$-Matrizen über K. Dann ist $\mathsf{M}_n(K)$ eine (im Falle $n \geq 2$ nicht kommutative) assoziative K-Algebra, und $\mathsf{M}_1(K) = K$.

3. Vektorielles Produkt: Das vektorielle Produkt $\times\colon \mathbb{R}^3{\times}\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebrenstruktur auf $\mathbb{R}^3$, die weder assoziativ noch kommutativ ist.

Definition 2.3 (Wertweise Verknüpfung von Funktionen)**.** Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge, K ein Körper, X ein K-Vektorraum und $\mathrm{Abb}(M, X)$ die Menge aller Abbildungen $f\colon M \to X$.

1. Für $f, g \in \mathrm{Abb}(M,X)$ und $h \in \mathrm{Abb}(M,K)$ seien die Abbildungen $f+g \in \mathrm{Abb}(M,X)$ und $hf \in \mathrm{Abb}(M,X)$ definiert durch
$$\big(\forall x \in M\big) \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x)\,, \quad (hf)(x) = h(x)f(x)$$
Für $\lambda \in K$ sei $\mathsf{c}_\lambda \colon M \to K$ die konstante Abbildung mit Wert λ, und $\lambda f = \mathsf{c}_\lambda f$, also $(\forall x \in M)\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ (wertweise Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen).
Mit der wertweisen Addition und Skalarmultiplikation ist $\mathrm{Abb}(M,X)$ ein K-Vektorraum. Die konstante Abbildung c_0 mit Wert $0 \in X$ ist die Null von $\mathrm{Abb}(M,X)$, und für $f \in \mathrm{Abb}(M,X)$ ist $-f \in \mathrm{Abb}(M,X)$ gegeben durch $(\forall x \in M)\ (-f)(x) = -f(x)$. [Nachrechnen!]
Meist schreibt man für die konstante Abbildung mit Wert λ einfach $f = \lambda$ an Stelle von $f = \mathsf{c}_\lambda$. Insbesondere nennt man $f = 0$ die *Nullabbildung*.
2. Sei nun X eine K-Algebra. Für $f, g \in \mathrm{Abb}(M,X)$ sei $fg = f\cdot g \in \mathrm{Abb}(M,X)$ definiert durch
$$\big(\forall x \in M\big) \quad (fg)(x) = f(x)g(x)\,.$$
(wertweise Multiplikation von Funktionen).
Mit der wertweisen Multiplikation von Funktionen wird der K-Vektorraum $\mathrm{Abb}(M,X)$ zur K-Algebra. Ist die K-Algebra X assoziativ [kommutativ], so ist die K-Algebra $\mathrm{Abb}(M,X)$ ebenfalls assoziativ [kommutativ]. Insbesondere ist $\mathrm{Abb}(M,K)$ eine assoziative und kommutative K-Algebra [Nachrechnen!].
3. Seien $f, g \in \mathrm{Abb}(M,K)$ und $N(g) = \{x \in M \mid g(x) = 0\} \neq M$. Dann sei
$$\frac{f}{g} \colon M \setminus N(g) \to K \quad \text{definiert durch} \quad \big(\forall x \in M \setminus N(g)\big) \ \ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$
(wertweiser Quotient von Funktionen).
4. Seien $f, g \in \mathrm{Abb}(M,\mathbb{R})$. Dann definieren wir $f \le g$, wenn $(\forall x \in M)\ \ f(x) \le g(x)$.

Bemerkung:
Sei X ein K-Vektorraum, $M \neq \emptyset$ eine Menge und C die Menge aller konstanten Abbildungen $c \colon M \to X$. Dann ist $C \subset \mathrm{Abb}(M,X)$ ein Teilraum. Ist X eine K-Algebra, so ist C eine K-Unteralgebra.

Definition 2.4. Sei K ein Körper.

1. Seien X und Y K-Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi \colon X \to Y$ heißt *K-linear* oder ein *(K-Vektorraum)-Homomorphismus*, wenn für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in K$ gilt:
$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{und} \quad \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)\,.$$
$\mathrm{Hom}_K(X,Y)$ bezeichne die Menge der K-linearen Abbildungen $\varphi \colon X \to Y$.
Eine K-lineare Abbildung $\varphi \colon X \to Y$ heißt *Monomorphismus* [*Epimorphismus, Isomorphismus*], wenn sie injektiv [surjektiv, bijektiv] ist.
X und Y heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $\varphi \colon X \to Y$ gibt.
2. Sind X und Y K-Algebren, so nennt man φ einen *K-Algebren-Homomorphismus*, wenn $\varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$ für alle $x, y \in X$. Ein *K-Algebren-Isomorphismus* ist ein bijektiver K-Algebren-Homomorphismus.

3. Ein K-Vektorraum X heißt *endlich-dimensional*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ einen K-Vektorraum-Isomorphismus $\varphi\colon K^n \to X$ gibt (wir setzen $K^0 = \{0\}$). Dann gibt es genau ein solches n (Beweis Lineare Algebra!), man nennt dann n die *Dimension* von X (über K) und schreibt $\dim_K(X) = n$. Gibt es kein solches n, so nennt man X *unendlich-dimensional* und schreibt $\dim_K(X) = \infty$.
4. Sei X ein K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in X^n$. Man nennt $\boldsymbol{u}$ eine *(geordnete) K-Basis* von X, wenn es einen K-Vektorraum-Isomorphismus $\varphi\colon X \to K^n$ gibt, so dass $\varphi(u_i) = \boldsymbol{e}_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Bemerkungen: K sei ein Körper.

1. Sei X ein K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in X^n$. Dann sind äquivaltent:
   (a) $\boldsymbol{u}$ ist eine K-Basis von X.
   (b) Jedes $x \in X$ hat eine eindeutige Darstellung in der Form
   $$x = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \quad \text{mit} \quad (c_1, \ldots, c_n) \in K^n\,,$$
   (c) Die Abbildung $\varphi_{\boldsymbol{u}}\colon K^n \to X$, definiert durch
   $$\varphi_{\boldsymbol{u}}(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i\,, \quad \text{ist ein } K\text{-Vektorraum-Isomorphismus}$$
   (es ist dann $\varphi_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{e}_i) = u_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$).
2. Sei X ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Genau dann ist $\dim_K(X) = n$, wenn X eine K-Basis $\boldsymbol{u} \in X^n$ (der Länge n) besitzt.

   Zwei endlich-dimensionale Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben (Beweis Lineare Algebra).
3. Sei M eine Menge, X ein K-Vektorraum und $z \in M$. Dann ist die Auswertungsabbildung $\varepsilon_z\colon \mathrm{Abb}(M, X) \to X$, definiert durch $\varepsilon_z(f) = f(z)$, ein K-Vektorraum-Homomorphismus. Ist $C = \{\mathsf{c}_x \mid x \in X\} \subset \mathrm{Abb}(M, X)$ die Menge der konstanten Abbildungen, so ist die Abbildung $\mathsf{c}\colon X \to C$, definiert durch $x \mapsto \mathsf{c}_x$, ein K-Vektorraum-Isomorphismus.

   Ist X eine K-Algebra, so ist ε_z ein K-Algebren-Homomorphismus und c ein K-Algebren-Isomorphismus.
4. Sind X und Y K-Vektorräume, so ist $\mathrm{Hom}_K(X, Y)$ ein K-Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(X, Y)$, und im Falle $X = Y$ ist die Hintereinanderausführung $\circ$ eine K-Algebrenstruktur auf $\mathrm{Hom}_K(X, X)$.

2.2. Komplexe Zahlen

Satz und Definition 2.1.

1. *Es gibt einen Oberkörper $\mathbb{C}$ von $\mathbb{R}$ und ein Element $\mathsf{i} \in \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:*
   - *Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung $z = a + b\mathsf{i}$ mit a, $b \in \mathbb{R}$.*
   - $\mathsf{i}^2 = -1$.

Für $z = a + b\mathsf{i} \in \mathbb{C}^\times$ ist dann

$$\frac{1}{z} = \frac{a - b\mathsf{i}}{a^2 + b^2}\,.$$

2. *Seien $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}'$ Oberkörper von $\mathbb{R}$, und seien $\mathsf{i} \in \mathbb{C}$ und $\mathsf{i}' \in \mathbb{C}'$ Elemente mit den Eigenschaften in 1. Dann gibt es genau einen Isomorphismus $\Phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ mit $\Phi \,|\, \mathbb{R} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $\Phi(\mathsf{i}) = \mathsf{i}'$.*

Den durch die Eigenschaften in 1. (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Körper $\mathbb{C}$ nennt man den *Körper der komplexen Zahlen*. Das (ausgezeichnete) Element $\mathsf{i} \in \mathbb{C}$ nennt man die *imaginäre Einheit.*

$\mathbb{C}$ ist ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $(1, \mathsf{i})$ ist eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$, und die Abbildung $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, definiert durch $\Psi(a, b) = a + b\mathsf{i}$, ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus.

Veranschaulicht man den $\mathbb{R}^2$ als euklidische Ebene zur Darstellung geometrischen Darstellung von $\mathbb{C}$ mit Hilfe des Isomorphismus Ψ, so nennt man diese Ebene die *Gauß'sche Zahlenebene* oder *Argand'sche Ebene*. Man nennt $\Psi^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_1$ die *reelle Achse* und $\Psi^{-1}(\mathbb{R}\mathsf{i}) = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_2$ die *imaginäre Achse* der Gauß'schen Ebene.

Beweis. 1. Wir definieren eine Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2,\, a_1 b_2 + a_2 b_1)\,.$$

Damit ist dann $C = \big(\mathbb{R}^2, (0,0), (1,0), +, \cdot\big)$ ein Körper, für $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ ist

$$(a, b)\Big(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\Big) = (1, 0)\,,$$

es ist $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, und die Abbildung $j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $j(x) = (x, 0)$, ist eine Einbettung [Nachrechnen! Lang, aber einfach]. Nach Satz 1.5 gibt es einen Oberkörper $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ und einen Isomorphismus $j^*\colon \mathbb{C} \to C$ mit $j^* \,|\, \mathbb{R} = j$. Mit $\mathsf{i} = j^{*-1}(0, 1) \in \mathbb{C}$ folgt die Behauptung.

2. Sei $\Phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ definiert durch $\Phi(a + b\mathsf{i}) = a + b\mathsf{i}'$. Dann ist Φ bijektiv. Seien $w = a + b\mathsf{i}$ und $z = c + d\mathsf{i} \in \mathbb{C}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann ist $w + z = (a + c) + (b + d)\mathsf{i}$ und $wz = ac - bd + (ad + bc)\mathsf{i}$, also $\Phi(w + z) = (a + c) + (b + d)\mathsf{i}' = \Phi(w) + \Phi(z)$ und $\Phi(wz) = ac - bd + (ad + bc)\mathsf{i}'$, also $\Phi(wz) = \Phi(w)\Phi(z)$.

Ist $\Phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ ein Isomorphismus mit $\Phi \,|\, \mathbb{R} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $\Phi(\mathsf{i}) = \mathsf{i}'$, so ist $\Phi(a + b\mathsf{i}) = a + b\mathsf{i}'$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Damit folgt die Eindeutigkeit von Φ. □

Definition 2.5. Für eine komplexe Zahl $z = x + y\mathsf{i}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) nennt man

- $x = \Re(z)$ den *Realteil* von z,
- $y = \Im(z)$ den *Imaginärteil* von z,
- $\overline{z} = x - y\mathsf{i}$ die zu z *konjugiert-komplexe Zahl*, und
- $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ den *Absolutbetrag* von z.

Man nennt $S^1 = \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z| = 1\big\}$ den *komplexen Einheitskreis*.

Sei $f\colon M \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann definiert man Abbildungen $\overline{f}\colon M \to \mathbb{C}$, $\Re(f)\colon M \to \mathbb{R}$, $\Im(f)\colon M \to \mathbb{R}$ und $|f|\colon M \to \mathbb{R}$ wertweise durch

$$\overline{f}(z) = \overline{f(z)}\,, \quad \Re(f)(z) = \Re\big(f(z)\big)\,, \quad \Im(f)(z) = \Im\big(f(z)\big)\,, \quad |f|(z) = |f(z)|\,.$$

Satz 2.2 (Rechenregeln für komplexe Zahlen)**.** *Seien* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

1. $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, *und* $\big[\, z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} \,\big]$. *Insbesondere ist* $^{-}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ein Isomorphismus.*
2. $z + \overline{z} = 2\,\Re(z)$, $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\Im(z)$, $|\Re(z)| \le |z|$ *und* $|\Im(z)| \le |z|$.
3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ *und* $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$.
4. *Ist* $z = x + iy$ *mit* $x, y \in \mathbb{R}$ *und*
$$w = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} + i\varepsilon\sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} \quad \textit{mit} \quad \varepsilon = \begin{cases} 1\,, & \textit{falls} \quad y \ge 0\,, \\ -1\,, & \textit{falls} \quad y < 0\,, \end{cases}$$
so folgt $w^2 = z$.

Beweis. 1. Nachrechnen (einfach).

2. Sei $z = x + y\mathrm{i}$ mit x, $y \in \mathbb{R}$, also $x = \Re(z)$ und $y = \Im(z)$. Dann ist $z + \overline{z} = 2x$, $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}y$, $|\Re(z)|^2 = x^2 \le x^2 + y^2 = |z|^2$, also $|\Re(z)| \le |z|$, und ebenso $|\Im(z)| \le |z|$.

3. Aus $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2\, \overline{z_1 z_2} = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = (|z_1||z_2|)^2$ folgt $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Ferner ist
$$|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\overline{z_1} \pm \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \pm (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\,\Re(z_1\overline{z_2})\,,$$
und wegen $-2|z_1||z_2| = -2|z_1\overline{z_2}| \le \pm 2\,\Re(z_1\overline{z_2}) \le 2|z_1\overline{z_2}| = 2|z_1||z_2|$ folgt
$$(|z_1| - |z_2|)^2 \le |z_1 \pm z_2|^2 \le (|z_1| + |z_2|)^2\,,$$
also auch $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

4. Nachrechnen! □

Bemerkung: $\mathbb{C}$-Vektorräume.

Sei X eine additive abelsche Gruppe und $\sigma\colon \mathbb{C} \times X \to X$ eine $\mathbb{C}$-lineare Struktur auf X. Dann ist $\sigma \,|\, \mathbb{R} \times X\colon \mathbb{R} \times X \to X$ eine $\mathbb{R}$-lineare Struktur auf X. Insbesondere ist also jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Ist X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $(u_1, \ldots, u_n)$ eine $\mathbb{C}$-Basis von X, so ist $(u_1, \mathrm{i}u_1, \ldots, u_n, \mathrm{i}u_n)$ eine $\mathbb{R}$-Basis von X, also insbesondere $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 2\dim_{\mathbb{R}}(X)$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $\psi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, definiert durch
$$\psi(z_1, \ldots, z_n) = (\Re(z_1), \Im(z_1), \ldots, \Re(z_n), \Im(z_n))\,,$$
ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus.

2.3. Polynomfunktionen und rationale Funktionen

In diesem Abschnitt sei stets $K = (K,\, 0,\, 1,\, +,\, \cdot)$ *ein unendlicher Körper.*

Definition 2.6. Eine Abbildung $f\colon K \to K$ heißt *Polynomfunktion*, wenn
$$(\exists n \in \mathbb{N}_0)\ (\exists a_0, a_1, \ldots, a_n \in K)\ (\forall x \in K)\ \ f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,.$$

Kurzsprechweise:
$$\text{“die Polynomfunktion } f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu\,\text{”}$$

Wir können annehmen, dass entweder $[\,n=0$ und $a_0=0\,]$ oder $a_n\neq 0$ ist. Im ersten Falle ist $f=0$ die konstante Funktion mit Wert $0\in K$ (genannt *Nullpolynom*).

Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(K)$ die Menge aller Polynomfunktionen $f\colon K\to K$.

Ist $f\in\mathcal{P}(K)$ und $z\in K$ mit $f(z)=0$, so nennt man z eine *Nullstelle* von f. f heißt *nullstellenfrei* (in K), wenn f in K keine Nullstelle besitzt.

Sind $f,\,g\in\mathcal{P}(K)$ und $\lambda\in K$, so folgt $f+g\in\mathcal{P}(K)$, $\lambda f\in\mathcal{P}(K)$ und $fg\in\mathcal{P}(K)$. Daher ist $\mathcal{P}(K)\subset\mathrm{Abb}(K,K)$ eine K-Unteralgebra (welche ihrerseits die K-Algebra aller konstanten Abbildungen als Unteralgebra enthält).

Beispiel (zur Rechtfertigung der Voraussetzung $|K|=\infty$):
Sei $K=\mathbb{F}_2=\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$. Dann ist $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall x\in\mathbb{F}_2)\ x^n=x$. Daher ist für alle $n\in\mathbb{N}$ die Polynomfunktion $f(x)=x^n$ die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}$.

Satz und Definition 2.3 (Nullstellen- und Identitätssatz)**.**

A. *Sei* $f\in\mathcal{P}(K)$, $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ *mit* $n\in\mathbb{N}_0$, $a_0,\,a_1,\ldots,a_n\in K$ *und* $a_n\neq 0$.

1. *Sei* $z\in K$ *mit* $f(z)=0$. *Dann ist* $n\geq 1$, *und es existieren* $b_0,\ldots,b_{n-2}\in K$ *so dass*
$$(\forall x\in K)\quad f(x)=(x-z)(a_nx^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0)\,.$$
2. *Es existieren eindeutig bestimmte* $m\in\{0,1,\ldots,n\}$, (*nicht notwendig verschiedene*) $z_1,\ldots,z_m\in K$ *und eine nullstellenfreie Polynomfunktion* $g\in\mathcal{P}(K)$, *so dass*
$$(\forall x\in K)\ \ f(x)=(x-z_1)\cdot\ldots\cdot(x-z_m)g(x)\,.$$
Insbesondere ist $|\{z\in K\mid f(z)=0\}|\leq n$.
3. *Sei* $g\in\mathcal{P}(K)$ *eine weitere Polynomfunktion,* $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$ *mit* $m\in\mathbb{N}_0$, $b_0,\,b_1,\ldots,b_m\in K$ *und entweder* $m=0$, $b_0=0$ *oder* $b_m\neq 0$. *Ist dann*
$$|\{z\in K\mid f(z)=g(z)\}|>\max\{m,n\}\,,$$
so folgt $m=n$, *und* $(\forall\nu\in\{0,\ldots,n\})\ \ a_\nu=b_\nu$. *Insbesondere ist* $f=g$.

B. *Sei* $f\in\mathcal{P}(K)$. *Dann gibt es eindeutig bestimmte* $n\in\mathbb{N}_0$ *und* $a_0,a_1,\ldots,a_n\in K$, *so dass entweder* $[\,n=0,\ a_0=0\,]$ *oder* $a_n\neq 0$, *und* $(\forall x\in K)\ \ f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$.
Man definiert
$$\mathrm{grad}(f)=\begin{cases}-\infty\,, & \textit{falls}\ \ n=0\,,\ a_0=0\,,\\ n\,, & \textit{falls}\ \ a_n\neq 0\,,\end{cases}$$
und man nennt $\mathrm{grad}(f)\in\mathbb{N}_0\cup\{-\infty\}$ den *Grad* der Polynomfunktion f. Im Falle $f\neq 0$ heißen $a_0,\ldots,a_n$ die *Koeffizienten* von f, a_n heißt *führender Koeffizient* oder *Leitkoeffizient* von f, und f heißt *normiert*, falls $a_n=1$.

Die Polynomfunktion f heißt *konstant* wenn $\mathrm{grad}(f)\leq 0$ (dann ist f konstant mit Wert $a_0\in K$); f heißt *affin-linear* wenn $\mathrm{grad}(f)\leq 1$ (dann ist $f(x)=a_1x+a_0$, und man nennt f *linear* wenn $a_0=0$; ist insbesondere $a_0=0$ und $a_1=1$, so ist $f=\mathrm{id}_K$).

C. *Seien* $f,\,g\in\mathcal{P}(K)$. *Dann ist*
$$\mathrm{grad}(fg)=\mathrm{grad}(f)+\mathrm{grad}(g)\,,\quad \mathrm{grad}(f+g)\leq\max\{\mathrm{grad}(f),\,\mathrm{grad}(g)\}$$
und $\mathrm{grad}(f+g)=\max\{\mathrm{grad}(f),\,\mathrm{grad}(g)\}$, *falls* $\mathrm{grad}(f)\neq\mathrm{grad}(g)$.

Beweis. **A.** 1. Für $x \in K$ ist

$$f(x) \;=\; f(x) - f(z) \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (x^\nu - z^\nu) \;=\; (x-z) \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum_{j=0}^{\nu-1} x^j z^{\nu-1-j}$$

$$= \; (x-z) \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\sum_{\nu=j+1}^{n} a_\nu z^{\nu-1-j} \Big) x^j \;=\; (x-z)(a_n x^{n-1} + \ldots)$$

2. und 3. Wir zeigen zuerst die Existenz in 2., dann 3. und erst danach die Eindeutigkeit in 2.

Existenzbeweis 2. Induktion nach n. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen.

• $n \ge 1$, $n-1 \to n$: Ist f nullstellenfrei, so setze man $m = 0$ und $g = f$. Sei also $z_1 \in K$ mit $f(z_1) = 0$. Nach 1. gibt es eine Polynomfunktion $f_1 \in \mathcal{P}(K)$, so dass $f_1(x) = a_n x^{n-1} + \ldots$ und $f(x) = (x - z_1) f_1(x)$. Nach Induktionsvoraussetzung (angewandt auf f_1) gibt es ein $m \in \{1, \ldots n\}$, $z_2, \ldots, z_m \in K$ und eine nullstellenfreie Poynomfunktion $g \in \mathcal{P}(K)$, so dass für alle $x \in K$

$$f_1(x) = (x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_m) g(x)\,, \quad \text{also} \quad f(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_m) g(x)\,.$$

Ist nun $z \in K$ und $f(z) = 0$, so folgt $z \in \{z_1, \ldots, z_m\}$, also $|\{z \in K \mid f(z) = 0\}| \le n$ (da $g(z) \ne 0$).

3. Durch Widerspruch. Wir nehmen an, es sei entweder $m \ne n$, oder es sei $m = n$ und $a_\nu \ne b_\nu$ für ein $\nu \in \{1, \ldots, n\}$. Dann hat die Polynomfunktion $f - g \in \mathcal{P}(K)$ eine Darstellung $(f-g)(x) = c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \ldots, + c_0$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, $k \le \max\{m, n\}$, $c_0, \ldots, c_k \in K$ und $c_k \ne 0$. Nach Voraussetzung und mittels 2. erhalten wir dann

$$\max\{m,n\} < |\{z \in K \mid f(z) = g(z)\}| = |\{z \in K \mid (f-g)(z) = 0\}| \le k \le \max\{m,n\}\,,$$

ein Widerspruch.

Eindeutigkeitsbeweis in 2.: Sei $f(x) = (x - z_1) \cdot \ldots \cdot (x - z_m) g(x)$ mit $m \in \mathbb{N}_0$, $z_1, \ldots, z_m \in K$ und nullstellenfreiem $g \in \mathcal{P}(K)$. Wir zeigen die Eindeutigkeit dieser Darstellung durch Induktion nach m. Ist $m = 0$, so ist f nullstellenfrei und nichts zu zeigen.

• $m \ge 1$, $m - 1 \to m$: Sei $f(x) = (x - z_1') \cdot \ldots \cdot (x - z_l') g'(x)$ eine weitere Darstellung mit $l \in \mathbb{N}$, $z_1', \ldots, z_l' \in K$ und nullstellenfreiem $g' \in \mathcal{P}(K)$. Wegen $f(z_1) = 0$ ist $z_1 \in \{z_1', \ldots, z_l'\}$, und wir können (nach geeigneter Umnummerierung) annehmen, dass $z_1 = z_1'$. Die Polynomfunktionen g_1, $g_1' \in \mathcal{P}(K)$ seien definiert durch

$$g_1(x) = (x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_m) g(x) \quad \text{und} \quad g_1'(x) = (x - z_2') \cdot \ldots \cdot (x - z_l') g'(x)\,.$$

Dann ist $(\forall x \in K)\ (x - z_1) g_1(x) = (x - z_1') g_1'(x)$ und daher $(\forall x \in K \setminus \{z_1\})\ g_1(x) = g_1'(x)$. Nach 3. folgt daraus $g_1 = g_1'$ und nach Induktionsvoraussetzung die Eindeutigkeit von $z_2, \ldots, z_m$ und g.

B. Nach **A.** 3. mit $f = g$.

C. Ist $f = 0$ oder $g = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\operatorname{grad}(f) = n \ge m = \operatorname{grad}(g)$, $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{m+1} x^{m+1} + a_m x^m + \ldots$ und $g(x) = b_m x^m + \ldots$ mit $a_n \ne 0$ und $b_m \ne 0$. Dann ist $(f+g)(x) = a_n x^n + \ldots + a_{m+1} x^{m+1} + (a_m + b_m) x^m + \ldots$ und $(fg)(x) = a_n b_m x^{n+m} + \ldots$. Aus diesen Darstellungen kann man die Behauptungen ablesen. $\square$

Satz und Definition 2.4. *Für einen* (*unendlichen*) *Körper K sind äquivalent*:

(a) *Jede nicht konstante Polynomfunktion* $f \in \mathcal{P}(K)$ *hat eine Nullstelle in* K.

(b) *Jede nicht konstante Polynomfunktion* $f \in \mathcal{P}(K)$ *zerfällt in* K *in Linearfaktoren* [*d. h., es existieren* $m \in \mathbb{N}_0$, $c \in K^\times$ *und* $z_1, \dots, z_m \in K$, *so dass*

$$(\forall x \in K) \quad f(x) = c(x - z_1) \cdot \ldots \cdot (x - z_m) \,] \,.$$

Sind obige Bedingungen erfüllt, so heißt K *algebraisch abgeschlossen.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) Hat jede nicht konstante Polynomfunktion eine Nullstelle, so ist jede nullstellenfreie Polynomfunktion konstant, und nach Satz 2.3 folgt (b).

(b) $\Rightarrow$ (a) Ist $f \in \mathcal{P}(K)$ wie in (b), so folgt $f(z_1) = 0$. □

Wir werden zeigen:
Fundamentalsatz der Algebra (siehe Satz 6.13). $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Satz 2.5 (Interpolationssatz)**.** *Sei* $n \in \mathbb{N}_0$, *seien* $z_0, z_1, \dots, z_n \in K$ *verschieden, und seien* $c_0, , c_1, \dots, c_n \in K$. *Dann gibt es genau eine Polynomfunktion* $f \in \mathcal{P}(K)$ *mit* $\operatorname{grad}(f) \le n$, *so dass* $(\forall \nu \in \{0, \dots, n\})$ $f(z_\nu) = c_\nu$. *Es ist*

$$(\forall x \in K) \quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu L_\nu(x) \quad \textit{mit} \quad L_\nu(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne \nu}}^{n} \frac{x - z_j}{z_\nu - z_j} \,.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 2.3. Die angegebene Funktion hat die gewünschte Interpolationseigenschaft, da

$$\big(\forall \nu,\, j \in \{1, \dots, n\}\big) \quad L_\nu(z_j) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls} \quad \nu = j\,, \\ 0\,, & \text{falls} \quad \nu \ne j\,. \end{cases} \quad \square$$

Satz und Definition 2.6 (Divisionssatz)**.** *Seien* $f, g \in \mathcal{P}(K)$, $g \ne 0$. *Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynomfunktionen* $q, r \in \mathcal{P}(K)$ *mit* $f = gq + r$ *und* $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g)$.
Man nennt q den *Quotienten* und r den *Rest* bei der Division mit Rest von f durch g.

Beweis. Existenz: Induktion nach $\operatorname{grad}(f)$. Ist $\operatorname{grad}(f) < \operatorname{grad}(g)$, so setze man $q = 0$ und $r = f$. Sei also $\operatorname{grad}(f) = n \ge m = \operatorname{grad}(g)$ und gelte die Behauptung für alle Polynomfunktionen f_1 mit $\operatorname{grad}(f_1) < \operatorname{grad}(f)$. Sei $f(x) = a_n x^n + \ldots$, $g(x) = b_m x^m + \ldots$ mit $a_n, b_m \in K^\times$, und sei $f_1(x) = f(x) - b_m^{-1} a_n x^{n-m} g(x)$. Dann ist $f_1 \in \mathcal{P}(K)$ und $\operatorname{grad}(f_1) < n$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Polynumfunktionen $q_1, r \in \mathcal{P}(K)$ mit $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g)$ und $f_1 = gq_1 + r$. Definiert man $q \in \mathcal{P}(K)$ durch $q(x) = q_1(x) + b_m^{-1} a_n x^{n-m}$, so folgt $f = gq + r$.
Eindeutigkeit: Seien $q, q_1, r, r_1 \in \mathcal{P}(K)$ mit $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g)$, $\operatorname{grad}(r_1) < \operatorname{grad}(g)$ und $f = gq + r = gq_1 + r_1$. Dann ist $r - r_1 = g(q_1 - q)$ und daher

$$\operatorname{grad}(g) + \operatorname{grad}(q_1 - q) = \operatorname{grad}(r - r_1) \le \max\{\operatorname{grad}(r), \operatorname{grad}(r_1)\} < \text{grad (g)}\,,$$

was nur für $q_1 - q = 0$ möglich ist. Damit folgt $q_1 = q$ und $r_1 = r$. □

Definition 2.7. Sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Eine Abbildung $g \colon K^n \to K$ heißt *Monom* oder *Potenzprodukt*, wenn

$$(\exists\, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0) \; \big(\forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n\big) \quad g(\boldsymbol{x}) = x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} \,.$$

2. Eine Abbildung $f\colon K^n \to K$ heißt *Polynomfunktion*, wenn $f = c_1g_1 + \ldots + c_kg_k$ mit $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k \in K$ und verschiedenen Potenzprodukten $g_1, \ldots, g_k\colon K^n \to K$.
   $\mathcal{P}_n(K)$ bezeichne die Menge aller Polynomfunktionen $f\colon K^n \to K$.

Jede Polynomfunktion $f \in \mathcal{P}_n(K)$ hat eine Darstellung

$$\big(\forall (x_1, \ldots, x_n) \in K^n\big) \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu_1=0}^{N} \ldots \sum_{\nu_n=0}^{N} c_{\nu_1,\ldots,\nu_n} x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\nu_n}$$

mit $N \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $c_{\nu_1,\ldots,\nu_n} \in K$ (für alle n-tupel $(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \{0, 1, \ldots, N\}^n$). Es ist $\mathcal{P}_1(K) = \mathcal{P}(K)$, und $\mathcal{P}_n(K) \subset \mathrm{Abb}(K^n, K)$ ist eine K-Unteralgebra.

Beispiele:

1. Konstante Funktionen: Für $z \in K$ ist die konstante Funktion $\mathsf{c}_z\colon K^n \to K$ mit Wert z eine Polynomfunktion. Man sagt dann kurz *die Polynomfunktion* $f = z$ und nennt (wie im Falle $n = 1$) $f = 0$ das *Nullpolynom*.
2. Linearformen: $f\colon K^n \to K$ heißt *Linearform*, wenn
   $$(\exists\, c_1, \ldots, c_n \in K)\ \big(\forall \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n\big) \quad f(\boldsymbol{x}) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n\,.$$
   Von besonderer Bedeutung sind die *Koordinatenfunktionen* $X_1, \ldots, X_n\colon K^n \to K$, definiert durch $X_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.
3. Determinanten: Sei $n \in \mathbb{N}$. Identifiziert man den Matrizenraum $\mathsf{M}_n(K)$ mit K^{n^2}, so ist $\det\colon K^{n^2} \to K$ eine Polynomfunktion.
   Beweis. Auf Grund der Formel
   $$\det\big((x_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}\big) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\pi) x_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n,\pi(n)} \quad \text{ist } \det \text{ eine Summe von Monomen.}$$

Satz 2.7. *Sei* $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{P}_n(K)$, *und sei*

$$\big(\forall (x_1, \ldots, x_n) \in K^n\big) \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu_1=0}^{N} \ldots \sum_{\nu_n=0}^{N} c_{\nu_1,\ldots,\nu_n} x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\nu_n}$$

mit $N \in \mathbb{N}_0$ *und Koeffizienten* $c_{\nu_1,\ldots,\nu_n} \in K$. *Seien* $I_1, \ldots, I_n \subset K$ *unendliche Teilmengen, so dass* $\big(\forall (x_1, \ldots, x_n) \in I_1 \times \ldots \times I_n\big)$ $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. *Dann ist*

$$\big(\forall\, (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \{0, \ldots, N\}^n\big) \quad c_{\nu_1,\ldots,\nu_n} = 0\,, \quad \textit{also insbesondere } f = 0 \ (\textit{das Nullpolynom}).$$

Beweis. Induktion nach n.

- $n = 1$: Satz 2.3.
- $n \geq 2$, $n - 1 \to n$: Für $x_n \in I_n$ sei $f_{x_n} \in \mathcal{P}_{n-1}(K)$ definiert durch

$$f_{x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{\nu_1=0}^{N} \ldots \sum_{\nu_{n-1}=0}^{N} \Big(\sum_{\nu_n=0}^{N} c_{\nu_1,\ldots,\nu_n} x_n^{\nu_n}\Big) x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{\nu_{n-1}}\,.$$

Dann ist $\big(\forall (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in I_1 \times \ldots \times I_{n-1}\big)$ $f_{x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$, also nach Induktionsvoraussetzung

$$\big(\forall\, (\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}) \in \{0, \ldots, N\}^{n-1}\big)\ (\forall x_n \in I_n) \quad \sum_{\nu_n=0}^{N} c_{\nu_1,\ldots,\nu_n} x_n^{\nu_n} = 0\,.$$

Damit folgt (wieder mit Satz 2.3) die Behauptung. $\square$

Definition 2.8. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\emptyset \neq D \subset K^n$ und $h\colon D \to K$.

1. h heißt *rationale Funktion*, wenn
$$\bigl(\exists\, f,\, g \in \mathcal{P}_n(K)\bigr) \quad D = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid g(\boldsymbol{x}) \neq 0\} \ \wedge\ h = \frac{f}{g}\,.$$
(Im Falle $n = 1$ ist die Menge $K \setminus D$ nach Satz 2.3 endlich).
2. Sei h eine rationale Funktion. D heißt *maximaler Definitionsbereich* von h, wenn es keine rationale Funktion $h_1\colon D_1 \to K$ mit $D \subsetneq D_1 \subset K^n$ und $h_1 \,|\, D = h$ gibt.
3. Sei h eine rationale Funktion. Eine rationale Funktion $h_1\colon D_1 \to K$ heißt *maximale Fortsetzung* von h, wenn $D \subset D_1 \subset K^n$, $h_1 \,|\, D = h$, und D_1 ein maximaler Definitionsbereich von h_1 ist.
4. Sei h eine rationale Funktion, und seien $f,\, g \in \mathcal{P}_n(K)$. Dann heißt f ein *reduzierter Zähler* und g ein *reduzierter Nenner* von h, wenn gilt:
   - Es ist
   $$(\forall \boldsymbol{x} \in D) \ \ g(\boldsymbol{x}) \neq 0 \quad \wedge \quad h(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}\,;$$
   - Sind $f_1,\, g_1 \in \mathcal{P}_n(K)$, so dass
   $$(\forall \boldsymbol{x} \in D) \ \ g_1(\boldsymbol{x}) \neq 0 \quad \wedge \quad h(\boldsymbol{x}) = \frac{f_1(\boldsymbol{x})}{g_1(\boldsymbol{x})}\,,$$
   so gibt es eine Polynomfunktion $q \in \mathcal{P}_n(K)$ mit $f_1 = fq$ und $g_1 = gq$.

Jede Polynomfunktion $f \in \mathcal{P}_n(K)$ ist eine rationale Funktion mit maximalem Definitionsbereich K^n und reduziertem Nenner 1.

Beispiel:
Sei $n = 2$, $f(x,y) = x + y$, $g(x,y) = x^2 - y^2$, $D = \{(x,y) \in K^2 \mid x^2 \neq y^2\}$ und
$$h = \frac{f}{g}\colon D \to K\,, \quad \text{also} \quad h(x,y) = \frac{x+y}{x^2-y^2} = \frac{1}{x-y} \quad \text{für alle} \quad (x,y) \in D\,.$$
Ist $D_1 = \{(x,y) \in K^2 \mid x \neq y\}$ und
$$h_1\colon D_1 \to K \quad \text{definiert durch} \quad h_1(x,y) = \frac{1}{x-y}\,,$$
so ist h_1 eine rationale Funktion, $D_1 \supsetneq D$ und $h_1 \,|\, D = h$, also D kein maximaler Definitionsbereich von h. Aber D_1 ist ein maximaler Definitionsbereich von h_1.

Beweis. Durch Widerspruch. Ist D_1 kein maximaler Definitionsbereich von h, so gibt es eine Menge $D_1 \subsetneq D_2 \subset K^2$ und $h_2\colon D_2 \to K$ eine rationale Funktion mit $h_2 \,|\, D_1 = h_1$. Seien $f_2,\, g_2 \in \mathcal{P}_2(K)$ mit
$$D_2 = \{(x,y) \in K^2 \mid g_2(x,y) \neq 0\} \quad \text{und} \quad h_2 = \frac{f_2}{g_2}\,.$$
Dann folgt
$$\bigl(\forall (x,y) \in D_1\bigr) \quad \frac{f_2(x,y)}{g_2(x,y)} = \frac{1}{x-y}\,, \quad \text{also} \quad (x-y) f_2(x,y) = g_2(x,y)\,.$$

Seien I_1, $I_2 \subset K$ unendliche Teilmengen mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Dann ist $I_1 \times I_2 \subset D$, und aus Satz 2.7 folgt $\big(\forall (x,y) \in K^2\big)$ $(x-y)f_2(x,y) = g_2(x,y)$. Ist nun $(x_1,y_1) \in D_2 \setminus D_1$, so folgt $x_1 = y_1$ und $g_2(x_1,y_1) = 0$, ein Widerspruch! $\square$

Satz und Definition 2.8 (Darstellungssatz für rationale Funktionen)**.**

1. *Sei* $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset K^n$ *und* $h \colon D \to K$ *eine rationale Funktion. Dann gibt es ein bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmtes Paar von Polynomfunktionen* $(f,g) \in \mathcal{P}_n(K) \times \mathcal{P}_n(K)$, *so dass* f *ein reduzierter Zähler und* g *ein reduzierter Nenner von* h *ist. Es ist dann* $D_1 = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid g(\boldsymbol{x}) \neq 0\} \supset D$, *und die rationale Funktion*
$$h_1 = \frac{f}{g} \colon D_1 \to K$$
ist eine maximale Fortsetzung von h.
Ist $D \subset D_1' \subset K^n$ *und* $h_1' \colon D_1' \to K$ *eine weitere maximale Fortsetzung von* h, *so ist* $D_1' = D_1$ *und* $h_1' = h_1$.
Die Punkte $\boldsymbol{z} \in K^n \setminus D_1$ heißen *Polstellen* der rationalen Funktion h.
2. (Satz von der Partialbruchzerlegung) *Sei* $\emptyset \neq D \subset K$, $h \colon D \to K$ *eine rationale Funktion, und sei*
$$(\forall x \in D) \quad h(x) \;=\; \frac{f(x)}{(x-z_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-z_m)^{k_m} g(x)}$$
mit $f \in \mathcal{P}(K)$, $m \in \mathbb{N}_0$, *verschiedenen* $z_1, \ldots, z_m \in K$, *so dass* $K \setminus D = \{z_1, \ldots, z_m\}$, $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ *und nullstellenfreiem* $g \in \mathcal{P}(K)$. *Dann ist*
$$(\forall x \in D) \quad h(x) = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_\mu} \frac{c_{\mu,j}}{(x-z_\mu)^j} \;+\; \frac{f_1(x)}{g(x)}$$
mit Koeffizienten $c_{\mu,j} \in K$ *und* $f_1 \in \mathcal{P}(K)$, *so dass*
$$\operatorname{grad}(f_1) \;\leq\; \max\{\operatorname{grad}(f) - (k_1 + \ldots + k_m)\,,\, \operatorname{grad}(g) - 1\}\,.$$
Ist insbesondere $g = 1$ *und* $\operatorname{grad}(f) < k_1 + \ldots + k_m$, *so ist* $f_1 = 0$.
Die obige Darstellung von h nennt man *Partialbruchzerlegung.*

Beweis. Für den Beweis von 1. müssen wir auf die Algebra verweisen.

2. Induktion nach m.

- $m = 0$: Setze $f_1 = f$.
- $m \geq 1$, $m-1 \to m$: Sei $g_1 \in \mathcal{P}(K)$ definiert durch $g_1(x) = (x-z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-z_m)^{k_m} g(x)$.

Dann ist $g_1(z_1) \neq 0$, und nach Satz 2.6 ist $g_1(x) = (x-z_1)B_1(x) + c$ mit $B_1 \in \mathcal{P}(K)$ und $c \in K^\times$. Damit folgt
$$1 = \big[c^{-1}g_1(x) - (x-z_1)c^{-1}B_1(x)\big]^{k_1} = A(x)g_1(x) + (x-z_1)^{k_1}B(x) \quad \text{mit} \quad A,\, B \in \mathcal{P}(K)$$
und daher
$$(\forall x \in D) \quad h(x) = \frac{f(x)}{(x-z_1)^{k_1} g_1(x)} \;=\; \frac{f(x)A(x)}{(x-z_1)^{k_1}} \;+\; \frac{f(x)B(x)}{g_1(x)}\,.$$
Nach Induktionsvoraussetzung folgt
$$(\forall x \in D) \quad \frac{f(x)B(x)}{g_1(x)} \;=\; \sum_{\mu=2}^{m} \sum_{j=1}^{k_\mu} \frac{c_{\mu,j}}{(x-z_\mu)^j} \;+\; \frac{f_2(x)}{g(x)}$$

mit $c_{\mu,j} \in K$ und $f_2 \in \mathcal{P}(K)$. Nun ist [mit geeigneten $N \in \mathbb{N}_0$, a_ν, $b_\nu \in K$ und $P \in \mathcal{P}(K)$]

$$f(x)A(x) = \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu[(x-z_1)+z_1]^\nu = \sum_{\nu=0}^{N} b_\nu(x-z_1)^\nu = \sum_{\nu=0}^{k_1-1} b_\nu(x-z_1)^\nu + (x-z_1)^{k_1}P(x)$$

und daher (mit $c_{1,j} = b_{k_1-j}$)

$$(\forall x \in D) \quad \frac{f_0(x)A(x)}{(x-z_1)^{k_1}} = \sum_{\nu=0}^{k_1-1} \frac{b_\nu}{(x-z_1)^{k_1-\nu}} + P(x) = \sum_{j=1}^{k_1} \frac{c_{1,j}}{(x-z_1)^j} + P(x)\,.$$

Setzt man die beiden Summen zusammen, so folgt

$$(\forall x \in D) \quad h(x) \;=\; \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_\mu} \frac{c_{\mu,j}}{(x-z_\mu)^j} \;+\; \frac{f_1(x)}{g(x)} \quad \text{mit} \quad f_1 \in \mathcal{P}(K)\,.$$

Um den Grad von f_1 abzuschätzen, multipliziert man die Partialbruchzerlegung von h mit g und erhält (zuerst für alle $x \in D$, aber nach Satz 2.3 für alle $x \in K$)

$$f(x) = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_\mu} c_{\mu,j}\, g_{\mu,j}(x) + (x-z_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-z_m)^{k_m} f_1(x)$$

mit Polynomfunktionen $g_{\mu,j} \in \mathcal{P}(K)$, so dass $g_{\mu,j}(x)(x-z_\mu)^j = (x-z_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-z_m)^{k_m} g(x)$. Insbesondere folgt $\operatorname{grad}(g_{\mu,j}) \leq k_1 + \ldots + k_m + \operatorname{grad}(g) - 1$, und daher

$$k_1 + \ldots + k_m + \operatorname{grad}(f_1) \leq \max\{\operatorname{grad}(f),\, k_1 + \ldots + k_m + \operatorname{grad}(g) - 1\}\,. \qquad \square$$

2.4. Skalarprodukte und Normen

Definition 2.9. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

1. Eine *Norm* auf X ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| \colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}\,, \quad x \;\mapsto\; \|x\|\,,$$

so dass für alle x, $y \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

N1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
N2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
N3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

Einfache Folgerungen:
Für alle x, $y \in X$ ist $\|-x\| = \|x\|$ und $\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Beweis. $\|-x\| = \|(-1)x\| = |-1|\,\|x\| = \|x\|$, $\|x-y\| \leq \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|$. Aus $\|x\| = \|(x \pm y) \mp y\| \leq \|x \pm y\| + \|y\|$ folgt $\|x\| - \|y\| \leq \|x \pm y\|$. In gleicher Weise folgt $\|y\| - \|x\| \leq \|y \pm x\| = \|x \pm y\|$, und daher $\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leq \|x \pm y\|$. $\square$

Ein *normierter* $\mathbb{K}$-*Vektorraum* $(X, \|\cdot\|)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $X \neq \{0\}$, gemeinsam mit einer Norm $\|\cdot\|$ auf X. Man schreibt meist einfach X an Stelle von $(X, \|\cdot\|)$. Ein *normierter Raum* ist ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Eine Teilmenge A eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ heißt *beschränkt*, wenn

$$(\exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0})\ (\forall x \in A)\ \|x\| \leq M$$

[äquivalent: Die Menge $\big\{\|x\| \bigm| x \in M\big\} \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt].

Ene *normierte* $\mathbb{K}$*-Algebra* $(X, *, \|\cdot\|)$ ist eine $\mathbb{K}$-Algebra $(X, *)$, gemeinsam mit einer Norm $\|\cdot\|$ auf X, so dass

$$(\forall x,\, y \in X) \quad \|x * y\| \le \|x\|\,\|y\|\,.$$

Eine *normierte Algebra* ist eine normierte $\mathbb{R}$-Algebra.

2. Seien $(X, \|\cdot\|)$ und $(X', \|\cdot\|')$ normiere $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi\colon X \to X'$ heißt *Isometrie* zwischen $(X, \|\cdot\|)$ und $(X', \|\cdot\|')$, wenn φ ein Isomorphismus ist, und $(\forall x \in X)\ \|\varphi(x)\|' = \|x\|$.
3. Ein *Skalarprodukt* auf X ist eine Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}\,, \quad (x, y) \;\mapsto\; \langle x, y\rangle\,,$$

so dass für alle $x,\, x',\, y \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

S1. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}\,.$

S2. $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle\,.$

S3. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle\,.$

S4. $x \ne 0 \;\Rightarrow\; \langle x, x\rangle > 0\,.$

Einfache Folgerungen:

Für alle $x,\, y,\, y' \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle\,, \quad \langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle\,, \quad \langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0\,.$$

Beweis. $\langle x, y + y'\rangle = \overline{\langle y + y', x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle y', x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle$.
$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y, x\rangle} = \overline{\lambda}\,\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$. Aus $\langle x, 0\rangle + \langle x, 0\rangle = \langle x, 0 + 0\rangle = \langle x, 0\rangle$ folgt $\langle x, 0\rangle = 0 = \langle 0, x\rangle$. □

Ein *euklidischer Raum* ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt.

Satz 2.9. *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt. Für $x \in X$ sei*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\,.$$

Dann ist $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ eine Norm auf X, und für alle $x,\, y \in X$ ist

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\| \quad \text{(Schwarz'sche Ungleichung)}\,.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Schwarz'sche Ungleichung. Seien $x,\, y \in X$. Im Falle $x = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $x \ne 0$, $\lambda = \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\mu = \langle y, x\rangle \in \mathbb{K}$. Wir müssen zeigen:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \;\le\; \|x\|^2\,\|y\|^2\,, \quad \text{also} \quad |\mu|^2 \le \lambda\|y\|^2\,.$$

Es ist

$$0 \le \langle \lambda y - \mu x, \lambda y - \mu x\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle - \lambda\mu\langle x, y\rangle - \lambda\overline{\mu}\langle y, x\rangle + \mu\overline{\mu}\langle x, x\rangle = \lambda^2\|y\|^2 - 2\lambda|\mu|^2 + \lambda|\mu|^2\,,$$

und wegen $\lambda > 0$ folgt $\lambda\|y\|^2 - |\mu|^2 \ge 0$.

Nachweis der Normaxiome: Seien $x,\, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

N1. $\|x\| = 0 \iff \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

N2. Mit der Schwarz'schen Ungleichung folgt

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\,\Re(\langle x, y\rangle) \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

und daher $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.
N3. $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle x,x\rangle = (|\lambda|\,\|x\|)^2$, und daher $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$. $\square$

Wichtigstes Beispiel: Sei $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ und $n\in\mathbb{N}$.
Für $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$ sei

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}\,.$$

Dann ist $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$, genannt *Standardskalarprodukt*. Man nennt dieses Skalarprodukt im Falle $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ein *euklidisches Skalarprodukt* und im Falle $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ein *unitäres Skalarprodukt*. Die davon induzierte Norm heißt *Standardnorm*. Man nennt die Standardnorm im Falle $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ die *euklidische Norm* und im Falle $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ die *unitäre Norm*. Die Standardnorm ist gegeben durch

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}\,.$$

Für $(x_1,\dots,x_n)$, $(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$ folgt aus Satz 2.9

$$\Big|\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}\Big| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} \quad\text{und}\quad \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}\,.$$

Für $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$ heißt

$$\mathsf{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i-x_i|^2}$$

der (*euklidische*) *Abstand* von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$. Die Menge

$$S^{n-1} = \big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \;\big|\; \|\boldsymbol{x}\|=1\big\} = \Big\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \;\Big|\; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\Big\}$$

heißt $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre.
Versieht man $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^{2n}$ beide mit der Standardnorm, so ist die Abbildung

$$(z_1,\dots,z_n) \;\mapsto\; (\Re(z_1),\Im(z_1),\dots,\Re(z_n),\Im(z_n))$$

eine Isometrie zwischen $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^{2n}$.

Spezialfälle:

1. Jeder normierte $\mathbb{C}$-Vektorraum ist ein normierter Raum, und jede normierte $\mathbb{C}$-Algebra ist eine normierte Algebra.
2. Das Standardskalarprodukt und die Standardnorm auf $\mathbb{K}=\mathbb{K}^1$ sind gegeben durch $\langle x,y\rangle = x\overline{y}$ und $\|x\|=|x|$.
3. Ist $\|\cdot\|$ die Standardnorm auf $\mathbb{R}^2$, so ist die Abbildung

   $$\mathbb{R}^2 \;\to\; \mathbb{C}\,,\quad \text{definiert durch}\quad (x,y)\mapsto x+y\mathsf{i}\,,$$

   eine Isometrie von $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)$ und $(\mathbb{C},|\cdot|)$.

Satz und Definition 2.10. *Sei* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. *Seien* X *und* $Y \neq \{0\}$ $\mathbb{K}$*-Vektorräume und* $\varphi\colon X \to Y$ *ein Isomorphismus. Sei* $\|\cdot\|_Y$ *eine Norm auf* Y*, und sei*
$$\|\cdot\|_\varphi = \|\cdot\|_Y \circ \varphi\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}\,, \quad \textit{also} \quad \|x\|_\varphi = \|\varphi(x)\|_Y \ \textit{ für alle } \ x \in X\,.$$
Dann ist $\|\cdot\|_\varphi$ *eine Norm auf* X*, und* φ *ist eine Isometrie zwischen* $(X, \|\cdot\|_\varphi)$ *und* $(Y, \|\cdot\|_Y)$.
2. *Sei* $n \in \mathbb{N}$. *Für* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *sei*
$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ \ldots, \ |x_n|\}\,.$$
Dann ist $\|\cdot\|_\infty\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *eine Norm auf* $\mathbb{K}^n$.
$\|\cdot\|_\infty$ heißt *Maximumsnorm* des $\mathbb{K}^n$.
3. *Sei* X *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum,* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ *eine* $\mathbb{K}$*-Basis von* X. *Seien* $\varphi_{\boldsymbol{u}}\colon \mathbb{K}^n \to X$ *und* $\|\cdot\|_{\boldsymbol{u}}\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *definiert durch*
$$\varphi_{\boldsymbol{u}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i u_i$$
und
$$\|\cdot\|_{\boldsymbol{u}} = \|\cdot\|_\infty \circ \varphi_{\boldsymbol{u}}^{-1}\,, \quad \textit{also} \quad \Big\|\sum_{i=1}^n x_i u_i\Big\|_{\boldsymbol{u}} = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\,.$$
Dann ist $\varphi_{\boldsymbol{u}}$ *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum-Isomorphismus,* $\|\cdot\|_{\boldsymbol{u}}$ *ist eine Norm auf* X*, und* $\varphi_{\boldsymbol{u}}$ *ist eine Isometrie zwischen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *und* $(X, \|\cdot\|_{\boldsymbol{u}})$.
$\|\cdot\|_{\boldsymbol{u}}$ heißt *die von der Basis* $\boldsymbol{u}$ *induzierte Maximumsnorm* von X.

Beweis. Einfaches Nachrechnen. □

Satz und Definition 2.11 (Supremumsnorm)**.** *Sei* $M \neq \emptyset$ *eine Menge und* X *ein normierter Raum. Für eine Abbildung* $f\colon M \to X$ *sei*
$$\|f\|_M = \sup\big\{\|f(x)\| \bigm| x \in M\big\} \in [0, \infty]\,.$$
$\|\cdot\|_M\colon \mathrm{Abb}(M, X) \to [0, \infty]$ heißt *Supremumsnorm* auf $\mathrm{Abb}(M, X)$.
Eine Abbildung $f\colon M \to X$ heißt *beschränkt*, wenn $\|f\|_M < \infty$ [äquivalent: Die Menge $f(M)$ ist beschränkt].
$\mathcal{B}(M, X)$ bezeichne die Menge aller beschänkten Abbildungen $f\colon M \to X$.

1. *Für* $f, g \in \mathrm{Abb}(M, X)$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*
   (a) $\|f\|_M = 0 \iff f = \mathsf{c}_0$ (*die konstante Funktion mit Wert* 0).
   (b) $\|f + g\|_M \leq \|f\|_M + \|g\|_M$ *und* $\|\lambda f\|_M = |\lambda|\, \|f\|_M$.
   (c) *Ist* X *eine normierte Algebra (insbesondere* $X = \mathbb{R}$ *oder* $X = \mathbb{C}$*), so folgt*
$$\|fg\|_M \leq \|f\|_M\, \|g\|_M \quad (\textit{mit } 0 \cdot \infty = 0\,).$$
2. $\mathcal{B}(M, X) \subset \mathrm{Abb}(M, X)$ *ist ein Teilraum, und* $\|\cdot\|_M$ *ist eine Norm auf* $\mathcal{B}(M, X)$. *Ist* X *eine normierte Algebra, so ist auch* $\mathcal{B}(M, X)$ *eine normierte Algebra. Insbesondere ist* $\mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ *eine normierte Algebra.*

Beweis. 1. Seien f, $g \in \mathrm{Abb}(M, X)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) $\|f\|_M = 0 \iff (\forall x \in M)\ \|f(x)\| = 0 \iff (\forall x \in M)\ f(x) = 0 \iff f = \mathsf{c}_0$.

(b) Für $x \in M$ ist $\|(f+g)(x)\| = \|f(x) + g(x)\| \le \|f(x)\| + \|g(x)\| \le \|f\|_M + \|g\|_M$ und daher $\|f+g\|_M = \sup\bigl\{\|(f+g)(x)\| \bigm| x \in M\bigr\} \le \|f\|_M + \|g\|_M$.

Im Falle $\lambda = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\lambda \ne 0$. Für $x \in M$ ist

$$\|(\lambda f)(x)\| = |\lambda|\,\|f(x)\| \le |\lambda|\,\|f\|_M\,, \quad \text{also} \quad \|\lambda f\|_M \le |\lambda|\,\|f\|_M\,,$$

und aus dem selben Grunde $\|f\|_M = \|\lambda^{-1}(\lambda f)\|_M \le |\lambda|^{-1}\,\|\lambda f\|_M$, also $|\lambda|\,\|f\|_M \le \|\lambda f\|_M$.

(c) Für $x \in M$ ist $\|(fg)(x)\| = \|f(x)g(x)\| \le \|f(x)\|\,\|g(x)\| \le \|f\|_M\,\|g\|_M$ und daher $\|fg\|_M = \sup\bigl\{\|(fg)(x)\| \bigm| x \in M\bigr\} \le \|f\|_M\,\|g\|_M$.

2. folgt aus 1. auf Grund der Definitionen. □

2.5. Die Topologie normierter Räume

Definition 2.10. Sei $X = (X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $a \in X$.

1. Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann heißt $B_r(a) = \bigl\{x \in X \bigm| \|x-a\| < r\bigr\}$ die *offene Kugel* und $\overline{B}_r(a) = \bigl\{x \in X \bigm| \|x-a\| \le r\bigr\}$ die *abgeschlossene Kugel* mit Radius r um a. Es sei $B_\infty(a) = \overline{B}_\infty(a) = X$.
2. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von a, wenn $(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ B_\varepsilon(a) \subset U$. Die Menge $\mathcal{U}(a)$ aller Umgebungen von a heißt *Umgebungssystem* oder *Umgebungsfilter* von a.

Elementare Eigenschaften des Umgebungsbegriffs:
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $a \in X$.

1. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es zu jedem $\delta \in (0, \varepsilon)$ ein $x \in B_\varepsilon(a)$ mit $\|a - x\| = \delta$.

   Beweis. Sei $z \in X$ mit $z \ne a$ und $\eta = \delta\|z-a\|^{-1}$. Dann leistet $x = a + \eta(z-a)$ das Gewünschte.
2. Sind U_1, $U_2 \in \mathcal{U}(a)$, so ist auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(a)$.

   Beweis. Für $i \in \{1,2\}$ sei $\varepsilon_i \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_{\varepsilon_i}(a) \subset U_i$, und sei $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Dann ist $B_\varepsilon(a) \subset U_1 \cap U_2$, also $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(a)$. □
3. Ist $U \in \mathcal{U}(a)$ und $U \subset U_1 \subset X$, so ist auch $U_1 \in \mathcal{U}(a)$.
4. Für $U \subset X$ gilt: $U \in \mathcal{U}(a) \iff (\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ \overline{B}_\varepsilon(a) \subset U$.

   Beweis. Offensichtlich, da $\overline{B}_{\varepsilon/2}(a) \subset B_\varepsilon(a) \subset \overline{B}_\varepsilon(a)$. □
5. $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ \bigl[B_\varepsilon(a) \in \mathcal{U}(a) \ \wedge\ \overline{B}_\varepsilon(a) \in \mathcal{U}(a)\bigr]$.

Beispiele:

1. Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm:

   $n = 2$: $B_r(a)$ ist eine offene und $\overline{B}_r(a)$ ist eine abgeschlossene Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt a.

   $n = 3$: $B_r(a)$ ist eine offene und $\overline{B}_r(a)$ ist eine abgeschlossene Kugel (im anschaulich geometrischen Sinne) mit Radius r und Mittelpunkt a.

   $n = 1$: $B_r(a) = (a-r, a+r)$, $\overline{B}_r(a) = [a-r, a+r]$.

2. Sei $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ und $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist
$$B_r(\boldsymbol{a}) = \prod_{i=1}^n (a_i - r, a_i + r)\,, \quad \overline{B}_r(\boldsymbol{a}) = \prod_{i=1}^n [a_i - r, a_i + r]\,.$$
$B_r(\boldsymbol{a})$ ist der offene und $\overline{B}_r(\boldsymbol{a})$ ist der abgeschlossene Würfel mit Mittelpunkt $\boldsymbol{a}$ und Kantenlänge $2r$.

Satz und Definition 2.12. *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X. Für $a \in X$ und $i \in \{1,2\}$ sei $\mathcal{U}_i(a)$ der Umgebungsfilter von a bezüglich $\|\cdot\|_i$. Dann sind äquivalent:*

(a) $(\forall a \in X)\ \ \mathcal{U}_1(a) = \mathcal{U}_2(a)\,.$

(b) $(\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x \in X)\ \ \|x\|_1 \le c_1\|x\|_2\ \wedge\ \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1\,.$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so nennt man $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ *äquivalente Normen.*

Beweis. Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \in X$ und $i \in \{1,2\}$ sei $B_r^{(i)}(a) = \bigl\{x \in X \bigm| \|x - a\|_i < r\bigr\}$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Wegen der Symmetrie der Voraussetzung genügt es, zu zeigen:
$$(\exists c \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x \in X \setminus \{0\})\ \ \|x\|_1 < c\|x\|_2\,.$$
Wegen $B_1^{(1)}(0) \in \mathcal{U}_1(0) = \mathcal{U}_2(0)$ gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon^{(2)}(0) \subset B_1^{(1)}(0)$, das heißt, $(\forall x \in X)\ \bigl[\,\|x\|_2 < \varepsilon \implies \|x\|_1 < 1\bigr]$. Sei nun $x \in X \setminus \{0\}$. Dann ist
$$\Bigl\|\frac{\varepsilon}{2\|x\|_2}\,x\Bigr\|_2 = \frac{\varepsilon}{2\|x\|_2}\,\|x\|_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{und daher} \quad \Bigl\|\frac{\varepsilon}{2\|x\|_2}\,x\Bigr\|_1 = \frac{\varepsilon}{2\|x\|_2}\,\|x\|_1 < 1\,,$$
also $\|x\|_1 < 2\varepsilon^{-1}\|x\|_2$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Aus Symmetriegründen genügt es, zu zeigen:
$$(\exists c_1 \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x \in X)\ \bigl[\,\|x\|_1 \le c_1\|x\|_2 \implies (\forall a \in X)\ \ \mathcal{U}_1(a) \subset \mathcal{U}_2(a)\bigr]\,.$$
Sei also $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(\forall x \in X)\ \|x\|_1 \le c_1\|x\|_2$, seien $a \in X$, $U \in \mathcal{U}_1(a)$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon^{(1)}(a) \subset U$. Wir zeigen $B^{(2)}_{c_1^{-1}\varepsilon}(a) \subset U$ (dann folgt $U \in \mathcal{U}_2(a)$). Ist $x \in B^{(2)}_{c_1^{-1}\varepsilon}(a)$, also $\|x - a\|_2 < c_1^{-1}\varepsilon$, so folgt $\|x - a\|_1 \le c_1\|x - a\|_2 < \varepsilon$ und daher $x \in B_\varepsilon^{(1)}(a) \subset U$. □

Bemerkungen:

1. Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorrraum, und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf X. Dann ist eine Teilmenge von X [eine Abbildung $f\colon M \to X$] genau dann bezüglich $\|\cdot\|_1$ beschränkt, wenn sie bezüglich $\|\cdot\|_2$ beschränkt ist.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ die Standardnorm des $\mathbb{R}^n$. Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ist $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le \|\boldsymbol{x}\| \le \sqrt{n}\,\|\boldsymbol{x}\|_\infty$. Daher sind die Standardnorm und die Maximumsnorm äquivalt.

   Später (Satz 3.21) werden wir zeigen: In einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.
3. Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist die Äquivalenz von Normen auf X eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf X.

Definition 2.11. Sei X ein normierter Raum, $A \subset X$ und $a \in X$.

1. a heißt *Berührpunkt* von A, wenn $(\forall U \in \mathcal{U}(a))\ \ U \cap A \neq \emptyset$. Die Menge $\overline{A}$ aller Berührpunkte von A heißt *abgeschlossene Hülle* von A.

   A heißt *abgeschlossen*, wenn $\overline{A} = A$ $\ [\iff\ A \supset \overline{A}\,]$.
2. a heißt *Häufungspunkt* von A, wenn $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$. Die Menge A' aller Häufungspunkte von A heißt *Ableitung* von A. a heißt *isolierter Punkt* von A, wenn $a \in A \setminus A'$.
3. a heißt *innerer Punkt* von A, wenn $A \in \mathcal{U}(a)$. Die Menge A° aller inneren Punkte von A heißt *Inneres* oder *offener Kern* von A.

   A heißt *offen*, wenn $A = A^\circ$ $\ [\iff\ A \subset A^\circ \iff (\forall a \in A)\ A \in \mathcal{U}(a)\,]$.

Bemerkungen:

1. Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum X. Dann stimmen die in Definition 2.11 eingeführten Begriffe bezüglich $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ überein.
2. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $A \subset X$ und $a \in X$. Dann gilt:
   - $a \in \overline{A} \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ \ B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$.
   - $a \in A^\circ \iff (\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ \ B_\varepsilon(a) \subset A$.
3. Seien $(X, \|\cdot\|)$ und $(X', \|\cdot\|')$ normierte Räume und sei $\varphi\colon X \to X'$ eine Isometrie. Dann übertragen sich alle topologischen Begriffe mittels φ von X auf X'. Zum Beispiel: Für $a \in X$ ist $\varphi(B_\varepsilon(a)) = B_\varepsilon(\varphi(a))$; für $U \subset X$ ist $U \in \mathcal{U}(a) \iff \varphi(U) \in \mathcal{U}(\varphi(a))$; $U \subset X$ ist offen [abgeschlossen] $\iff \varphi(U) \subset X'$ ist offen [abgeschlossen].

Satz 2.13. *Sei X ein normierter Raum, $A \subset X$, $a \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.*

1. *$B_\varepsilon(a)$ ist offen und $\overline{B}_\varepsilon(a)$ ist abgeschlossen.*
2. $a \in A' \iff (\forall U \in \mathcal{U}(a))\ \ |U \cap A| \geq 2 \iff (\forall U \in \mathcal{U}(a))\ \ |U \cap A| = \infty$.

Beweis. 1. $B_\varepsilon(a)$ ist offen. Dazu ist zu zeigen: $(\forall b \in B_\varepsilon(a))\ \ B_\varepsilon(a) \in \mathcal{U}(b)$. Sei $b \in B_\varepsilon(a)$. Dann ist $\delta = \varepsilon - \|b-a\| \in \mathbb{R}_{>0}$, und für $x \in B_\delta(b)$ ist $\|x-a\| \leq \|x-b\| + \|b-a\| < \delta + \|b-a\| = \varepsilon$, also $x \in B_\varepsilon(a)$. Daher ist $B_\delta(b) \subset B_\varepsilon(a)$ und $B_\varepsilon(a) \in \mathcal{U}(b)$.

$\overline{B}_\varepsilon(a)$ ist abgeschlossen. Dazu zeigen wir: Ist $x \in X \setminus \overline{B}_\varepsilon(a)$, so ist x auch kein Berührpunkt von $\overline{B}_\varepsilon(a)$.

Sei $x \in X \setminus \overline{B}_\varepsilon(a)$. Dann ist $\|x-a\| > \varepsilon$, also $\delta = \|x-a\| - \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Für $y \in B_\delta(x)$ folgt

$$\|y-a\| = \|(x-a)+(y-x)\| \geq \|x-a\| - \|y-x\| > \|x-a\| - \delta = \varepsilon\,, \quad \text{also} \quad y \notin \overline{B}_\varepsilon(a)\,.$$

Daher ist $B_\delta(x) \cap \overline{B}_\varepsilon(a) = \emptyset$ und x kein kein Berührpunkt von $\overline{B}_\varepsilon(a)$.

2. Es genügt, die folgenden beiden Behauptungen zu beweisen.

A. $a \in A' \implies \big[(\forall U \in \mathcal{U}(a))\ \ |U \cap A| = \infty\big]$.

B. $\big[(\forall U \in \mathcal{U}(a))\ \ |U \cap A| \geq 2\big] \implies a \in A'$.

Beweis von **A.** Angenommen, $(\exists U \in \mathcal{U}(a))\ \ |U \cap A| < \infty$. Dann ist

$$\varepsilon = \min\big\{\|x-a\| \,\big|\, x \in U \cap A \setminus \{a\}\big\} \in \mathbb{R}_{>0}\,, \quad \text{und} \quad B_\varepsilon(a) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset\,, \quad \text{also} \quad a \notin A'\,.$$

Beweis von **B.** Für alle $U \in \mathcal{U}(a)$ ist $|U \cap A| \geq 2$, also $U \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Daher folgt $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$, also $a \in A'$. □

Satz 2.14. *Sei X ein normierter Raum, und seien $A, B \subset X$.*

1. $A^\circ \subset A \cap A' \quad \wedge \quad A \subset \overline{A}$.
2. $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \overline{A} \subset \overline{B} \ \wedge \ A^\circ \subset B^\circ$.
3. A° *ist die größte offene Teilmenge von* A, *und* $\overline{A}$ *ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von* A.
4. $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A} \quad \wedge \quad \overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$. *Insbesondere gilt*:
$$A \ \text{ist offen} \ [\,\text{abgeschlossen}] \iff X \setminus A \ \text{ist abgeschlossen} \ [\,\text{offen}].$$
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \wedge \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
6. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \quad \wedge \quad (A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$.

Beweis. 1. Offensichtlich ist $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$, und es bleibt $A^\circ \subset A'$ zu zeigen. Sei dazu $a \in A^\circ$, also $A \in \mathcal{U}(a)$. Wir müssen zeigen: Für alle $U \in \mathcal{U}(a)$ ist $U \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.

Sei $U \in \mathcal{U}(a)$. Dann ist auch $U \cap A \in \mathcal{U}(a)$, und es gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon(a) \subset U \cap A$. Dann ist $U \cap (A \setminus \{a\}) = U \cap A \setminus \{a\} \supset B_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \neq \emptyset$.

2. Sei $A \subset B$. Ist $a \in \overline{A}$ und $U \in \mathcal{U}(a)$, so ist $U \cap A \neq \emptyset$, also auch $U \cap B \neq \emptyset$ und daher $a \in \overline{B}$. Ist $a \in A^\circ$, so ist $A \in \mathcal{U}(a)$, also auch $B \in \mathcal{U}(a)$ und daher $a \in B^\circ$.

3. A° ist offen. Dazu zeigen wir: $(\forall a \in A^\circ)\ A^\circ \in \mathcal{U}(a)$. Sei $a \in A^\circ$. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon(a) \subset A$. Nach Satz 2.13 ist $B_\varepsilon(a)$ offen, also $(\forall b \in B_\varepsilon(a))\ B_\varepsilon(a) \in \mathcal{U}(b)$ und daher $(\forall b \in B_\varepsilon(a))\ A \in \mathcal{U}(b)$. Daher ist $B_\varepsilon(a) \subset A^\circ$ und $A^\circ \in \mathcal{U}(a)$.

$\overline{A}$ ist abgeschlossen. Dazu zeigen wir: Jeder Berührpunkt von $\overline{A}$ gehört zu $\overline{A}$. Sei a Berührpunkt von $\overline{A}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist $B_\varepsilon(a) \cap \overline{A} \neq \emptyset$, und für $b \in B_\varepsilon(a) \cap \overline{A}$ ist $B_\varepsilon(a) \in \mathcal{U}(b)$ nach Satz 2.13. Daher folgt $B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$, also $a \in \overline{A}$.

Ist $U \subset A$ und U offen, so folgt $U = U^\circ \subset A^\circ$. Daher ist A° die größte offene Teilmenge von A. Ist $A \subset Q$ und Q abgeschlossen, so folgt $\overline{A} \subset \overline{Q} = Q$. Daher ist $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Obermenge von A.

4. Wir zeigen zuerst $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$.

Ist $a \in (X \setminus A)^\circ$, so ist $X \setminus A \in \mathcal{U}(a)$, und wegen $(X \setminus A) \cap A = \emptyset$ ist $a \notin \overline{A}$. Daher folgt $(X \setminus A)^\circ \subset X \setminus \overline{A}$. Ist umgekehrt $a \in X \setminus \overline{A}$, so gibt es ein $U \in \mathcal{U}(a)$ mit $U \cap A = \emptyset$. Dann ist aber $U \subset X \setminus A$, also $X \setminus A \in \mathcal{U}(a)$ und $a \in (X \setminus A)^\circ$.

Nun folgt $\overline{X \setminus A} = X \setminus (X \setminus \overline{X \setminus A}) = X \setminus [X \setminus (X \setminus A)]^\circ = X \setminus A^\circ$.

5. Aus $A \subset A \cup B$ und $B \subset A \cup B$ folgt $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ und $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, also auch $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Aus $A \cap B \subset A$ und $A \cap B \subset B$ folgt $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ und $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, also auch $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Es bleibt zu zeigen: $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Sei $a \in \overline{A \cup B} \setminus \overline{A}$ und $U \in \mathcal{U}(a)$. Nach 4. ist $X \setminus \overline{A} \in \mathcal{U}(a)$, also auch $U \cap (X \setminus \overline{A}) \in \mathcal{U}(a)$ und $\emptyset \neq U \cap (X \setminus \overline{A}) \cap (A \cup B) = U \cap (X \setminus \overline{A}) \cap B \subset U \cap B$. Also folgt $a \in \overline{B}$.

6. Nach 4. und 5. folgt
$$\begin{aligned} X \setminus (A \cap B)^\circ &= \overline{X \setminus (A \cap B)} = \overline{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)} = \overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B} \\ &= (X \setminus A^\circ) \cup (X \setminus B^\circ) = X \setminus (A^\circ \cap B^\circ)\,, \quad \text{also} \quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ\,, \end{aligned}$$
und
$$\begin{aligned} X \setminus (A \cup B)^\circ &= \overline{X \setminus (A \cup B)} = \overline{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)} \subset \overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus B} \\ &= (X \setminus A^\circ) \cap (X \setminus B^\circ) = X \setminus (A^\circ \cup B^\circ)\,, \quad \text{also} \quad (A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ\,. \quad \square \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nach oben [unten] beschränkt. Dann ist $\sup(A) \in \overline{A}$ $[\inf(A) \in \overline{A}]$.
   Beweis. Sei A nach oben beschränkt und $a = \sup(A)$.
   Dann folgt $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})$ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, und daher ist $a \in \overline{A}$. □
2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei I eines der Intervalle (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$. Dann ist $\overline{I} = [a,b]$ und $I^\circ = (a,b)$.
   Beweis. Nach Satz 1.16 ist $a = \inf(I)$ und $b = \sup(I)$. Nach 1. ist $\{a,b\} \subset \overline{I}$ und daher $[a,b] = I \cup \{a,b\} \subset \overline{I}$. Ist $x > b$ und $0 < \varepsilon < x - b$, so ist $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap I = \emptyset$, also $x \notin \overline{I}$. Analog: $x < a \Rightarrow x \notin \overline{I}$. Daher ist $\overline{I} = [a,b]$.
   $x \in I^\circ \iff (\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset I \iff a < x < b$. Daher ist $I^\circ = (a,b)$. □
3. Sei $a \in \mathbb{R}$ und I eines der Intervalle $[a,\infty)$, (a,∞). Dann ist $\overline{I} = [a,\infty)$ und $I^\circ = (a,\infty)$. Analog für $(-\infty,a)$ und $(-\infty,a]$.
   Beweis. Wie in 2. □
4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Die Intervalle $(-\infty,a)$, (a,b) und (b,∞) sind offen, die Intervalle $(-\infty,a]$, $[a,b]$ und $[b,\infty)$ sind abgeschlossen, und die Intervalle $(a,b]$ und $[a,b)$ sind weder offen noch abgeschlossen.
   Beweis. Nach 2. und 3. □
5. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$.
   Beweis. Für jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ nach Satz 1.10 und daher $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
   Angenommen, es sei $a \in \mathbb{Q}^\circ$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \mathbb{Q}$. Ist nun $x \in \mathbb{R}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|x| < n\varepsilon$, und damit folgt
   $$z = a + \frac{x}{n} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \mathbb{Q}\,, \quad \text{also auch} \quad x = n(z-a) \in \mathbb{Q}\,.$$
   Wegen $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ ist das ein Widerspruch. □

Bemerkung:
Die Mengen $\overline{A}$ und A° hängen vom Raum $(X, \|\cdot\|)$ mit $A \subset X$ ab. Als Beispiel betrachte man die Menge $A = [0,1]$ als Teilmenge von $X = \mathbb{R}$ (da ist $A^\circ = (0,1)$) und als Teilmenge von $X = \mathbb{C}$ (da ist $A^\circ = \emptyset$).

Satz 2.15. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ und $A = A_1 \times \ldots \times A_n \subset \mathbb{R}^n$.*
1. $\overline{A} = \overline{A}_1 \times \ldots \times \overline{A}_n$ *und* $A^\circ = {A_1}^\circ \times \ldots \times {A_n}^\circ$.
2. *Sind $A_1, \ldots, A_n$ offen [abgeschlossen], so ist auch A offen [abgeschlossen].*

Beweis. Es genügt, 1. zu zeigen, und wir verwenden für den Beweis die Maximumsnorm. Für $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei
$$B_\varepsilon(a) = B_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(a) = \prod_{i=1}^n (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$$
die offene Kugel mit Radius ε um $\boldsymbol{a}$ bezüglich der Maximumsnorm. Dann gilt:
$$B_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \cap A \neq \emptyset \iff (\forall i \in \{1,\ldots,n\})\ (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \cap A_i \neq \emptyset\,,$$
$$B_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset A \iff (\forall i \in \{1,\ldots,n\})\ (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \subset A_i\,,$$
und daraus folgen unmittelbar die Behauptungen. □

Satz 2.16. *Sei X ein normierter Raum.*

1. *Die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Teilmengen von X ist offen, und der Durchschnitt einer beliebigen Familie abgeschlossener Teilmengen von X ist abgeschlossen.*
2. *Der Durchschnitt endlich vieler offener Teilmengen von X ist offen, und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Teilmengen von X ist abgeschlossen.*

Beweis. 1. Sei $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie offener Teilmengen von X und A ihre Vereinigung. Ist $a \in A$, so gibt es ein $\lambda \in \Lambda$ mit $a \in A_\lambda$. Dann ist $A_\lambda \in \mathcal{U}(a)$, und wegen $A_\lambda \subset A$ ist auch $A \in \mathcal{U}(a)$. Daher ist A offen.

Sei nun $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X und A ihr Durchschnitt. Dann ist $(X \setminus A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie offener Teilmengen von X und $X \setminus A$ ihre Vereinigung. Daher ist $X \setminus A$ offen und A abgeschlossen.

2. Es genügt, die Behauptung für zwei Mengen zu zeigen (die allgemeine Behauptung folgt dann durch eine einfache Induktion nach der Anzahl). Seien also $A_1,\ A_2 \subset X$.

Sind A_1 und A_2 offen, so folgt $(A_1 \cap A_2)^\circ = A_1{}^\circ \cap A_2{}^\circ = A_1 \cap A_2$ nach Satz 2.14.6, und daher ist auch $A_1 \cap A_2$ offen. Sind A_1 und A_2 abgeschlossen, so folgt $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} = A_1 \cup A_2$ nach Satz 2.14.5, und daher ist auch $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen. $\square$

3. Konvergenz von Folgen

3.1. Rekursive Definition von Folgen

Definition 3.1. Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge und $p \in \mathbb{Z}$. Eine (*unendliche*) *Folge* (mit Anfangsindex p) in A ist eine Abbildung

$$a\colon \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq p\} \to A\,, \quad n \mapsto a_n\,.$$

Man schreibt auch $a = (a_n)_{n\geq p} = (a_p,\, a_{p+1},\, \ldots)$.
Meist ist $p = 0$ oder $p = 1$. Im allgemeinen Fall betrachten wir an Stelle der Folge $(a_n)_{n\geq p}$ die Folge $(a_{p+n})_{n\geq 0}$ oder die Folge $(a_{p+n-1})_{n\geq 1}$.

Bemerkung:
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung $a\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ von geordneten Mengen. Nach Definition 1.3 sind daher die Begriffe der Monotonie und Beschränktheit definiert. Explizit:

$(a_n)_{n\geq 0}$ ist nach oben beschränkt $\iff$ $(\exists M \in \mathbb{R})$ $(\forall n \geq 0)$ $a_n \leq M$.
$(a_n)_{n\geq 0}$ ist nach unten beschränkt $\iff$ $(\exists M \in \mathbb{R})$ $(\forall n \geq 0)$ $a_n \geq M$.
$(a_n)_{n\geq 0}$ ist beschränkt $\iff$ $(\exists M \in \mathbb{R})$ $(\forall n \geq 0)$ $|a_n| \leq M$.
$(a_n)_{n\geq 0}$ ist [streng] monoton wachsend $\iff$ $(\forall n \geq 0)$ $a_{n+1} \geq a_n$ $[a_{n+1} > a_n]$.
$(a_n)_{n\geq 0}$ ist [streng] monoton fallend $\iff$ $(\forall n \geq 0)$ $a_{n+1} \leq a_n$ $[a_{n+1} < a_n]$.
$(a_n)_{n\geq 0}$ ist [streng] monoton wachsend $\iff$ $(-a_n)_{n\geq 0}$ ist [streng] monoton fallend.

Satz 3.1 (Rekursionssatz)**.** *Sei A eine Menge, $a \in A$ und $(g_n\colon A^n \to A)_{n\geq 1}$ eine Folge von Abbildungen. Dann gibt es genau eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in A, so dass*

$$(*) \qquad a_0 = a \quad \text{und} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\; a_n = g_n(a_0,\, a_1, \ldots, a_{n-1})\,.$$

Man sagt dann, die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist durch $(*)$ rekursiv definiert.

Beweis. Wir zeigen für alle $m \in \mathbb{N}_0$ die folgende Behauptung $\mathbf{E}(m)$.
$\mathbf{E}(m)$: Es gibt genau eine Abbildung $a^{(m)}\colon \{0, \ldots, m\} \to A$, so dass $a^{(m)}(0) = a$ und

$$(\forall n \in \{1, \ldots, m\}) \quad a^{(m)}(n) = g_n\bigl(a^{(m)}(0), \ldots, a^{(m)}(n-1)\bigr)\,.$$

Induktion nach m. Für $m = 0$ ist die Behauptung offensichtlich $\bigl[$definiere $a^{(0)}\colon \{0\} \to A$ durch $a^{(0)}(0) = a\bigr]$.
$m \geq 0$, $m \to m+1$: Gelte $\mathbf{E}(m)$. Wir müssen Existenz und Eindeutigkeit einer Abbildung $a^{(m+1)}$ zeigen.
Existenz: Wir definieren $a^{(m+1)}\colon \{0, \ldots, m+1\} \to A$ durch

$$a^{(m+1)}(n) = \begin{cases} a^{(m)}(n)\,, & \text{falls} \quad n \in \{0, \ldots, m\},\\ g_{m+1}\bigl(a^{(m)}(0), \ldots, a^{(m)}(m)\bigr)\,, & \text{falls } n = m+1. \end{cases}$$

Eindeutigkeit: Seien $a^{(m+1)}$, $\overline{a}^{(m+1)}\colon \{0, \ldots, m+1\} \to A$ Abbildungen, so dass

$$a^{(m+1)}(0) = \overline{a}^{(m+1)}(0) = a\,,$$

und für alle $n \in \{1, \ldots, m+1\}$ gilt

$$a^{(m+1)}(n) = g_n\bigl(a^{(m+1)}(0), \ldots, a^{(m+1)}(n-1)\bigr) \;\wedge\; \overline{a}^{(m+1)}(n) = g_n\bigl(\overline{a}^{(m+1)}(0), \ldots, \overline{a}^{(m+1)}(n-1)\bigr)\,.$$

Nach der Eindeutigkeitsaussage in $\mathbf{E}(m)$ folgt daraus

$$a^{(m+1)} \,|\, \{1, \ldots, m\} = \overline{a}^{(m+1)} \,|\, \{1, \ldots, m\} = a^{(m)}\,,$$

und daher auch $a^{(m+1)}(m+1) = g_{m+1}\big(a^{(m)}(0), \ldots, a^{(m)}(m)\big) = \overline{a}^{(m+1)}(m+1)$. Damit ist $\mathbf{E}(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gezeigt.

Aus der Eindeutigkeitsaussage in $\mathbf{E}(m)$ folgt:

$$(\forall\, m,\, n \in \mathbb{N}_0) \quad m \geq n \quad \Longrightarrow \quad a^{(m)} \,|\, \{1, \ldots, n\} = a^{(n)}\,.$$

Damit können wir nun die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage des Satzes beweisen.

Existenzbeweis für Satz 3.1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $a_n = a^{(n)}(n)$. Dann folgt $a_j = a^{(n)}(j)$ für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$, und aus den Aussagen $\mathbf{E}(m)$ folgen die behaupteten Eigenschaften der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$.

Eindeutigkeitsbeweis für Satz 3.1. Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(a'_n)_{n\geq 0}$ Folgen in A mit $a_0 = a$ und

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n = g_n(a_0, \ldots, a_{n-1}) \;\wedge\; a'_n = g_n(a'_0, \ldots, a'_{n-1})\,.$$

Wir müssen zeigen: $(\forall m \in \mathbb{N}_0) \quad a_m = a'_m$.

Sei $m \in \mathbb{N}_0$, und seien $\overline{a}$, $\overline{a}'\colon \{0, \ldots, m\} \to A$ definiert durch $\overline{a}(n) = a_n$ und $\overline{a}'(n) = a'_n$ für alle $n \in \{0, \ldots, m\}$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in $\mathbf{E}(m)$ folgt $\overline{a} = a^{(m)} = \overline{a}'$ und insbesondere $a_m = a'_m$. □

Beispiel: Es gibt genau eine Folge $(F_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{N}_0$ mit

$$F_0 = 0\,, \quad F_1 = 1 \quad \text{und} \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0)\; F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

(Fibonacci-Folge). Dafür setze man im Rekursionssatz $A = \mathbb{N}_0$, $a = 0$, $g_1(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$, und $g_n(a_0,\, a_1,\, \ldots, a_{n-1}) = a_{n-1} + a_{n-2}$ für alle $n \geq 2$.

Spezialfälle: Sei A eine Menge.

1. Einfache Rekursion. Sei $a \in A$ und $(g_n\colon A \to A)_{n\geq 0}$ eine Folge von Abbildungen. Dann gibt es genau eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, so dass $a_0 = a$ und $(\forall n \geq 0)\; a_{n+1} = g_n(a_n)$. In vielen Fällen sind die Funktionen g_n alle gleich.
2. k-gliedrige Rekursion. Sei $k \in \mathbb{N}$, seien $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1} \in A$, und sei $g\colon A^k \to A$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in A, so dass

$$(\forall i \in \{0, \ldots, k-1\}) \;\; a_i = b_i \quad \text{und} \quad (\forall i \geq k) \;\; a_i = g(a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots, a_{i-k})\,.$$

3.2. Konvergenz von Folgen

Definition 3.2. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $p \in \mathbb{Z}$, $(a_n)_{n\geq p}$ eine Folge mit Anfangsindex p in X und $a \in X$.

1. Man sagt, $(a_n)_{n\geq p}$ *konvergiert gegen* a oder *hat den Grenzwert* a, wenn

$$(\forall\, U \in \mathcal{U}(a))\; (\exists n_0 \geq p)\; (\forall n \geq n_0) \;\; a_n \in U\,.$$

In dieser Definition meinen wir (stillschweigend)

"es gibt ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ mit $n_0 \geq p$, so dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ gilt ...."

Schreibweise:

$$(a_n)_{n\geq p} \to a \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a\,.$$

Äquivalente Formulierungen:

$$(a_n)_{n\geq p} \to a \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \geq p)\ (\forall n \geq n_0)\ \ \|a_n - a\| \leq \varepsilon\,.$$

$$(a_n)_{n\geq p} \to a \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ \ \{n \geq p \mid \|a_n - a\| \geq \varepsilon\}\ \text{ ist endlich.}$$

$$(a_n)_{n\geq p} \to a \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ \ \{n \geq p \mid \|a_n - a\| > \varepsilon\}\ \text{ ist endlich.}$$

$$(a_n)_{n\geq p} \to a \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \geq p)\ (\forall n \geq n_0)\ \ a_n \in B_\varepsilon(a)\,.$$

$$(a_n)_{n\geq p} \to a \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ \ \{n \geq p \mid a_n \notin B_\varepsilon(a)\,\}\ \text{ ist endlich.}$$

$$(a_n)_{n\geq p} \to a \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ \ \{n \geq p \mid a_n \notin \overline{B}_\varepsilon(a)\,\}\ \text{ ist endlich.}$$

2. Die Folge $(a_n)_{n\geq p}$ heisst *konvergent*, wenn sie einen Grenzwert besitzt, andernfalls *divergent.*
3. Die Folge $(a_n)_{n\geq p}$ heißt *Nullfolge*, wenn $(a_n)_{n\geq p} \to 0$.
4. Die Folge $(a_n)_{n\geq p}$ heißt *Cauchyfolge*, wenn
$$(\forall\, U \in \mathcal{U}(0))\ (\exists n_0 \geq p)\ (\forall m \geq n \geq n_0)\ \ a_m - a_n \in U\,.$$
5. Der normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *vollständig* oder ein *Banachraum*, wenn jede Cauchyfolge konvergiert. Eine *Banachalgebra* ist eine vollständige normierte Algebra. Ein $\mathbb{C}$-*Banachraum* ist ein vollständiger normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum, und eine $\mathbb{C}$-*Banachalgebra* ist eine vollständige normierte $\mathbb{C}$-Algebra.

Der einfachen Notation halber werden wir im Folgenden (fast) immer Folgen mit Anfangsindex 0 oder 1 betrachten (und die Umformulierung auf den allgemeinen Fall dem Leser überlassen, solange ihm das nicht zu langweilig wird).

Ist X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so induzieren äquivalente Normen auf X dieselben konvergenten Folgen und dieselben Cauchyfolgen, also auch denselben Vollständigkeitsbegriff (die Begriffe hängen nur von den Umgebungsfiltern ab).

Wir werden zeigen (Satz 3.20): Jeder endlich-dimensionale normierte Raum ist bezüglich jeder seiner Normen vollständig.

Bemerkungen:

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in X und $a \in X$. Dann gilt:

1. $(a_n)_{n\geq 0} \to 0$ (in X) $\iff$ $(\|a_n\|)_{n\geq 0} \to 0$ (in $\mathbb{R}$).
2. $(a_n)_{n\geq 0} \to a$ (in X) $\iff$ $(a_n - a)_{n\geq 0} \to 0$ (in X) $\iff$ $\big(\|a_n - a\|\big)_{n\geq 0} \to 0$ (in $\mathbb{R}$).
3. $(a_n)_{n\geq 0}$ ist eine Cauchyfolge $\iff$ $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \geq 0)\ (\forall m \geq n \geq n_0)\ \|a_m - a_n\| < \varepsilon$.
4. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $(a_n)_{n\geq 0} \to a \iff (a_n)_{n\geq k} \to a$.
   Die Folge $(a_n)_{n\geq k}$ heißt ein *Endstück* von $(a_n)_{n\geq 0}$.
5. Sei $(b_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in X und $\{n \geq 0 \mid a_n \neq b_n\}$ endlich. Dann gilt:
$$(a_n)_{n\geq 0} \to a \iff (b_n)_{n\geq 0} \to a\,.$$

Beispiele:

1. Konstante Folgen. Sei X ein normierter Raum und $a \in X$. Die Folge $(a)_{n\geq 0} = (a,\, a,\, \ldots)$ nennt man *konstante Folge* mit Wert a. Es ist $(a)_{n\geq 0} \to a$.
   Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in X heißt *schließlich konstant*, wenn
$$(\exists a \in X)\ (\exists k \geq 0)\ (\forall n \geq k)\ \ a_n = a\,.\quad \text{Dann folgt ebenfalls } (a_n)_{n\geq 0} \to a.$$

2. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \to 0$. Allgemeiner: Sei $a \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C}^\times$ und $k \geq 0$, so dass $k|h| - |a| > 0$. Für $n \geq k$ ist dann $|a+nh| \geq n|h| - |a| > 0$, und wir behaupten

$$\left(\frac{1}{a+nh}\right)_{n\geq k} \to 0\,.$$

Wir müssen zeigen:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}) \ (\exists n_0 \geq k) \ (\forall n \geq n_0) \ \left|\frac{1}{a+nh}\right| < \varepsilon\,.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n_0 \geq k$ mit

$$n_0 > \frac{1+|a|\varepsilon}{\varepsilon|h|}\,.$$

Dann leistet n_0 das Gewünschte.

Satz 3.2. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.*

1. *Eine Folge in X hat höchstens einen Grenzwert.*
2. *Jede konvergente Folge in X ist eine Cauchyfolge, und jede Cauchyfolge ist beschränkt* (siehe Definition 2.11).
3. *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge in X, $(b_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in X und $(\forall n \geq 0)$ $\|b_n\| \leq \|a_n\|$. Dann ist auch $(b_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge.*
4. *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in X, $a \in X$ und $(a_n)_{n\geq 0} \to a$. Dann folgt $(\|a_n\|)_{n\geq 0} \to \|a\|$.*
5. *Sei $A \subset X$ und $a \in X$. Dann gilt:*

$$a \in \overline{A} \iff \textit{es gibt eine Folge } (a_n)_{n\geq 0} \textit{ in } A \textit{ mit } (a_n)_{n\geq 0} \to a.$$

Beweis. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in X.

1. Seien $a, b \in X$ mit $(a_n)_{n\geq 0} \to a$ und $(a_n)_{n\geq 0} \to b$. Wir zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})$ $\|a-b\| < \varepsilon$ (dann folgt $\|a-b\| = 0$, also $a = b$). Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann

$$(\exists n_0 \geq 0) \ (\forall n \geq n_0) \ \ \|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad (\exists n_1 \geq 0) \ (\forall n \geq n_1) \ \ \|a_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ist nun $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, so folgt $\|a-b\| = \|(a_n - b) - (a_n - a)\| \leq \|a_n - b\| + \|a_n - a\| < \varepsilon$.

2. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine konvergente Folge in X, $(a_n)_{n\geq 0} \to a \in X$, und sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann

$$(\exists n_0 \geq 0) \ (\forall n \geq n_0) \ \ \|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Für alle $m, n \geq n_0$ ist dann $\|a_m - a_n\| \leq \|(a_m - a) - (a_n - a)\| \leq \|a_m - a\| + \|a_n - a\| < \varepsilon$. Daher ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchyfolge.

Sei nun $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchyfolge. Dann $(\exists n_0 \geq 0)$ $(\forall n \geq n_0)$ $\|a_n - a_{n_0}\| < 1$. Dann ist $(\forall n \geq n_0)$ $\|a_n\| = \|(a_n - a_{n_0}) + a_{n_0}\| \leq \|a_n - a_{n_0}\| + \|a_{n_0}\| < 1 + \|a_{n_0}\|$ und daher

$$(\forall n \geq 0) \ \ \|a_n\| \leq \max\{\|a_0\|, \|a_1\|, \ldots, \|a_{n_0-1}\|, \|a_{n_0}\| + 1\}\,,$$

also $(a_n)_{n\geq 0}$ beschränkt.

3. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann $(\exists n_0 \geq 0)$ $(\forall n \geq n_0)$ $\|a_n\| < \varepsilon$. Für alle $n \geq n_0$ ist dann auch $\|b_n\| < \varepsilon$.

4. Für alle $n \geq 0$ ist $\big|\|a_n\| - \|a\|\big| \leq \|a_n - a\|$, und da $(\|a_n - a\|)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist, folgt die Behauptung.

5. $\Longrightarrow$: Für $n \geq 1$ sei $a_n \in B_{1/n}(a) \cap A$. Dann ist

$$(\forall n \geq 1) \quad |a_n - a| < \frac{1}{n}, \quad \text{also} \quad (|a_n - a|)_{n\geq 1} \to 0 \quad \text{und daher} \quad (a_n)_{n\geq 1} \to a\,.$$

$\Longleftarrow$: Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in A mit $(a_n)_{n\geq 0} \to a$ und $U \in \mathcal{U}(a)$. Dann gibt es ein $n \geq 0$ mit $a_n \in U$, und daher ist $U \cap A \neq \emptyset$. □

Bemerkung.
Die Folgen $(n)_{n\geq 0}$ und $\big((-1)^n n\big)_{n\geq 0}$ sind nicht beschränkt und daher divergent.

Satz 3.3. *Sei $T \subset \mathbb{N}_0$ eine unendliche Teilmenge. Dann gibt es genau eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\geq 0}$ mit $T = \{n_k \mid k \geq 0\}$, und für diese ist*

$$\Big(\frac{1}{n_k}\Big)_{k\geq 1} \to 0\,.$$

Beweis.
Eindeutigkeit. Ist $(n_k)_{k\geq 0}$ streng monoton wachsend und $T = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$, so folgt

$$(\forall k \in \mathbb{N}_0) \quad n_k = \min\big(T \setminus \{n_0, \ldots, n_{k-1}\}\big)\,.$$

Existenz. Definiere $(n_k)_{k\geq 0}$ rekursiv durch

$$n_0 = \min(T) \quad \text{und} \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \quad n_k = \min(T \setminus \{n_0, \ldots, n_{k-1}\})\,.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist dann $n_{k+1} = \min(T \setminus \{n_0, \ldots, n_k\}) \geq \min(T \setminus \{n_0, \ldots, n_{k-1}\}) = n_k$ und $n_{k+1} \neq n_k$, also $n_{k+1} > n_k$. Daher ist $(n_k)_{k\geq 0}$ streng monoton wachsend.
Als Nächstes zeigen wir: $(\forall k \in \mathbb{N}_0) \quad n_k \geq k$.
Induktion nach k. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen.
Sei also $k \geq 0$ und $n_k \geq k$. Wegen $n_{k+1} > n_k$ ist dann $n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$. Aus

$$(\forall k \geq 1) \quad 0 \leq \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k} \qquad \text{folgt} \qquad \Big(\frac{1}{n_k}\Big)_{k\geq 1} \to 0\,.$$

Es bleibt $T = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ zu zeigen. Angenommen, es sei $T \setminus \{n_k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \neq \emptyset$ und $t = \min(T \setminus \{n_k \mid k \in \mathbb{N}_0\})$. Dann ist die Menge $K = \{k \in \mathbb{N}_0 \mid n_k < t\}$ endlich. Ist $l = \max(K)$, so folgt $n_l < t \leq n_{l+1} = \min(T \setminus \{n_0, \ldots, n_l\}) \leq \min(T \setminus \{n_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}) = t$, also $n_{l+1} = t \in T$, ein Widerspruch. □

Definition 3.3. Sei A eine Menge und $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in A. Sei $T \subset \mathbb{N}_0$ unendlich, $T = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ mit $n_0 < n_1 < \ldots$ (siehe Satz 3.3). Dann nennt man $(a_n)_{n\in T} = (a_{n_k})_{k\geq 0}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\geq 0}$.

Jedes Endstück einer Folge ist eine Teilfolge.

Satz 3.4. *Sei X ein normierter Raum, $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in X und $a \in X$.*

1. *Sei $(a_n)_{n\geq 0} \to a$ und $(m_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\Big(\frac{1}{m_k}\Big)_{k\geq 0} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad (a_{m_k})_{k\geq 0} \to a\,.$$

Insbesondere konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$ gegen a.

2. *Sei* $\mathbb{N}_0 = T_1 \cup T_2$ *mit unendlichen Teilmengen* T_1 *und* T_2. *Dann gilt:*

$$(a_n)_{n\in T_1} \to a \;\wedge\; (a_n)_{n\in T_2} \to a \quad\Longrightarrow\quad (a_n)_{n\geq 0} \to a\,.$$

Beweis. 1. Wir müssen zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists k_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall k \geq k_0)\ \|a_{m_k} - a\| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $(a_n)_{n\geq 0} \to a$ folgt $(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0)\ \|a_n - a\| < \varepsilon$, und wegen $(m_k^{-1})_{k\geq 0} \to 0$ folgt $(\exists k_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall k \geq k_0)\ m_k^{-1} < n_0^{-1}$. Ist nun $k \geq k_0$, so ist $m_k \geq n_0$ und daher $\|a_{m_k} - a\| < \varepsilon$.

2. Wir müssen zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \geq n_0)\ \|a_n - a\| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es $n_1,\ n_2 \geq 0$, so dass für $i \in \{1, 2\}$ gilt: Ist $n \in T_i$ und $n \geq n_i$, so folgt $\|a_n - a\| < \varepsilon$. Ist nun $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, so ist $(\forall n \geq n_0)\ \|a_n - a\| < \varepsilon$. $\square$

Beispiel:
Die Folge $\big((-1)^n\big)_{n\geq 0}$ hat zwei Teilfolgen, die gegen verschiedene Grenzwerte konvergieren (gegen 1 und -1). Daher ist die Folge nicht konvergent (sie ist aber beschränkt).

Satz 3.5 (Rechnen mit konvergenten Folgen, Teil 1)**.** *Sei* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *und* X *ein normierter* $\mathbb{K}$*-Vektorraum.*

1. *Sei* $(a_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge in* X *und* $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$. *Sei entweder* $(a_n)_{n\geq 0}$ *beschränkt und* $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ *eine Nullfolge, oder* $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ *beschränkt und* $(a_n)_{n\geq 0}$ *eine Nullfolge. Dann ist* $(\lambda_n a_n)_{n\geq 0}$ *eine Nullfolge.*
2. *Seien* $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ *konvergente Folgen in* X, $(a_n)_{n\geq 0} \to a \in X$, $(b_n)_{n\geq 0} \to b \in X$, *und sei* $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ *eine konvergente Folge in* $\mathbb{K}$ *mit* $(\lambda_n)_{n\geq 0} \to \lambda \in \mathbb{K}$.
   (a) $(a_n \pm b_n)_{n\geq 0} \;\to\; a \pm b$.
   (b) $(\lambda_n a_n)_{n\geq 0} \to \lambda a$.
   (c) *Ist* $(X, *)$ *eine normierte Algebra, so folgt* $(a_n * b_n)_{n\geq 0} \to a * b$.
3. *Sei* $(X, *)$ *eine normierte Algebra, und seien* $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ *zwei Folgen in* X, *von denen eine beschränkt und die andere eine Nullfolge ist. Dann ist* $(a_n * b_n)_{n\geq 0}$ *eine Nullfolge.*

Beweis. 1. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ beschränkt und $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge. Wir müssen zeigen:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \geq n_0)\ \ \|\lambda_n a_n\| < \varepsilon\,.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $M \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ \ \|a_n\| \leq M$, und sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass $(\forall n \geq n_0)\ \ |\lambda_n| < M^{-1}\varepsilon$. Ist dann $n \geq n_0$, so folgt $\|\lambda_n a_n\| < (M^{-1}\varepsilon)M = \varepsilon$. Im anderen Falle schließt man analog.

2. (a) Wir zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \geq n_0)\ \ \|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)\| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $(a_n)_{n\geq 0} \to a$ und $(b_n)_{n\geq 0} \to b$ gibt es $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$(\forall n \geq n_1)\ \ \|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad (\forall n \geq n_2)\ \ \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ist nun $n_0 = \max(n_1,\ n_2)$ und $n \geq n_0$, so folgt

$$\|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)\| = \|(a_n - a) \pm (b_n - b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \varepsilon\,.$$

2. (b) Wir zeigen: $(\lambda_n a_n - \lambda a)_{n\geq 0} \to 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\lambda_n a_n - \lambda a = (\lambda_n - \lambda)a_n + (a_n - a)\lambda$. Nun ist $(a_n - a)_{n\geq 0} \to 0$, $(\lambda_n - \lambda)_{n\geq 0} \to 0$ und $(a_n)_{n\geq 0}$ beschränkt nach Satz 3.2. Nach 1. ist $((\lambda_n - \lambda)a_n)_{n\geq 0} \to 0$ und $((a_n - a)\lambda)_{n\geq 0} \to 0$, und aus (a) folgt $(\lambda_n a_n - \lambda a)_{n\geq 0} \to 0$.

2. (c) Analog zu 2. (b).

3. Analog zu 1. $\square$

Satz 3.6 (Rechnen mit konvergenen Folgen, Teil 2). *Sei* $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ *Folgen in* $\mathbb{C}$ *und* $a,\, b \in \mathbb{C}$.

1. $(a_n)_{n\geq 0} \to a \iff (\overline{a}_n)_{n\geq 0} \to \overline{a} \iff (\Re(a_n))_{n\geq 0} \to \Re(a) \ \wedge\ (\Im(a_n))_{n\geq 0} \to \Im(a)$.
2. *Sei* $(a_n)_{n\geq 0} \to a$ *und* $(b_n)_{n\geq 0} \to b$. *Dann ist* $(a_nb_n)_{n\geq 0} \to ab$. *Ist außerdem* $a \neq 0$, *so folgt*:

$$\Big[(\exists k \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \geq k)\ a_n \neq 0\Big] \ \wedge\ \Big[\big(\frac{1}{a_n}\big)_{n\geq k} \to \frac{1}{a}\Big] \ \wedge\ \Big[\big(\frac{b_n}{a_n}\big)_{n\geq k} \to \frac{b}{a}\Big].$$

Beweis. 1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $|a_n - a| = |\overline{a}_n - \overline{a}|$, $|\Re(a_n) - \Re(a)| \leq |\Re(a_n - a)| \leq |a_n - a|$ und $|\Im(a_n) - \Im(a)| \leq |\Im(a_n - a)| \leq |a_n - a|$. Daher ist genau dann $(a_n)_{n\geq 0} \to a$, wenn $(\overline{a}_n)_{n\geq 0} \to \overline{a}$, und daraus folgt $(\Re(a_n))_{n\geq 0} \to \Re(a)$ und $(\Im(a_n))_{n\geq 0} \to \Im(a)$.

Sei nun $(\Re(a_n))_{n\geq 0} \to \Re(a)$ und $(\Im(a_n))_{n\geq 0} \to \Im(a)$. Wegen $a_n = \Re(a_n) + i\Im(a_n)$ und $a = \Re(a) + i\Im(a)$ folgt dann auch $(a_n)_{n\geq 0} \to a$ nach Satz 3.5.2.

2. Sei $0 < \eta < |a|$. Wegen $(a_n)_{n\geq 0} \to a$ gilt: $(\exists k \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \geq k)\ \ |a_n - a| < \eta$. Für $n \geq k$ ist dann $|a_n| = |a + (a_n - a)| \geq |a| - |a_n - a| > |a| - \eta > 0$, also insbesondere $a_n \neq 0$, und es folgt

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a_na}(a_n - a) \quad \text{und} \quad \Big|-\frac{1}{a_na}\Big| < \frac{1}{|a|(|a| - \eta)}.$$

Daher ist

$$\Big(-\frac{1}{a_na}\Big)_{n\geq k} \ \text{beschränkt, es folgt}\ \Big(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\Big)_{n\geq k} \to 0\,, \quad \text{also}\quad \Big(\frac{1}{a_n}\Big)_{n\geq k} \to \frac{1}{a}\,,$$

und nach Satz 3.5.2 ist auch

$$\Big(\frac{b_n}{a_n}\Big)_{n\geq k} \to \frac{b}{a}\,.$$

□

Satz 3.7 (Rechnen mit konvergenten Folgen, Teil 3). *Seien* $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ *Folgen in* $\mathbb{R}$ *und* $a,\, b \in \mathbb{R}$.

1. *Sei* $(a_n)_{n\geq 0} \to a$, $(b_n)_{n\geq 0} \to b$ *und* $(\forall n \geq 0)$ $a_n \leq b_n$. *Dann ist auch* $a \leq b$.
   Insbesondere: *Ist* $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ $a_n \leq b$ *oder* $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ $a \leq b_n$, *so folgt* $a \leq b$.
2. (Einzwicksatz) *Sei* $(a_n)_{n\geq 0} \to a$, $(b_n)_{n\geq 0} \to a$ *und* $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ $a_n \leq c_n \leq b_n$. *Dann folgt* $(c_n)_{n\geq 0} \to a$.

Beweis. 1. Wir zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})$ $b - a > -\varepsilon$ (dann folgt $b - a \geq 0$ und daher $a \leq b$. Die Aussagen unter „insbesondere" erhält man, indem man einmal $(b_n)_{n\geq 0}$ und einmal $(a_n)_{n\geq 0}$ durch die konstante Folge ersetzt).

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $(a_n)_{n\geq 0} \to a$ und $(b_n)_{n\geq 0} \to b$ gibt es ein $n \geq 0$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Damit folgt

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_n - a \leq b_n - a = (b_n - b) + (b - a) < \frac{\varepsilon}{2} + (b - a)\,, \quad \text{also} \quad b - a > -\varepsilon\,.$$

2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $a_n - a \leq c_n - a \leq b_n - a$, also $|c_n - a| \leq \max(|a_n - a|, |b_n - a|)$. Wegen $(|a_n - a|)_{n\geq 0} \to 0$ und $(|b_n - a|)_{n\geq 0} \to 0$ folgt $(|c_n - a|)_{n\geq 0} \to 0$, also $(c_n)_{n\geq 0} \to a$. □

Beispiele:

1. Sei $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{Q}_{>0}$. Dann ist $(cn^{-r})_{n\geq 1} \to 0$.
   Beweis. Wir müssen zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \geq n_0)\ \ |cn^{-r}| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq (\varepsilon^{-1}|c|)^{\frac{1}{r}}$ und $n \geq n_0$. Dann folgt $|c|n^{-r} \leq |c|n_0^{-r} < |c|(\varepsilon|c|^{-1}) = \varepsilon$.
2. Sei $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Dann ist $(a^n)_{n\geq 0} \to 0$.
   Beweis. Sei $|a|^{-1} = 1 + h$ mit $h \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \geq 2$. Dann folgt mit Satz 1.7.5
   $$\frac{1}{|a|^n} = (1+h)^n > 1 + nh\,, \quad \text{also} \quad |a^n| = |a|^n < \frac{1}{1+nh}\,, \quad \text{und daher} \quad (a^n)_{n\geq 0} \to 0$$
   nach Beispiel 2 vor Satz 3.2. □
3. Es ist
   $$\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\Big)_{n\geq 1} \to \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \Big(\frac{3n^3+n^2+1}{n^3-7}\Big)_{n\geq 3} \to 3\,.$$
   Beweis. Die Aussagen folgen unmittelbar aus den Sätzen 3.5 und 3.6 mit Hilfe der Rechnungen
   $$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \quad \text{und} \quad \frac{3n^3+n^2+1}{n^3-7} = \frac{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{7}{n^3}}\,. \quad \square$$
4. $(\sqrt[n]{n})_{n\geq 1} \to 1$.
   Beweis. Für $n \geq 3$ gilt nach Satz 1.13
   $$1 \leq \sqrt[n]{n} \ = \ \sqrt[n]{\sqrt{n}\,\sqrt{n}\cdot 1^{n-2}} \ < \ \frac{1}{n}\Big(2\sqrt{n} + n - 2\Big) \ = \ \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n}\,.$$
   Mit Beispiel 1 und Satz 3.7.3 folgt die Behauptung. □
5. Für $p \in \mathbb{Q}_{>0}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ ist $(a^n n^p)_{n\geq 1} \to 0$.
   Beweis. Sei $b \in \mathbb{R}$ mit $|a| < b < 1$. Nach Satz 3.5 und Beispiel 4 folgt
   $$\big(|a|^{1/p}\,(\sqrt[n]{n})\big)_{n\geq 0} \to |a|^{1/p} < b^{1/p}\,, \quad \text{und daher} \quad (\exists m \geq 1)\ (\forall n \geq m)\ \ |a|^{1/p}\,\sqrt[n]{n} < b^{1/p}\,.$$
   Dann ist $(\forall n \geq m)\ \ 0 \leq |a^n n^p| < b^n$. Nach Beispiel 2 ist $(b^n)_{n\geq 0} \to 0$ daher auch $(a^n n^p)_{n\geq 1} \to 0$ nach Satz 3.2.3. □

3.3. Monotone Folgen, Intervallschachtelungen und Zifferndarstellungen

Satz 3.8 (Hauptkriterium für monotone Folgen)**.** *Jede monotone und beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$ *ist konvergent. Genauer:*

$(a_n)_{n\geq 0}$ *monoton wachsend* $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\geq 0} \to \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
$(a_n)_{n\geq 0}$ *monoton fallend* $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\geq 0} \to \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Beweis. Sei zuerst $(a_n)_{n\geq 0}$ monoton wachsend und $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Wir müssen zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \geq 0)\ (\forall n \geq n_0)\ \ |a_n - a| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass $a - \varepsilon < a_{n_0}$, und für alle $n \geq n_0$ ist $a_{n_0} \leq a_n \leq a$, also $|a_n - a| = a - a_n \leq a - a_{n_0} < \varepsilon$.

Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ monoton fallend, so ist $(-a_n)_{n\geq 0}$ monoton wachsend, und mit dem eben Gezeigten und Satz 1.15 folgt $(-a_n)_{n\geq 0} \to \sup\{-a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = -\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, also $(a_n)_{n\geq 0} \to \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. □

Satz und Definition 3.9 (Intervallschachtelung)**.** *Sei* $(a_n)_{n\geq 0}$ *eine monoton wachsende und* $(b_n)_{n\geq 0}$ *eine monoton fallende Folge in* $\mathbb{R}$*, so dass*

$$(\forall n\in\mathbb{N}_0)\quad a_n\leq b_n \quad \textit{und} \quad (b_n-a_n)_{n\geq 0}\to 0\,.$$

Dann gibt es genau ein $z\in\mathbb{R}$*, so dass* $(\forall n\in\mathbb{N}_0)$ $z\in[a_n,\,b_n]$*. Es ist*

$$z=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n\,.$$

Man nennt die Folge $\big([a_n,b_n]\big)_{n\geq 0}$ eine *Intervallschachtelung* und z die durch diese Intervallschachtelung bestimmte Zahl.

Beweis. Es ist $(\forall n\in\mathbb{N}_0)$ $a_0\leq a_n\leq b_n\leq b_0$, mit Satz 3.8 folgt

$$(a_n)_{n\geq 0}\to z_1=\sup\{a_n\mid n\in\mathbb{N}_0\}\,,\quad (b_n)_{n\geq 0}\to z_2=\inf\{b_n\mid n\in\mathbb{N}_0\}\,,$$

und es ist $(\forall n\in\mathbb{N}_0)$ $a_n\leq z_1\leq z_2\leq b_n$, also $0\leq z_2-z_1\leq b_n-a_n$. Wegen $(b_n-a_n)_{n\geq 0}\to 0$ folgt $z_1=z_2$. □

Satz und Definition 3.10 (Division mit Rest und g-adische Zifferndarstellung natürlicher Zahlen)**.** *Sei* $g\in\mathbb{N}$*,* $g\geq 2$ *und* $a\in\mathbb{N}_0$*.*

1. *Es gibt eindeutig bestimmte Zahlen* $b,\,r\in\mathbb{N}_0$ *mit* $a=bg+r$ *und* $r<g$*.*

   Man nennt b den Quotienten und r den Rest bei der ganzzahligen Division von a duch g mit Rest.
2. *Es gibt eindeutig bestimmte Zahlen* $d\in\mathbb{N}_0$ *und* $a_0,\,a_1,\,\dots,a_d\in\{0,\dots,g-1\}$*, so dass*

   $$(*)\quad a=a_dg^d+a_{d-1}g^{d-1}+\ldots+a_1g+a_0 \quad \textit{und} \quad [\ \textit{entweder}\ \ d=a_0=0\ \ \textit{oder}\ \ a_d\neq 0\ ].$$

   Ist $a_d\neq 0$*, so folgt* $g^d\leq a<g^{d+1}$*.*

   Gilt $(*)$, so schreibt man $a=(a_da_{d-1}\ldots a_1a_0)_g$ und nennt diese Darstellung die *g-adische Zifferndarstellung* von a. Im Falle $g=10$ (dekadische Darstellung) läßt man die Spezifizierung $(\cdot)_{10.}$ weg.

Beweis. 1. *Existenz.* Induktion nach a. Sei $a\in\mathbb{N}_0$ und gelte die Behauptung für alle $a'\in\mathbb{N}_0$ mit $a'<a$ (Induktionsvoraussetzung). Ist $a<g$, so folgt die Behauptung mit $b=0$ und $r=a$. Sei also $a\geq g$. Dann ist $0\leq a-g<a$ und daher gibt es $b',\,r\in\mathbb{N}_0$ mit $a-g=b'g+r$ und $r<g$. Es folgt $a=(b'+1)g+r$, und mit $b=b'+1$ gilt die Behauptung.

Eindeutigkeit. Seien $b,\,b',\,r,\,r'\in\mathbb{N}_0$ mit $a=bg+r=bg'+r'$, $r<g$ und $r'<g$. Dann folgt $g|b-b'|=|r-r'|<g$, also $|b-b'|=0$, $b=b'$ und $r=r'$.

2. Gilt $(*)$ mit $a_d\neq 0$, so folgt

$$g^d\leq a_dg^d\leq a_dg^d+a_{d-1}g^{d-1}+\ldots+a_0\leq(g-1)(g^d+g^{d-1}+\ldots+1)=g^{d+1}-1<g^{d+1}\,.$$

Wir zeigen Existenz und Eindeutigkeit der Darstellung $(*)$ duch Induktion nach a. Sei $a\in\mathbb{N}_0$, und habe jedes $a'\in\mathbb{N}_0$ mit $a'<a$ eine eindeutige Darstellung $(*)$ (Induktionsvoraussetzung). Ist $a<g$, so ist notwendig $d=0$ (wegen $g^d\leq a$) und $a_0=a$, also nichts zu zeigen. Sei daher im Folgenden $a\geq g$.

Nach 1. ist $a=a'g+a_0$ mit $a',\,a_0\in\mathbb{N}_0$ und $a_0<g$. Wegen $a\geq g$ ist $a'\geq 1$, und wegen $a'<a$ gibt es (nach Induktionsvoraussetzung) Zahlen $d\in\mathbb{N}$ und $a_1,\dots,a_d\in\{0,1,\dots,g-1\}$ mit $a'=a_dg^{d-1}+a_{d-1}g^{d-2}+\ldots+a_2g+a_1$, also $a=a'g+a_0=a_dg^d+a_{d-1}g^{d-1}+\ldots+a_1g+a_0$.

Es bleibt die Eindeutigkeit der Darstellung zu zeigen. Sei also

$$a = a'_{d'}g^{d'} + a'_{d'-1}g^{d'-1} + \ldots + a'_1 g + a'_0 \quad \text{mit} \quad d' \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad a'_0,\, a'_1, \ldots, a'_{d'} \in \{0,\, 1, \ldots, g-1\}\,.$$

Wegen $a \ge g$ ist $d' \ge 1$, und wir setzen $a'' = a'_{d'}g^{d'-1} + a'_{d'-1}g^{d'-2} + \ldots + a'_2 g + a'_1$. Dann ist $a = a'g + a_0 = a''g + a'_0$, und aus der Eindeutigkeit in 1. folgt $a_0 = a'_0$ und $a' = a''$. Wegen $a' < a$ folgt aus der Induktionsvoraussetzung $d = d'$ und $a_i = a'_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, d\}$. □

Beispiele:

$g = 3,\ \ a = 10\colon\ \ 10 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = (101)_3.$

$g = 2,\ \ a = 10\colon\ \ 10 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (1010)_2.$

Satz und Definition 3.11 (g-adische Zifferndarstellung reeller Zahlen)**.** *Sei* $g \in \mathbb{N}$, $g \ge 2$.

1. *Sei* $(a_i)_{i\ge1}$ *eine Folge in* $\{0, 1, \ldots, g-1\}$. *Dann ist*

$$\Big(\Big[\sum_{i=1}^n a_i g^{-i},\ \sum_{i=1}^n a_i g^{-i} + g^{-n}\Big]\Big)_{n\ge0}$$

eine Intervallschachtelung.

2. *Sei* $z \in [0,1)$ *und* $(a_i)_{i\ge1}$ *eine Folge in* $\{0, 1, \ldots, g-1\}$. *Dann sind äquivalent:*

(a) $\displaystyle\Big(\sum_{i=1}^n a_i g^{-i}\Big)_{n\ge0} \to z$ *und* $(\forall m \ge 0)\ (\exists j \ge m)\ \ a_j < g-1\,.$

(b) $\displaystyle(\forall n \in \mathbb{N}_0)\quad \sum_{i=1}^n a_i g^{-i} \le z < \sum_{i=1}^n a_i g^{-i} + g^{-n}\,.$

Eine Folge $(a_i)_{i\ge1}$ in $\{0, 1, \ldots, g-1\}$ mit (a), (b) heißt *g-adische Ziffernfolge* von z.

3. *Sei* $z \in [0,1)$. *Dann gibt es genau eine g-adische Ziffernfolge von z.*

Ist $z \in [0,1)$ und $(a_i)_{i\ge1}$ die g-adische Ziffernfolge von z, so schreibt man

$$z = (0, a_1a_2a_3\ldots)_g\,.$$

Sei nun $z \in \mathbb{R}_{>0}$, $\lfloor z \rfloor = \max\{g \in \mathbb{Z} \mid g \le z\} = (b_db_{d-1}\ldots b_0)_g$ die g-adische Zifferndarstellung von $\lfloor z \rfloor$ und $(a_i)_{i\ge1}$ die g-adische Ziffernfolge von $z - \lfloor z \rfloor$. Dann nennt man $(a_i)_{i\ge1}$ die *g-adische Nachkommafolge* von z. Man schreibt

$$\begin{aligned} z &= (b_db_{d-1}\ldots b_0, a_1a_2a_3\ldots)_g = (b_db_{d-1}\ldots b_0)_g + (0, a_1a_2a_3\ldots)_g \\ &= b_dg^d + b_{d-1}g^{d-1} + \ldots + b_1g + b_0 + \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \ldots + \frac{a_n}{g^n}\Big) \end{aligned}$$

und nennt diese Darstellung die *g-adische Ziffernentwicklung* von z. Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$z_n \;=\; b_dg^d + b_{d-1}g^{d-1} + \ldots + b_1g + b_0 + \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \ldots + \frac{a_n}{g^n} \;=\; \lfloor z \rfloor + \sum_{i=1}^n a_i g^{-i}$$

die *n-te g-adische Näherung* von z.

Die Folge $\big([z_n, z_n + g^{-n}]\big)_{n\ge0}$ *ist eine Intervallschachtelung, und z ist die dadurch bestimmte Zahl.*

4. *Sei* $z \in \mathbb{R}_{>0}$ *und* $(a_i)_{i\geq 1}$ *die* g*-adische Nachkommafolge von* z*. Dann gilt*:

$$z \in \mathbb{Q} \iff (\exists k,\, l \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq k) \quad a_n = a_{n+l}\,.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so sagt man, die g-adische Ziffernentwicklung von z ist *schließlich-periodisch* mit Periode $(a_k a_{k+1} \ldots a_{k+l-1})$ und schreibt die g-adische Ziffernentwicklung von z in der Form

$$z = (b_d b_{d-1} \ldots b_0, a_1 a_2 a_3 \ldots)_g = (b_d b_{d-1} \ldots b_0, a_1 \ldots a_{k-1} \overline{a_k a_{k+1} \ldots a_{k+l-1}})_g\,.$$

Man sagt, die g-adische Ziffernentwicklung von z *bricht ab*, wenn sie schließlich-periodisch mit der Periode (0) ist. Man schreibt dann

$$z = (b_d b_{d-1} \ldots b_0, a_1 \ldots a_{k-1}\overline{0})_g = (b_d b_{d-1} \ldots b_0, a_1 \ldots a_{k-1})_g\,.$$

Spezialfälle: Statt "g-adisch" sagt man im Falle $g = 2$ *dyadisch* und im Falle $g = 10$ *dekadisch*. Im Falle $g = 10$ läßt man den Index $(\cdot)_{10}$ weg.

Beweis. 1. Für $n \geq 0$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} \;\leq\; \sum_{i=1}^{n+1} a_i g^{-i}, \quad \text{also} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i}\right)_{n\geq 0} \quad \text{monoton wachsend}\,,$$

und

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i g^{-i} + g^{-(n+1)} \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + (g-1)g^{-n-1} + g^{-n-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + g^{-n}\,,$$

also

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + g^{-n}\right)_{n\geq 0} \quad \text{monoton fallend}\,.$$

Wegen

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + g^{-n}\right) - \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} \;=\; g^{-n} \;\to\; 0$$

sind die Bedingungen für eine Intervallschachtelung erfüllt.

2. Für $k > m \geq -1$ ist

$$\sum_{i=m+1}^{k} (g-1)g^{-i} \;=\; (g-1)g^{-(m+1)} \sum_{\nu=0}^{k-m-1} (g^{-1})^{\nu} \;=\; (g-1)g^{-(m+1)}\frac{g^{-k+m}-1}{g^{-1}-1} = g^{-m} - g^{-k}\,.$$

(a) $\Rightarrow$ (b) Wegen

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i}\right)_{n\geq 0} \;\to\; z$$

ist z nach Satz 3.9 die durch die Intervallschachtelung in 1. bestimmte Zahl. Daher folgt

$$(\forall n \geq 0) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} \;\leq\; z \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + g^{-n}\,,$$

und wir müssen zeigen:

$$(\forall n \geq 0) \;\; z \;<\; \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + g^{-n}\,.$$

Sei $n \geq 0$. Dann gibt es ein $j \geq n+1$ mit $a_j < g-1$, und es folgt

$$\begin{aligned} z \;\leq\; \sum_{i=1}^{j} a_i g^{-i} + g^{-j} \;&<\; \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + \sum_{i=n+1}^{j} (g-1) g^{-i} + g^{-j} \\ &=\; \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + (g^{-n} - g^{-j}) + g^{-j} \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + g^{-n}\,. \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Nach (b) ist z die durch die Intervallschachtelung in 1. definierte Zahl, und daher folgt

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i}\Big)_{n\geq 0} \to z$$

nach Satz 3.9. Wir nehmen nun an, es sei $m \geq 0$, so dass $(\forall j \geq m)\;\; a_j = g-1$. Für $n > m$ ist dann

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} = \sum_{i=1}^{m} a_i g^{-i} + \sum_{i=m+1}^{n} (g-1) g^{-i} = \sum_{i=1}^{m} a_i g^{-i} + g^{-m} - g^{-n}$$

und daher

$$z = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} = \sum_{i=1}^{m} a_i g^{-i} + g^{-m}\,,$$

ein Widerspruch.

3. Wir müssen zeigen: Es gibt genau eine Folge $(a_i)_{i\geq 1}$ in $\{0,1,\ldots,g-1\}$, welche die Ungleichungen in 2.(b) erfüllt. Dazu zeigen wir:

Ist $n \in \mathbb{N}_0$ und sind $a_1,\ldots,a_n \in \{0,1,\ldots,g-1\}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} \;\leq\; z \;<\sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + g^{-n}\,, \quad \text{also} \quad 0 \;\leq z' = z - \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} < g^{-n}\,,$$

so gibt es genau ein $a_{n+1} \in \{0,1,\ldots,g-1\}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i g^{-i} \;\leq\; z \;<\sum_{i=1}^{n+1} a_i g^{-i} + g^{-(n+1)}\,, \quad \text{also} \quad z' \in \Big[a_{n+1} g^{-(n+1)},\, (a_{n+1}+1) g^{-(n+1)}\Big]\,.$$

Wegen $z' \in [0, g^{-n})$ und $0 = 0 \cdot g^{-(n+1)} < 1 \cdot g^{-(n+1)} < \ldots < (g-1) g^{-(n+1)} < g \cdot g^{-(n+1)} = g^{-n}$ ist das aber offensichtlich.

4. Wir können $z \in (0,1)$, also $z = (0, a_1 a_2 \ldots)_g \neq 0$ annehmen.

Seien zuerst $k,\, l \in \mathbb{N}$, so dass $(\forall n \geq k)\;\; a_n = a_{n+l}$. Dann gilt zunächst:

A. $(\forall j \in \mathbb{N}_0)\; (\forall n \geq k)\;\; a_n = a_{n+jl}$.

Beweis von **A.** Induktion nach j. Für $j = 0$ ist nichts zu zeigen.

$j \geq 0,\;\; j \to j+1$: Sei $n \geq k$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $a_n = a_{n+jl}$, und wegen $n + jl \geq k$ folgt $a_{n+jl} = a_{n+jl+l} = a_{n+(j+1)l}$. Damit ist **A** gezeigt.

Zu jedem $n \geq k$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $j,\, \nu \in \mathbb{N}_0$ mit $\nu < l$, so dass $n - k = jl + \nu$, und nach **A.** ist dann $a_n = a_{k+\nu+jl} = a_{k+\nu}$. Nun ist

$$\Bigg(\sum_{i=1}^{k+l-1+Jl} a_i g^{-i}\Bigg)_{J\geq 0} \quad \text{Teilfolge von} \quad \Bigg(\sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i}\Bigg)_{n\geq 0}\,, \quad \text{also} \quad \Bigg(\sum_{i=1}^{k+l-1+Jl} a_i g^{-i}\Bigg)_{J\geq 0} \;\to\; z\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+l-1+Jl} a_i g^{-i} &= \sum_{i=1}^{k-1} a_i g^{-i} + \sum_{j=0}^{J}\sum_{\nu=0}^{l-1} a_{k+\nu+lj}\, g^{-k-\nu-lj} = \sum_{i=1}^{k-1} a_i g^{-i} + \sum_{j=0}^{J}\sum_{\nu=0}^{l-1} a_{k+\nu}\, g^{-k-\nu-lj} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} a_i g^{-i} + \Big(\sum_{j=0}^{J} g^{-lj}\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{l-1} a_{k+\nu} g^{-k-\nu}\Big)\end{aligned}$$

und

$$\Big(\sum_{j=0}^{J} g^{-lj}\Big)_{J\ge 0} = \Big(\frac{g^{-l(J+1)}-1}{g^{-l}-1}\Big)_{J\ge 0} \;\to\; \frac{-1}{g^{-l}-1} \;\in \mathbb{Q}$$

folgt $z \in \mathbb{Q}$.

Sei nun $z \in \mathbb{Q}$, $z = \frac{r}{q}$ mit $r, q \in \mathbb{N}$ und $r < q$. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(a_n)_{n\ge 1}$ und $(r_n)_{n\ge 0}$ in $\mathbb{N}_0$ durch $r_0 = r$, und

$$(\forall n \ge 0) \quad \big[\, g r_n = a_{n+1} q + r_{n+1} \quad \text{mit} \quad r_{n+1} < q \,\big], \quad \text{also} \quad a_{n+1} = \frac{g r_n - r_{n+1}}{q} \le \frac{g r_n}{q} < g\,.$$

Wir werden zeigen: Die Folge $(a_n)_{n\ge 1}$ ist die g-adische Ziffernfolge von z, und sie ist schließlich-periodisch. Dafür beweisen wir zuerst:

B. Es ist

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \quad z = \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + \frac{r_n}{q}\, g^{-n}\,.$$

Beweis von **B.** Induktion nach n. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen.

$n \ge 0$, $n \to n+1$: Es ist

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + \frac{r_n}{q}\, g^{-n} = \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + \frac{g^{-n}}{q}\Big(\frac{a_{n+1}q}{g} + \frac{r_{n+1}}{g}\Big) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i g^{-i} + \frac{r_{n+1}}{q}\, g^{-(n+1)}\,.$$

Damit ist **B** gezeigt, und daraus folgt

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} \;\le\; z \;<\; \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} + g^{-n}\,.$$

Daher ist $(a_i)_{i\ge 1}$ die g-adische Ziffernfolge von z. $(r_n)_{n\ge 1}$ ist eine Folge in $\{0, 1, \ldots, g-1\}$, und daher gibt es $k, l \in \mathbb{N}$ mit $r_k = r_{k+l}$. Wir zeigen nun:

C. $(\forall n \ge k)$ $r_n = r_{n+l}$.

Beweis von **C.** Induktion nach n. Für $n = k$ ist nichts zu zeigen.

$n \ge k$, $n \to n+1$: Es ist $g r_n = a_{n+1} q + r_{n+1}$, und $g r_n = g r_{n+l} = a_{n+l+1} q + r_{n+l+1}$, und wegen der Eindeutigkeit in Satz 3.10 folgt $r_{n+1} = r_{n+l+1}$. Damit ist **C** gezeigt.

Sei nun $n \ge k+1$. Nach **C** ist dann $r_{n-1} = r_{n+l-1}$. Wegen $g r_{n-1} = a_n q + r_n$ und $g r_{n-1} = g r_{n+l-1} = a_{n+l} q + r_{n+l}$ folgt (wieder wegen der Eindeutigkeit in Satz 3.10) $a_n = a_{n+l}$. Daher ist die Folge $(a_i)_{i\ge 1}$ schließlich-periodisch. □

3.4. Allgemeine Potenzen und Euler'sche Zahl

Satz und Definition 3.12.

1. *Sei* $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $r \in \mathbb{R}$ *und* $(r_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge in* $\mathbb{Q}$ *mit* $(r_n)_{n\geq 0} \to r$. *Dann ist die Folge* $(a^{r_n})_{n\geq 0}$ *konvergent, und ihr Grenzwert hängt nur von* a *und* r *ab.*

   Man definiert
$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}\,.$$

2. *Seien* $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ *und* $r, s \in \mathbb{R}$.
   (a) $a^{r+s} = a^r a^s$, $a^{-r} = (a^{-1})^r$, $a^r b^r = (ab)^r$ *und* $(a^r)^s = a^{rs}$.
   (b) $a < b \ \wedge\ r > 0 \implies a^r < b^r$; $\quad a < b \ \wedge\ r < 0 \implies a^r > b^r$.
   (c) $r < s \ \wedge\ a > 1 \implies a^r < a^s$; $\quad r < s \ \wedge\ a < 1 \implies a^r > a^s$.
3. (Lipschitz-Eigenschaft) *Seien* $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$, $a, b \in (M^{-1}, M)$ *und* $r, s \in (-M, M)$. *Dann ist*
$$|a^r - b^s| \leq M^{M+4}\big(|a-b| + |r-s|\big)\,.$$
4. *Sei* $(a_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge in* $\mathbb{R}_{>0}$, $(r_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge in* $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $r \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\geq 0} \to a$ *und* $(r_n)_{n\geq 0} \to r$. *Dann folgt*
$$\big(a_n^{r_n}\big)_{n\geq 0} \to a^r\,.$$

Beweis. **A.** *Beweis von* 3. *für* $r, s \in \mathbb{Q}$. Seien $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$, $a, b \in (M^{-1}, M)$ und $r, s \in (-M, M) \cap \mathbb{Q}$. Wir zeigen:
$$\mathbf{1)}\quad |a^r - a^s| \leq M^{M+1}|r-s|\,; \qquad \mathbf{2)}\quad |a^s - b^s| \leq M^{M+4}|a-b|$$
[dann folgt $|a^r - b^s| \leq |a^r - a^s| + |a^s - b^s| \leq M^{M+4}\big(|a-b| + |r-s|\big)$].

Behauptung **a.** Sei $t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und $a \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Dann folgt $a^t - 1 \leq ta^{t+1}$.

Ist $t \geq 1$, so folgt trivialerweise $a^t - 1 < a^t \leq ta^{t+1}$. Sei also $t < 1$, $t = \frac{p}{n}$ mit $p \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ und $p < n$. Dann folgt mit Satz 1.13
$$a^t = \sqrt[n]{a^p \cdot 1^{n-p}} \leq \frac{1}{n}\big(pa + n - p\big) = 1 + \frac{p}{n}(a-1) = 1 + t(a-1) < 1 + ta^{t+1}\,.$$
Damit ist Behauptung **a.** gezeigt.

Als Nächstes beweisen wir **1)**. Sei zunächst $a \in [1, M)$ und (ohne Einschränkung) $r \geq s$, $t = r - s$. Mit Hilfe von **a.** folgt dann
$$|a^r - a^s| = a^s(a^t - 1) \leq a^s t a^{t+1} = ta^{r+1} \leq |r-s|\,M^{M+1}\,.$$
Ist $a \in (M^{-1}, 1)$, so ist $a^{-1} \in (1, M)$ und daher $|a^r - a^s| = |(a^{-1})^{-r} - (a^{-1})^{-s}| \leq |r-s|\,M^{M+1}$ auf Grund des bereits Gezeigten.

Für den Beweis von **2)** sei zuerst $s > 0$, $s = \frac{n}{p}$ mit $n, p \in \mathbb{N}$. Dann folgt
$$\begin{aligned}|a^s - b^s| &= \big|\big(\sqrt[p]{a}\big)^n - \big(\sqrt[p]{b}\big)^n\big| = \big|\sqrt[p]{a} - \sqrt[p]{b}\big| \sum_{j=0}^{n-1} \big(\sqrt[p]{a}\big)^{n-1-j}\big(\sqrt[p]{b}\big)^j \\ &\leq \big|\sqrt[p]{a} - \sqrt[p]{b}\big| \sum_{j=0}^{n-1} M^{\frac{n-1-j}{p}} M^{\frac{j}{p}} < \big|\sqrt[p]{a} - \sqrt[p]{b}\big|\, nM^M\end{aligned}$$

und

$$|a-b| = \big|\big(\sqrt[p]{a}\big)^p - \big(\sqrt[p]{b}\big)^p\big| = \big|\sqrt[p]{a} - \sqrt[p]{b}\big| \sum_{j=0}^{p-1} \big(\sqrt[p]{a}\big)^{p-1-j} \big(\sqrt[p]{b}\big)^j$$

$$\geq \big|\sqrt[p]{a} - \sqrt[p]{b}\big| \sum_{j=0}^{p-1} \big(M^{-1}\big)^{\frac{p-1-j}{p}} \big(M^{-1}\big)^{\frac{j}{p}} > \big|\sqrt[p]{a} - \sqrt[p]{b}\big| \, \frac{p}{M}\,.$$

Damit erhalten wir

$$|a^s - b^s| \leq |a-b| \, \frac{M}{p} \big(nM^M\big) = M^{M+2} |a-b|\,.$$

Im Falle $s<0$ folgt auf Grund des bereits Gezeigten

$$|a^s - b^s| = \big|(a^{-1})^{-s} - (b^{-1})^{-s}\big| \leq M^{M+2}\big|a^{-1} - b^{-1}\big| = M^{M+2}|ab|^{-1}\,|a-b| \leq M^{M+4}\,|a-b|\,.$$

B. *Beweis von* 1. Wir zeigen zuerst, dass es überhaupt eine Folge $(r_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{Q}$ gibt, so dass $(r_n)_{n\geq 0} \to r$ und $(a^{r_n})_{n\geq 0}$ konvergiert. Sei zuerst $a>1$, $z = r - \lfloor r \rfloor \in [0,1)$ und $(z_n)_{n\geq 0}$ die Folge der 2-adischen Näherungen von z. Dann ist $(\lfloor r \rfloor + z_n)_{n\geq 0}$ eine monoton wachsende Folge mit $(\lfloor r \rfloor + z_n)_{n\geq 0} \to r$. Nach Satz 1.12 ist dann die Folge $(a^{\lfloor r \rfloor + z_n})_{n\geq 0}$ ebenfalls monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Ist $a<1$, so gibt es nach dem eben Gezeigten eine Folge $(r_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{Q}$ mit $(r_n)_{n\geq 0} \to -r$, so dass $\big((a^{-1})^{r_n}\big)_{n\geq 0}$ konvergiert. Dann ist $(-r_n)_{n\geq 0} \to r$, und $(a^{-r_n})_{n\geq 0}$ konvergent.

Seien nun $(r_n)_{n\geq 0}$ und $(s_n)_{n\geq 0}$ Folgen in $\mathbb{Q}$ mit $(r_n)_{n\geq 0} \to r$, $(s_n)_{n\geq 0} \to r$ und $(a^{r_n})_{n\geq 0} \to z \in \mathbb{R}$. Sei $M \in \mathbb{N}$ mit $a \in (M^{-1}, M)$ und $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ $r_n,\, s_n \in (-M, M)$. Dann folgt

$$\big|a^{s_n} - z\big| \leq \big|a^{s_n} - a^{r_n}\big| + \big|a^{r_n} - z\big| \leq M^{M+4}\,|s_n - r_n| + \big|a^{r_n} - z\big| \;\to\; 0\,,$$

also auch $(a^{s_n})_{n\geq 0} \to z$.

C. *Beweis von* 3. Seien $M \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $a,\, b \in (M^{-1}, M)$ und $r,\, s \in (-M, M)$. Seien $(r_n)_{n\geq 0}$, $(s_n)_{n\geq 0}$ Folgen in $\mathbb{Q}$, $(r_n)_{n\geq 0} \to r$ und $(s_n)_{n\geq 0} \to s$. Dann

$$(\exists k \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \geq k)\ \ r_n,\, s_n \in (-M, M)\,, \quad \text{also} \quad |a^{r_n} - b^{s_n}| \leq M^{M+4}\big(|a-b| + |r_n - s_n|\big)\,.$$

Wegen $\big(|a^{r_n} - b^{s_n}|\big)_{n\geq k} \to |a^r - b^s|$ und $(|r_n - s_n|)_{n\geq k} \to |r-s|$ folgt die Behauptung.

D. *Beweis von* 4. Sei $M \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ mit $a \in (M^{-1}, M)$ und $r \in (-M, M)$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$, so dass $(\forall n \geq k)$ $a_n \in (M^{-1}, M)$, $r_n \in (-M, M)$, und daher

$$|a_n^{r_n} - a^r| \leq M^{M+4}\big(|a_n - a| + |r_n - r|\big) \;\to\; 0\,, \quad \text{also} \quad (a_n^{r_n})_{n\geq 0} \;\to\; a^r\,.$$

E. *Beweis von* 2. Seien $(r_n)_{n\geq 0}$, $(s_n)_{n\geq 0}$ Folgen in $\mathbb{Q}$ mit $(r_n)_{n\geq 0} \to r$ und $(s_n)_{n\geq 0} \to s$, also $(a^{r_n})_{n\geq 0} \to a^r$, $(b^{r_n})_{n\geq 0} \to b^r$ und $(a^{s_n})_{n\geq 0} \to a^s$.

(a) Es ist $(r_n + s_n)_{n\geq 0} \to r+s$, also $(a^{r_n + s_n})_{n\geq 0} \to a^{r+s}$, $(a^{r_n}a^{s_n})_{n\geq 0} \to a^r a^s$, und $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ $a^{r_n}a^{s_n} = a^{r_n+s_n}$ nach Satz 1.12. Daher folgt $a^{r+s} = a^r a^s$. Insbesondere folgt $a^r a^{-r} = a^0 = 1$, also $a^{-r} = (a^{-1})^r$.

Es ist $(a^{r_n}b^{r_n})_{n\geq 0} \to a^r b^r$, $\big((ab)^{r_n}\big)_{n\geq 0} \to (ab)^r$, und $(\forall n \geq 0)$ $a^{r_n}b^{r_n} = (ab)^{r_n}$ nach Satz 1.12. Daher folgt $a^r b^r = (ab)^r$.

Aus $(a^{r_n})_{n\geq 0} \to a^r$ folgt $\big((a^{r_n})^{s_n}\big)_{n\geq 0} \to (a^r)^s$ nach 4., und aus $(r_n s_n)_{n\geq 0} \to rs$ folgt $(a^{r_n s_n})_{n\geq 0} \to a^{rs}$. Nun ist $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ $(a^{r_n})^{s_n} = a^{r_n s_n}$ nach Satz 1.12, und daher $(a^r)^s = a^{rs}$.

(b) Sei $a<b$, also $a^{-1}b > 1$, $r>0$ und $\varepsilon \in (0, r) \cap \mathbb{Q}$. Dann $(\exists k \in \mathbb{N}_0)$ $(\forall n \geq k)$ $r_n \geq \varepsilon$, also $(a^{-1}b)^{r_n} \geq (a^{-1}b)^{\varepsilon} > 1$ nach Satz 1.12. Wegen $\big((a^{-1}b)^{r_n}\big)_{n\geq k} \to (a^{-1}b)^r = (a^r)^{-1}b^r$

folgt $(a^r)^{-1}b^r \geq (a^{-1}b)^\varepsilon > 1$ und daher auch $a^r < b^r$. Ist $a < b$ und $r < 0$, so folgt $(a^r)^{-1} = a^{-r} < b^{-r} = (b^r)^{-1}$ und daher $b^r < a^r$.

(c) Seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{Q}$ mit $r < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < s$ (siehe Satz 1.10). Dann

$$(\exists k \geq 0)\ (\forall n \geq k)\ \ r_n < \varepsilon_1 \ \wedge\ s_n > \varepsilon_2\,, \quad \text{also} \quad a^{r_n} < a^{\varepsilon_1} < a^{\varepsilon_2} < a^{s_n}$$

nach Satz 1.12, und es folgt $a^r \leq a^{\varepsilon_1} < a^{\varepsilon_2} \leq a^s$. □

Satz und Definition 3.13 (Euler'sche Zahl)**.**

1. *Sei* $z \in \mathbb{R}$ *und* $k \in \mathbb{N}_0$ *mit* $k > -z$. *Dann ist*

$$\Big(\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n\Big)_{n \geq k}$$

eine (im Falle $z \neq 0$ *streng) monoton wachsende Folge, und*

$$\Big(\Big[\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n,\ \big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n+1}\Big]\Big)_{n \geq 1}$$

ist eine Intervallschachtelung.

Die Zahl

$$\mathsf{e} = \lim_{n \to \infty} \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n = 2,71828\ldots \quad \text{heißt} \ \textit{Euler'sche Zahl}.$$

2. *Sei* $z \in \mathbb{R}$ *und* $(x_n)_{n \geq 0}$ *eine Folge in* $\mathbb{R}^\times$ *mit* $(x_n)_{n \geq 0} \to 0$. *Sei* $k \in \mathbb{N}$, *so dass* $(\forall n \geq k)\ \ 1 + zx_n > 0$. *Dann folgt*

$$\big((1 + zx_n)^{1/x_n}\big)_{n \geq k} \to \mathsf{e}^z\,. \quad \textit{Insbesondere}: \ \Big(\big(1 + \frac{z}{n}\big)^n\Big)_{n \geq 1} \to \mathsf{e}^z\,.$$

Beweis. 1. Im Falle $z = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $z \neq 0$. Für $n \geq k$ ist nach Satz 1.13

$$\sqrt[n+1]{\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n \cdot 1} \ < \ \frac{1}{n+1}\Big[n\Big(1 + \frac{z}{n}\Big) + 1\Big] \ = \ \frac{1}{n+1}(n + 1 + z) = 1 + \frac{z}{n+1}$$

und daher

$$\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n < \Big(1 + \frac{z}{n+1}\Big)^{n+1}, \quad \text{also} \quad \Big(\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n\Big)_{n \geq k} \quad \text{streng monoton wachsend}.$$

Es bleibt zu zeigen:

$$\Big(\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1}\Big)_{n \geq 1} \quad \text{monoton fallend}, \quad \text{und} \quad \Big(\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1} - \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n\Big)_{n \geq 1} \ \to \ 0\,.$$

Es ist

$$\Big(\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}\Big)_{n \geq 1} = \Big(\Big(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\Big)^{n+1}\Big)_{n \geq 1} \quad \text{streng monoton wachsend},$$

und daher ist

$$\Big(\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1}\Big)_{n \geq 1} \quad \text{streng monoton fallend}.$$

Insbesondere folgt

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n < \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1} \leq 4$$

und daher
$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1} - \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n} = \frac{1}{n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n} \;\to\; 0\,.$$

2. Im Falle $z = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $z \neq 0$ und $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\;\; y_n = zx_n$. Dann ist $(y_n)_{n\geq 0} \to 0$, und wir können annehmen, dass $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\;\; |y_n| < 1$. Wir zeigen
$$\big((1+y_n)^{1/y_n}\big)_{n\geq 0} \;\to\; \mathsf{e} \quad \big[\text{dann folgt } \;(1+zx_n)^{1/x_n} = (1+y_n)^{z/y_n} = \big((1+y_n)^{1/y_n}\big)^z \;\to\; \mathsf{e}^z\,\big].$$

FALL 1: $(\exists m \in \mathbb{N}_0)\; (\forall n \geq m)\;\; y_n > 0$. Für $n \geq m$ sei $k_n = \lfloor y_n^{-1} \rfloor \in \mathbb{N}$. Dann ist
$$k_n \leq \frac{1}{y_n} < k_n + 1\,, \quad \text{also} \quad \Big(1+\frac{1}{k_n+1}\Big)^{k_n} \leq (1+y_n)^{1/y_n} \leq \Big(1+\frac{1}{k_n}\Big)^{k_n+1}.$$
Wegen
$$\Big(1+\frac{1}{k_n}\Big)^{k_n+1} \;\to\; \mathsf{e} \quad \text{und} \quad \Big(1+\frac{1}{k_n+1}\Big)^{k_n} = \Big(1+\frac{1}{k_n+1}\Big)^{k_n+1}\Big(1+\frac{1}{k_n+1}\Big)^{-1} \;\to\; \mathsf{e}$$
folgt $\big((1+y_n)^{1/y_n}\big)_{n\geq 0} \;\to\; \mathsf{e}$.

FALL 2: $(\exists m \in \mathbb{N}_0)\; (\forall n \geq m)\;\; y_n < 0$. Für $n \geq m$ sei
$$u_n = \frac{-y_n}{1+y_n} \in \mathbb{R}_{>0}\,, \quad \text{also} \quad (u_n)_{n\geq 0} \to 0\,, \quad y_n = \frac{-u_n}{1+u_n} \quad \text{und} \quad 1+y_n = \frac{1}{1+u_n}\,.$$
Damit folgt (nach FALL 1)
$$(1+y_n)^{1/y_n} = (1+u_n)^{(1+u_n)/u_n} = (1+u_n)\,(1+u_n)^{1/u_n} \;\to\; 1\cdot\mathsf{e} = \mathsf{e}\,.$$

FALL 3: Die Mengen $T_1 = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid y_n > 0\}$ und $T_2 = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid y_n < 0\}$ sind beide unendlich. Nach FALL 1 und FALL 2 folgt $\big((1+y_n)^{1/y_n}\big)_{n\in T_1} \;\to\; \mathsf{e}$ und $\big((1+y_n)^{1/y_n}\big)_{n\in T_2} \;\to\; \mathsf{e}$, und nach Satz 3.4 folgt $\big((1+y_n)^{1/y_n}\big)_{n\geq 0} \;\to\; \mathsf{e}$. □

3.5. Bestimmte Divergenz

Definition 3.4. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent* gegen

- ∞, $\quad (a_n)_{n\geq 0} \to \infty$, wenn $(\forall M \in \mathbb{R})\; (\exists n_0 \in \mathbb{N})\; (\forall n \geq n_0)\quad a_n > M$.
- $-\infty$, $\quad (a_n)_{n\geq 0} \to -\infty$, wenn $(\forall M \in \mathbb{R})\; (\exists n_0 \in \mathbb{N})\; (\forall n \geq n_0)\quad a_n < M$.

Bemerkungen: Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

1. $(a_n)_{n\geq 0} \to \infty \iff (\forall M \in \mathbb{R})\; (\exists n_0 \in \mathbb{N})\; (\forall n \geq n_0)\quad a_n \geq M$.
2. $(a_n)_{n\geq 0} \to \infty \iff (-a_n)_{n\geq 0} \to -\infty$.

Satz 3.14 (Rechnen mit bestimmt divergenten Folgen)**.** *Seien* $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ *Folgen in* $\mathbb{R}$.

1. $(a_n)_{n\geq 0}$ *monoton wachsend und nicht beschränkt* $\implies (a_n)_{n\geq 0} \to \infty$.
   Insbesondere gilt stets:
   $(a_n)_{n\geq 0}$ *monoton wachsend* $\implies (a_n)_{n\geq 0} \to \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
2. $(a_n)_{n\geq 0} \to \infty \implies (\exists k \in \mathbb{N}_0)\; (\forall n \geq k)\;\; a_n > 0 \;\wedge\; (a_n^{-1})_{n\geq k} \to 0$.
3. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\;\; a_n > 0 \;\wedge\; (a_n)_{n\geq 0} \to 0 \implies (a_n^{-1})_{n\geq 0} \to \infty$.
4. $(a_n)_{n\geq 0} \to \infty \;\wedge\; (\forall n \in \mathbb{N}_0)\; a_n \leq b_n \implies (b_n)_{n\geq 0} \to \infty$.
5. Satz 3.4 *gilt auch für* $a = \pm\infty$.

Beweis. 1. Sei $(a_n)_{n\ge0}$ monoton wachsend und nicht beschränkt, und sei $M\in\mathbb{R}$. Dann gibt es ein $n_0\in\mathbb{N}$, so dass $a_{n_0}>M$, und für alle $n\ge n_0$ ist dann $a_n\ge a_{n_0}>M$.

2. Sei $(a_n)_{n\ge0}\to\infty$. Dann gibt es nach Definition ein $k\in\mathbb{N}_0$, so dass $(\forall n\ge k)\;\; a_n>0$. Sei nun $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es ein $n_1\in\mathbb{N}_0$, so dass $(\forall n\ge n_1)\;\; a_n>\varepsilon^{-1}$. Ist nun $n_0=\max(n_1,k)$ und $n\ge n_0$, so folgt $|a_n^{-1}|=a_n^{-1}<\varepsilon$.

3. Sei $(\forall n\in\mathbb{N}_0)\;\; a_n>0\;\wedge\;(a_n)_{n\ge0}\to0$. Sei $M\in\mathbb{R}$ und $M_1=\max(M,1)$. Dann gibt es ein $n_0\in\mathbb{N}$, so dass $(\forall n\ge n_0)\;\; a_n<M_1^{-1}$, also auch $(\forall n\ge n_0)\;\; a_n^{-1}>M_1\ge M$.

4. Sei $(a_n)_{n\ge0}\to\infty\;\wedge\;(\forall n\in\mathbb{N}_0)\;\; a_n\le b_n$. Ist $M\in\mathbb{R}$, so gibt es ein $n_0\in\mathbb{N}_0$, so dass $(\forall n\ge n_0)\;\; a_n>M$, und dann folgt $(\forall n\ge n_0)\;\; b_n\ge a_n>M$.

5. Sei $(a_n)_{n\ge0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Es genügt, den Fall $a=\infty$ zu betrachten, und (wegen 3.) müssen wir zeigen:

A. Ist $(a_n)_{n\ge0}\to\infty$ und $(m_k)_{k\ge0}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $(m_k)_{k\ge0}\to\infty$, so ist $(a_{m_k})_{k\ge0}\to\infty$.

B. Ist $\mathbb{N}_0=T_1\cup T_2$ mit unendlichen Teilmengen T_1 und T_2, so dass $(a_n)_{n\in T_1}\to\infty$ und $(a_n)_{n\in T_2}\to\infty$, so folgt auch $(a_n)_{n\ge0}\to\infty$.

Beweis von **A.** Sei $(a_n)_{n\ge0}\to\infty$, $(m_k)_{k\ge0}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $(m_k)_{k\ge0}\to\infty$, und sei $M\in\mathbb{R}$. Dann gibt es ein $n_0\in\mathbb{N}_0$, so dass $(\forall n\ge n_0)\;\; a_n>M$, und es gibt ein $k_0\in\mathbb{N}_0$, so dass $(\forall k\ge k_0)\;\; m_k\ge n_0$, und daher $(\forall k\ge k_0)\;\; a_{m_k}>M$.

Beweis von **B.** Sei $\mathbb{N}_0=T_1\cup T_2$ mit unendlichen Teilmengen T_1 und T_2, $(a_n)_{n\in T_1}\to\infty$, $(a_n)_{n\in T_2}\to\infty$, und sei $M\in\mathbb{R}$. Dann gibt es $n_1,\,n_2\in\mathbb{N}_0$, so dass für $i\in\{1,2\}$ gilt: Ist $n\in T_i$ und $n\ge n_i$, so folgt $a_n>M$. Ist nun $n_0=\max(n_1,n_2)$, so ist $(\forall n\ge n_0)\;\; a_n>M$. □

Beispiele:

1. $a\in\mathbb{R},\;\; a>1\implies(a^n)_{n\ge0}\to\infty\,.$

   Beweis. Auf Grund von Beispiel 1 nach Satz 3.7 ist $\big((a^{-1})^n\big)_{n\ge0}\to0$, und daher $(a^n)_{n\ge0}\to\infty$ nach Satz 3.14. □

2. $\big(1+\frac12+\frac13+\ldots+\frac1n\big)_{n\ge1}\to\infty\,.$

   Beweis. Die Folge ist monoton wachsend, und für $m\in\mathbb{N}$ ist

$$\sum_{j=1}^{2^m-1}\frac1j\;=\;\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{j=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1}\frac1j\;>\;\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{j=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1}\frac{1}{2^{\mu+1}}\;=\;\frac m2\,.$$

   Daher ist die Folge nicht beschränkt und divergiert gegen ∞. □

3. Es ist

$$\Big(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\Big)_{n\ge1}\;\to\;\mathsf{e}\quad\text{und}\quad\big(\sqrt[n]{n!}\big)_{n\ge1}\;\to\;\infty\,.$$

   Beweis. Sei $n\in\mathbb{N}$. Nach Satz 3.13, angewandt für $\nu\in\{1,\ldots,n-1\}$, folgt

$$\prod_{\nu=1}^{n-1}\Big(1+\frac1\nu\Big)^\nu\;<\;\mathsf{e}^{n-1}\;<\;\prod_{\nu=1}^{n-1}\Big(1+\frac1\nu\Big)^{\nu+1}.$$

   Nun ist

$$\prod_{\nu=1}^{n-1}\Big(1+\frac1\nu\Big)^\nu=\frac{2\cdot3^2\cdot4^3\cdot\ldots\cdot n^{n-1}}{2^2\cdot3^3\cdot4^4\cdot\ldots\cdot(n-1)^n}=\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\quad\text{und}\quad\prod_{\nu=1}^{n-1}\Big(1+\frac1\nu\Big)^{\nu+1}=\frac{n^n}{(n-1)!}\,,$$

also

$$\frac{\mathsf{e}^{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n}} < \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} < \mathsf{e}^{1-\frac{1}{n}}.$$

Auf Grund von Beispiel 4 nach Satz 3.7 ist

$$\left(\frac{\mathsf{e}^{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n}}\right)_{n\geq 1} \to \mathsf{e} \quad \text{und} \quad \left(\mathsf{e}^{1-\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1} \to \mathsf{e}, \quad \text{also auch} \quad \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)_{n\geq 1} \to \mathsf{e}.$$

Insbesondere folgt: $(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0)\ \sqrt[n]{n!} > n$, und daher $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\geq 1} \to \infty$. □

4. $\rho \in \mathbb{R}_{>0} \implies (n^\rho)_{n\geq 1} \to \infty$.
   Beweis. Sei $r \in (0, \rho) \cap \mathbb{Q}$. Dann ist $(\forall n \in \mathbb{N})\ n^{-\rho} < n^{-r}$ und $(n^{-r})_{n\geq 0} \to 0$ auf Grund von Beispiel 1 nach Satz 3.7. Daher ist auch $(n^{-\rho})_{n\geq 0} \to 0$ und $(n^\rho)_{n\geq 1} \to \infty$ nach Satz 3.14. □

Satz 3.15. *Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$.*

1. *Es gibt eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in A mit $(a_n)_{n\geq 0} \to \sup(A)$.*
2. *Es gibt eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in A mit $(a_n)_{n\geq 0} \to \inf(A)$.*
3. *Sei A ein Intervall und $c \in A^\circ$. Dann gibt es eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in $A \cap (-\infty, c)$ und eine monoton wachsene Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ in $A \cap (c, \infty)$ mit*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} [a_n, b_n].$$

Hat A ein Minimum, so kann man $(\forall n \geq 0)\ a_n = \min(A)$ wählen. Hat A ein Maximum, so kann man $(\forall n \geq 0)\ b_n = \max(A)$ wählen.

Beweis. 1. FALL 1: $\sup(A) = \infty$. Sei $a_0 \in A$ beliebig und $(a_n)_{n\geq 0}$ rekursiv definiert wie folgt: Für $n \geq 0$ sei $a_{n+1} \in A$ mit $a_{n+1} \geq \max\{a_n, n+1\}$ (existiert, da $\sup(A) = \infty$). Dann ist $(a_n)_{n\geq 0}$ monoton wachsend, und $(a_n)_{\geq 0} \to \infty$ nach Satz 3.14.4.

FALL 2: $\sup(A) = a < \infty$. Sei $a_0 \in A$ beliebig und $(a_n)_{n\geq 0}$ rekursiv definiert wie folgt: Für $n \geq 0$ sei $a_{n+1} \in A$ mit $a_{n+1} \geq \max\left\{a_n, a - \frac{1}{n}\right\}$. Dann ist $(a_n)_{n\geq 0}$ monoton wachsend, und nach Satz 3.7 folgt $(a_n)_{n\geq 1} \to a$.

2. Nach 1. gibt es eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in $-A$ mit $(a_n)_{n\geq 0} \to \sup(-A)$. Dann ist $(-a_n)_{n\geq 0}$ eine monoton fallende Folge in A mit $(-a_n)_{n\geq 0} \to -\sup(-A) = \inf(A)$.

3. Hat A ein Minimum, so sei $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ a_n = \min(A)$; andernfalls sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine beliebige monoton fallende Folge in $A \cap (-\infty, c)$ mit $(a_n)_{n\geq 0} \to \inf(A)$. Hat A ein Maximum, so sei $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ b_n = \max(A)$; andernfalls sei $(b_n)_{n\geq 0}$ eine beliebige monoton wachsende Folge in $A \cap (c, \infty)$ mit $(b_n)_{n\geq 0} \to \sup(A)$. Dann ist offensichtlich $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ [a_n, b_n] \subset A$. Ist $a = \min(A)$ oder $a = \max(A)$, so ist nach Definition $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ a \in [a_n, b_n]$. Ist $a \in A$ und $\inf(A) < a < \sup(A)$, so gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$, so dass $(\forall n \geq n_1)\ a_n < a$ und $(\forall n \geq n_1)\ b_n > a$. Ist dann $n = \max(n_1, n_2)$, so folgt $a \in [a_n, b_n]$. □

3.6 Häufungswerte

Definition 3.5.

1. Sei X ein normierter Raum, $a \in X$ und $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in X. Man nennt a einen *Häufungswert* von $(a_n)_{n\geq 0}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ von $(a_n)_{n\geq 0}$ gibt mit $(a_{n_k})_{k\geq 0} \to a$.
2. Sei $a = \infty$ oder $a = -\infty$ und $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. a heißt (*uneigentlicher*) *Häufungswert* von $(a_n)_{n\geq 0}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ von $(a_n)_{n\geq 0}$ gibt mit $(a_{n_k})_{k\geq 0} \to a$.

Bemerkung:
a ist (uneigentlicher) Häufungswert von $(a_n)_{n\geq 0}$ $\iff$ $-a$ ist (uneigentlicher) Häufungswert von $(-a_n)_{n\geq 0}$.

Satz 3.16. *Sei X ein normierter Raum, $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in X und $a \in X$. Dann gilt:*

$$a \text{ ist Häufungswert von } (a_n)_{n\geq 0} \iff (\forall U \in \mathcal{U}(a)) \quad |\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n \in U\}| = \infty.$$

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $(a_{n_k})_{k\geq 0} \to a$, und sei $U \in \mathcal{U}(a)$. Dann $(\exists k_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall k \geq k_0)\ a_{n_k} \in U$. Insbesondere ist $|\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n \in U\}| = \infty$.

$\Longleftarrow$: Sei die Folge $(n_k)_{k\geq 0}$ in $\mathbb{N}_0$ rekursiv definiert durch

$$n_0 = 0 \quad \text{und} \quad (\forall k \geq 1)\ \ n_k = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m > n_{k-1} \text{ und } a_m \in B_{1/k}(a)\}\,.$$

Dann ist $(n_k)_{k\geq 0}$ streng monoton wachsend und $(a_{n_k})_{k\geq 0} \to a$. Daher ist a ein Häufungswert von $(a_n)_{n\geq 0}$. □

Satz und Definition 3.17 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $H \subset \overline{\mathbb{R}}$ die Menge der Häufungswerte von $(a_n)_{n\geq 0}$.*

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   (a) $\infty \in H$.
   (b) $(a_n)_{n\geq 0}$ *ist nicht nach oben beschränkt.*
   (c) $(\forall M \in \mathbb{R})\ \ |\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n > M\}| = \infty$.
2. *Sei*
   $$G^* = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}_0 \text{ ist } a_n \geq x\} \quad \textit{und} \quad a^* = \sup(G^*)\,,$$
   $$G_* = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}_0 \text{ ist } a_n \leq x\} \quad \textit{und} \quad a_* = \inf(G_*)\,.$$
   Dann ist $a_* \in H$, $a^* \in H$, und $(\forall a \in H)\ \ a_* \leq a \leq a^*$.
   Man nennt
   $$\liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\,(a_n)_{n\geq 0} = a_* \quad \text{den } \textit{Limes inferior} \quad \text{und}$$
   $$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}\,(a_n)_{n\geq 0} = a^* \quad \text{den } \textit{Limes superior} \quad \text{von} \quad (a_n)_{n\geq 0}\,.$$
3. *Für $n \geq 0$ sei $\alpha_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\} \in [-\infty, \infty)$ und $\beta_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\} \in (-\infty, \infty]$. Dann folgt $(\alpha_n)_{n\geq 0} \to a_*$ und $(\beta_n)_{n\geq 0} \to a^*$*
   [*dabei macht man folgende Konventionen: Ist $\alpha_n = -\infty$ für alle $n \geq 0$, so setzt man $a_* = -\infty$; ist $n_0 \geq 0$ und $\alpha_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \geq n_0$, so betrachtet man an Stelle von $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ das Endstück $(\alpha_n)_{n\geq n_0}$; ist $\beta_n = \infty$ für alle $n \geq 0$, so setzt man $a^* = \infty$; ist $n_0 \geq 0$ und $\beta_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \geq n_0$, so betrachtet man an Stelle von $(\beta_n)_{n\geq 0}$ das Endstück $(\beta_n)_{n\geq n_0}$*].

4. *Für* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *gilt:* $(a_n)_{n\geq 0} \to a \iff a = \underline{\lim}\,(a_n)_{n\geq 0} = \overline{\lim}(a_n)_{n\geq 0} \iff H = \{a\}$.
5. *Ist* $(a_n)_{n\geq 0}$ *beschränkt, so ist* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ *(jede beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$ *besitzt einen Häufungswert in* $\mathbb{R}$*).*

Beweis. 1. (a) $\Rightarrow$ (b) Sei $(a_n)_{n\in T}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $(a_n)_{n\in T} \to \infty$. Dann ist $(a_n)_{n\in T}$ und daher auch $(a_n)_{n\geq 0}$ nicht nach oben beschränkt.

(b) $\Rightarrow$ (c) Wir nehmen an, es gibt ein $M \in \mathbb{R}$, so dass die Menge $T = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n > M\}$ endlich ist. Dann existiert $M_1 = \max\{a_n \mid n \in T\}$, und $\max\{M, M_1\}$ ist eine obere Schranke von $(a_n)_{n\geq 0}$, ein Widerspruch!

(c) $\Rightarrow$ (a) Die Folge $(m_k)_{k\geq 0}$ in $\mathbb{N}_0$ sei rekursiv definiert durch

$$m_0 = 0 \quad \text{und} \quad (\forall k \in \mathbb{N}_0)\;\; m_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > m_k,\; a_n \geq k+1\}\,.$$

Dann ist $(a_{m_k})_{k\geq 0}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $(a_{m_k})_{k\geq 0} \to \infty$.

2. Wir zeigen die Behauptungen für a^* (die für a_* zeigt man in analoger Weise oder durch Übergang zur Folge $(-a_n)_{n\geq 0}$).

FALL 1: $a^* = \infty$. Dann ist für jedes $M \in \mathbb{R}$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n > M\}$ unendlich und daher $\infty \in H$ nach 1.

FALL 2: $a^* = -\infty$. Dann ist $G^* = \emptyset$, das heißt $(\forall M \in \mathbb{R})\;(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\;(\forall n \geq n_0)\;\; a_n < M$. Es ist also $(a_n)_{n\geq 0} \to -\infty$ und daher auch $(a_n)_{n\in T} \to -\infty$ für jede Teilfolge $(a_n)_{n\in T}$ von $(a_n)_{n\geq 0}$. Folglich ist $H = \{-\infty\}$.

FALL 3: $a^* \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen: **1)** $a^* \in H$; **2)** $(\forall a \in H)\;\; a \leq a^*$.

1) Nach Satz 3.16 ist zu zeigen: Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a^* - \varepsilon < a_n < a^* + \varepsilon\}$ unendlich. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es ein $x \in G^*$ mit $x > a^* - \varepsilon$, und daher ist die Menge $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n > x\}$ unendlich. Ist $a^* < y < a^* + \varepsilon$, so ist $y \notin G^*$, und daher ist die Menge $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n > y\}$ endlich. Folglich ist auch die Menge

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a^* - \varepsilon < a_n < a^* + \varepsilon\} \supset \{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n > x\} \setminus \{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n > y\}$$

unendlich.

2) Sei $a \in H$. Wir zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\;\; a \leq a^* + \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist nach Satz 3.16 die Menge $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n > a - \varepsilon\}$ unendlich, also $a - \varepsilon \in G^*$ und daher $a - \varepsilon \leq a^*$.

3. Wir zeigen die Behauptung für a_*. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\alpha_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}$. Dann ist $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ monoton wachsend und daher $(\alpha_n)_{n\geq 0} \to \alpha = \sup\{\alpha_n \mid n \geq 0\}$ nach Satz 3.15. Wir müssen zeigen: **1)** $(\forall x \in G_*)\;\; x \geq \alpha$. **2)** $(\forall x \in \overline{\mathbb{R}})\;\; [\,x > \alpha \;\Rightarrow\; (\exists x_1 < x)\;\; x_1 \in G_*\,]$.

1) Sei $x \in G_*$. Dann ist $T = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n < x\}$ unendlich und daher $a^* \geq \overline{\lim}(a_n)_{n\in T} \geq x$.

2) Sei $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $x > \alpha$ und $x_1 \in (\alpha, x)$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist dann $\alpha_n \leq \alpha < x_1$, also gibt es ein $k_n \geq n$ mit $a_{k_n} < x_1$. Daher ist die Menge $\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k < x_1\}$ unendlich und $x_1 \in G_*$.

4. Nach 2. ist $\big[\,H = \{a\} \iff a_* = a^*\,\big]$. Ist $(a_n)_{n\geq 0} \to a$, so konvergiert bzw. divergiert auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$ gegen a, und daher ist $H = \{a\}$. Es bleibt zu zeigen:

$$\text{Aus } H = \{a\} \text{ (also } a = a^* = a_*) \text{ folgt } (a_n)_{n\geq 0} \to a.$$

FALL 1: $a = \infty$. Dann ist $G_* = \emptyset$ und daher gilt: $(\forall M \in \mathbb{R})\;(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\;(\forall n \geq n_0)\;\; a_n \geq M$, also $(a_n)_{n\geq 0} \to \infty$.

FALL 2: Nach FALL 1, angewandt auf die Folge $(-a_n)_{n\geq 0}$.

FALL 3: $a \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\;\; \{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n \notin [a - \varepsilon, a + \varepsilon]\}$ ist endlich. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $a + \varepsilon \notin G^*$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n > a + \varepsilon\}$ endlich, und wegen $a-\varepsilon \notin G_*$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n < a-\varepsilon\}$ endlich. Daher ist auch die Menge $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n \notin [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\,\}$ endlich.

5. Nach 1. ist $\infty \notin H$, und da auch $(-a_n)_{n\ge 0}$ beschränkt ist, ist auch $-\infty \notin H$. Nach 2. ist aber $H \ne \emptyset$. □

Beispiele:
Für die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\ge1}$ ist $H \subset \overline{\mathbb{R}}$ die Menge der Häufungswerte von $(a_n)_{n\ge1}$, $a_* = \underline{\lim}\,(a_n)_{n\ge1}$ und $a^* = \overline{\lim}\,(a_n)_{n\ge1}$.

1. $a_n = (-1)^n:\ \ H = \{1,-1\},\ \ a_* = -1,\ \ a^* = 1.$
2. $a_n = \big(1+\frac{(-1)^n}{n}\big)^n:\ \ H = \big\{\mathsf{e},\ \frac{1}{\mathsf{e}}\big\},\ \ a_* = \frac{1}{\mathsf{e}},\ \ a^* = \mathsf{e}.$
3.
$$a_n = \begin{cases} 1+2^{-n}\,, & \text{falls} \quad n = 3k\,, \\ 1+(-1)^n n\,, & \text{falls} \quad n = 3k+1\,, \\ 2\,, & \text{falls} \quad n = 3k+2\,. \end{cases}$$
$H = \{-\infty, 1, 2, \infty\},\ \ a_* = -\infty,\ \ a^* = \infty.$

3.7. Vollständigkeitssatz und Normäquivalenzsatz

Satz 3.18. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $(a_k)_{k\ge0}$ eine Cauchyfolge in X und a ein Häufungswert von $(a_k)_{k\ge0}$. Dann folgt $(a_k)_{k\ge0} \to a$.*

Beweis. Wir müssen zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists k_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall k \ge k_0)\ \ \|a_k - a\| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $l \in \mathbb{N}_0$, so dass
$$(\forall m,\, n \ge l)\ \ |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{und sei} \ \ k_0 \ge l, \text{ so dass} \quad \|a_{k_0} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
(nach Satz 3.16). Ist nun $k \ge k_0$, so folgt
$$|a_k - a| \le |a_k - a_{k_0}| + |a_{k_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$
□

Satz 3.19 (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)**.** *$\mathbb{R}$ ist vollständig (das heißt, jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist konvergent).*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\ge0}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Nach Satz 3.2 ist $(a_n)_{n\ge0}$ beschränkt, nach Satz 3.17.5 besitzt $(a_n)_{n\ge0}$ eine Häufungswert $a \in \mathbb{R}$, und nach Satz 3.18 ist $(a_n)_{n\ge0} \to a$. □

Satz 3.20 (Hauptsatz der Konvergenztheorie in $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$.*

1. (Normäquivalenzsatz) *Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*
2. (Satz von der komponentenweisen Konvergenz) *Sei $(\boldsymbol{a}_k)_{k\ge0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\boldsymbol{a}_k = (a_{k,1}, \ldots, a_{k,n})$, und sei $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots a_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:*
$$(\boldsymbol{a}_k)_{k\ge0} \to \boldsymbol{a} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ \ (a_{k,i})_{n\ge0} \to a_i\,.$$
3. (Vollständigkeitssatz) *$\mathbb{R}^n$ ist ein Banachraum.*
4. (Satz von Bolzano-Weierstrass) *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat einen Häufungswert in $\mathbb{R}^n$.*

Auf Grund von 1. gelten die Aussagen 2., 3. und 4. für jede Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Wir zeigen zuerst 2., 3. und 4. für die Maximumsnorm und erst danach 1. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $\boldsymbol{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ der i-te Einheitsvektor.

2. (für $\|\cdot\|_\infty$)

$\Longrightarrow$: Sei $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 0} \to \boldsymbol{a}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$|a_{k,i} - a_i| \leq \max\bigl\{|a_{k,1} - a_1|, \dots, |a_{k,n} - a_n|\bigr\} = \|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}\|_\infty .$$

Aus $(\|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}\|_\infty)_{k\geq 0} \to 0$ folgt daher $(|a_{k,i} - a_i|)_{k\geq 0} \to 0$, also $(a_{k,i})_{k\geq 0} \to a_i$.

$\Longleftarrow$: Wegen

$$\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} (a_{k,i} - a_i)\, \boldsymbol{e}_i$$

und $(\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $(a_{k,i} - a_i)_{k\geq 0} \to 0$ folgt $(\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a})_{k\geq 0} \to \boldsymbol{0}$ (nach Satz 3.5) und daher $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 0} \to \boldsymbol{a}$.

3. (für $\|\cdot\|_\infty$) Sei $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 0}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$, und für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\boldsymbol{a}_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,n})$. Wir zeigen: Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ ist $(a_{k,i})_{k\geq 0}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Nach Satz 3.19 sind dann die Folgen $(a_{k,i})_{k\geq 0}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ konvergent, und nach 2. ist auch $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 0}$ konvergent. Wir müssen zeigen: Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists k_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall k, l \geq k_0)\ \ |a_{k,i} - a_{l,i}| < \varepsilon .$$

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann $(\exists k_0 \in \mathbb{N}_0)$ $(\forall k, l \geq k_0)$ $\|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_l\|_\infty < \varepsilon$. Für alle $k, l \geq k_0$ ist dann auch $|a_{k,i} - a_{l,i}| \leq \|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_l\|_\infty < \varepsilon$.

4. (für $\|\cdot\|_\infty$) Sei $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, und für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\boldsymbol{a}_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,n})$. Wegen $\|\boldsymbol{a}_k\|_\infty = \max\{|a_{k,1}|, \dots, |a_{k,n}|\}$ ist $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 0}$ genau dann beschränkt, wenn die Folgen $(a_{k,i})_{k\geq 0}$ für alle $i \in \{1, \dots n\}$ beschränkt sind. Sei nun $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 0}$ beschränkt. Wir beweisen die Existenz eines Häufungswertes von $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 0}$ durch Induktion nach n.

$n = 1$: Nach Satz 3.17.5.

$n \geq 2$, $n - 1 \to n$: Nach Induktionsvoraussetzung hat die (ebenfalls beschränkte) Folge $\bigl((a_{k,1}, \dots, a_{k,n-1})\bigr)_{k\geq 0}$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ eine in $\mathbb{R}^{n-1}$ konvergente Teilfolge $\bigl((a_{k,1}, \dots, a_{k,n-1})\bigr)_{k\in T}$ (mit einer unendlichen Teilmenge $T \subset \mathbb{N}_0$). Nach Satz 3.17.5 hat die beschränkte Folge $(a_{k,n})_{k\in T}$ in $\mathbb{R}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{k,n})_{k\in T_1}$ (mit einer unendlichen Teilmenge $T_1 \subset T$). Dann ist auch die Folge $\bigl((a_{k,1}, \dots, a_{k,n-1})\bigr)_{k\in T_1}$ konvergent, und nach 2. sind die Folgen $(a_{k,i})_{k\in T_1}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ konvergent. Daher ist (wieder nach 2.) $(\boldsymbol{a}_k)_{k\in T_1}$ eine konvergente Teilfolge von $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 0}$, also besitzt diese Folge einen Häufungswert in $\mathbb{R}^n$.

1. Es genügt, zu zeigen: Jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist zur Maximumsnorm äquivalent.

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Für $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ ist dann

$$\|\boldsymbol{x}\| \ \leq\ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\boldsymbol{e}_i\| \ =\ \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, \|\boldsymbol{e}_i\| \ \leq\ \Bigl(\sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{e}_i\|\Bigr) \|\boldsymbol{x}\|_\infty .$$

Es bleibt daher zu zeigen: $(\exists c \in \mathbb{R}_{>0})$ $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq c\|\boldsymbol{x}\|$. Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen an,

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ (\exists \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n)\ \ \|\boldsymbol{x}_k\|_\infty > k\, \|\boldsymbol{x}_k\| , \quad \text{und wir setzen} \quad \boldsymbol{y}_k = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_k\|_\infty}\, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n .$$

Dann ist $(\forall k \in \mathbb{N})$ $\|\boldsymbol{y}_k\|_\infty = 1$, und nach 4. besitzt die Folge $(\boldsymbol{y}_k)_{k\geq 0}$ eine bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ konvergente Teilfolge. Sei $T \subset \mathbb{N}$ unendlich und $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $(\boldsymbol{y}_k)_{n\in T} \to \boldsymbol{y}$ (bezüglich $\|\cdot\|_\infty$).

Nach Satz 3.2.4 ist dann $\big(\|\boldsymbol{y}_k\|_\infty\big)_{k\in T} \to \|\boldsymbol{y}\|_\infty$, also $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$. Anderseits ist

$$(\forall k \in T) \quad \big|\|\boldsymbol{y}_k\| - \|\boldsymbol{y}\|\big| \;\le\; \|\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}\| \;\le \Big(\sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{e}_i\|\Big)\, \|\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}\|_\infty\,,$$

und wegen $(\|\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}\|_\infty\big)_{k\in T} \to 0$ folgt $(\|\boldsymbol{y}_k\|)_{k\in T} \to \|\boldsymbol{y}\|$. Nun ist aber auch

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \|\boldsymbol{y}_k\| \;=\; \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_k\|_\infty}\, \|\boldsymbol{x}_k\| \;<\; \frac{1}{k}\,, \quad \text{also} \quad (\|\boldsymbol{y}_k\|)_{k\ge 0} \to 0\,,$$

folglich $\|\boldsymbol{y}\| = 0$ und daher $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, im Widerspruch zu $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$. □

Satz 3.21. *Sei X ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann gibt es eine Norm auf X, je zwei Normen auf X sind äquivalent, X ist bezüglich jeder seiner Normen vollständig, und jede beschränkte Folge in X hat einen Häufungswert.*

Beweis. Sei $\dim_{\mathbb{R}}(X) = n$, $\psi\colon X \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus, und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty \circ \psi\colon X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$. Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, und ψ ist eine Isometrie zwischen $(X, \|\cdot\|)$ und $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty$. Daher ist $(X, \|\cdot\|)$ vollständig, und jede beschränkte Folge in X hat einen Häufungswert.

Sei nun $\varphi = \psi^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to X$, und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf X. Dann sind $\|\cdot\|_1 \circ \varphi$ und $\|\cdot\|_2 \circ \varphi$ Normen auf $\mathbb{R}^n$, also äquivalent nach Satz 3.20. Daher gibt es $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ $\|\varphi(\boldsymbol{x})\|_1 \le c_1 \|\varphi(\boldsymbol{x})\|_2 \;\;\wedge\;\; \|\varphi(\boldsymbol{x})\|_2 \le c_1 \|\varphi(\boldsymbol{x})\|_1$. Da φ bijektiv ist, folgt daraus die Äquivalenz von $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. □

3.8. Abzählbarkeit

Definition 3.6. Eine Menge A heißt

- *abzählbar*, wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \to A$ gibt. Jedes solche f heißt eine *Abzählung* von A.
- *höchstens abzählbar*, wenn A endlich oder abzählbar ist.
- *überabzählbar*, wenn A nicht höchstens abzählbar ist.

Satz 3.22. *$A \ne \emptyset$ sei eine Menge.*

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   (a) *A ist höchstens abzählbar.*
   (b) *Es gibt eine injektive Abbildung $f\colon A \to \mathbb{N}_0$.*
   (c) *Es gibt eine surjektive Abbildung $g\colon \mathbb{N}_0 \to A$.*
2. *Sei B eine höchstens abzählbare Menge und $f\colon A \to B$ eine injektive Abbildung. Dann ist auch A höchstens abzählbar.*
   Insbesondere ist jede Teilmenge einer höchstens abzählbaren Menge höchstens abzählbar.
3. *Jede unendliche Menge enthält eine abzählbare Teilmenge.*
4. *Sei $g\colon A \to \mathbb{P}(A)$ eine Abbildung und $C = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$. Dann ist $C \in \mathbb{P}(A)\backslash g(A)$. Insbesondere gilt:*
   (a) *Es gibt keine surjektive Abbildung $g\colon A \to \mathbb{P}(A)$.*
   (b) *Ist A unendlich, so ist $\mathbb{P}(A)$ überabzählbar.*

5. *Ist* $|A| \geq 2$, *so ist die Menge aller Folgen in* A *überabzählbar.*
6. *Das kartesische Produkt endlich vieler höchstens abzählbarer Mengen ist höchstens abzählbar. Insbesondere ist* $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ *abzählbar.*
7. *Sei* $(A_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge höchstens abzählbarer Mengen. Dann ist auch ihre Vereinigungsmenge*
$$A = \bigcup_{n\geq 0} A_n \quad \textit{höchstens abzählbar}.$$
8. *Die Mengen* $\mathbb{Z}$ *und* $\mathbb{Q}$ *sind abzählbar.*
9. *Jedes Intervall von* $\mathbb{R}$ (*und insbesondere* $\mathbb{R}$ *selbst*) *ist überabzählbar. Insbesondere gilt: Für jedes Intervall* $I \subset \mathbb{R}$ *ist* $I \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$.
10. *Die Menge aller endlichen Teilmengen einer abzählbaren Menge ist abzählbar.*

Beweis. 1. (a) $\Rightarrow$ (c) Ist A abzählbar, so gibt es eine bijektive Abbildung $g\colon \mathbb{N}_0 \to A$. Sei also A endlich, $|A| = n$ und $A = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$. Dann erhält man eine surjektive Abbildung $g\colon \mathbb{N}_0 \to A$ durch
$$g(k) = \begin{cases} a_k\,, & \text{falls} \quad k < n\,, \\ a_0\,, & \text{falls} \quad k \geq n\,. \end{cases}$$

(c) $\Rightarrow$ (b) Sei $g\colon \mathbb{N}_0 \to A$ surjektiv. Für $a \in A$ sei $n_a \in g^{-1}\{a\}$. Dann ist $f\colon A \to \mathbb{N}_0$, definiert durch $f(a) = n_a$, eine injektive Abbildung.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sei $f\colon A \to \mathbb{N}_0$ injektiv und A unendlich. Dann ist auch $f(A)$ unendlich. Nach Satz 3.3 gibt es eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\geq 0}$ mit $f(A) = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$. Die Abbildung $n\colon \mathbb{N}_0 \to f(A)$, $k \mapsto n_k$, ist injektiv, und daher ist auch $f^{-1} \circ n\colon \mathbb{N}_0 \to A$ injektiv.

2. Nach 1. gibt es eine injektive Abbildung $\varphi\colon B \to \mathbb{N}_0$. Dann ist auch $\varphi \circ f\colon A \to \mathbb{N}_0$ injektiv und daher A höchstens abzählbar nach 1.

3. Sei M unendlich. Dann gibt es zu jeder endlichen Teilmenge $A \subset M$ ein Element $x_A \in M \setminus A$. Sei nun $(a_n)_{n\geq 0}$ rekursiv definiert durch $a_0 = x_\emptyset$ und $(\forall n \geq 0)$ $a_{n+1} = x_{\{a_0,\ldots,a_n\}}$. Dann ist die Abbildung $a\colon \mathbb{N}_0 \to A$, $n \to a_n$, injektiv, und daher $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subset A$ eine abzählbare Teilmenge.

4. Wir nehmen an, es sei $C \in g(A)$, $C = g(c)$ mit $c \in A$. Dann ist entweder $c \in C$ oder $c \notin C$. Aus $c \in C$ folgt aber $c \notin C$, und aus $c \notin C$ folgt $c \in C$. Widerspruch! Daher gibt es keine surjektive Abbildung $g\colon A \to \mathbb{P}(A)$.

Wir nehmen nun an, es sei A unendlich und (entgegen unserer Behauptung) $\mathbb{P}(A)$ höchstens abzählbar. Nach 3. gibt es eine abzählbare Teilmenge $B \subset A$, und wegen $\mathbb{P}(B) \subset \mathbb{P}(A)$ ist dann auch $\mathbb{P}(B)$ höchstens abzählbar nach 2. Sei nun $f\colon \mathbb{N}_0 \to B$ bijektiv und $g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{P}(B)$ surjektiv (nach 1.). Dann ist $g \circ f^{-1}\colon B \to \mathbb{P}(B)$ surjektiv, ein Widerspruch.

5. Seien $a, b \in A$, $a \neq b$, sei F die Menge aller Folgen in A und F_0 die Menge aller Folgen in $\{a, b\}$. Dann ist $F_0 \subset F$, und nach 2. genügt es, F_0 als überabzählbar zu erweisen. Sei $f\colon F_0 \to \mathbb{P}(\mathbb{N}_0)$ definiert durch $f\big((x_n)_{n\geq 0}\big) = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid x_n = a\}$. Dann ist f bijektiv, nach 4. ist $\mathbb{P}(\mathbb{N}_0)$ überabzählbar, und da $f^{-1}\colon \mathbb{P}(\mathbb{N}_0) \to F_0$ injektiv ist, ist nach 2. auch F_0 überabzählbar.

6. Die Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, definiert durch $f(m, n) = 2^m 3^n$, ist injektiv. Daher ist $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ abzählbar nach 1., und es gibt eine bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$, seien $A_1, \ldots, A_n$ höchstens abzählbare Mengen, und sei $A = A_1 \times \ldots \times A_n$. Wir zeigen durch Induktion nach n, dass auch A höchstens abzählbar ist. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $n \geq 2$ und (Induktionsvoraussetzung!) die Menge $A' = A_1 \times \ldots \times A_{n-1}$ höchstens abzählbar. Nach 1. gibt es surjektive Abbildungen $f_1 \colon \mathbb{N}_0 \to A'$ und $f_2 \colon \mathbb{N}_0 \to A_n$. Dann ist auch $f \colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to A = A' \times A_n$, definiert durch $f(m,n) = \big(f_1(m), f_2(n)\big)$, surjektiv. Die Abbildung $\varphi \circ f \colon \mathbb{N}_0 \to A$ ist ebenfalls surjektiv, und daher ist A höchstens abzählbar.

7. Sei $T = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid A_n \neq \emptyset\}$. Dann gibt es nach 1. für jedes $n \in T$ eine surjektive Abbildung $g_n \colon \mathbb{N}_0 \to A_n$, und nach 2. gibt es eine surjektive Abbildung $h \colon \mathbb{N}_0 \to T$. Sei nun $f \colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to A$ definiert durch $f(n,m) = g_{h(n)}(m)$. Dann ist f surjektiv. Nach 7. gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Dann ist auch $f \circ \varphi \colon \mathbb{N}_0 \to A$ surjektiv und daher A höchstens abzählbar.

8. $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist abzählbar, und die Abbildung $g \colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, definiert durch $g(m,n) = m - n$, ist surjektiv. Daher ist auch $\mathbb{Z}$ abzählbar. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ abzählbar, und daher ist nach 7. auch

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \geq 1} \frac{1}{n}\mathbb{Z} \quad \text{abzählbar}\,.$$

9. Sei F die Menge aller Folgen in $\{0,1\}$, und sei $f \colon F \to [0,1]$ definiert durch

$$f\big((a_n)_{n \geq 1}\big) = (0, a_1 a_2 \ldots)_3 \quad \text{(3-adische Zifferndarstellung)}\,.$$

Nach Satz 3.11 ist f injektiv, und daher ist $[0,1]$ überabzählbar nach 5. und 2.

Sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, seien $a, b \in I$ mit $a < b$, und sei $f \colon [0,1] \to I$ definiert durch $f(x) = a + x(b-a)$. Dann ist f injektiv und daher auch I überabzählbar nach 2.

10. Sei A abzählbar und $f \colon \mathbb{N}_0 \to A$ bijektiv. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A_n = f\big(\{0, \ldots, n\}\big)$. Dann ist

$$\Omega = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$$

die Menge aller endlichen Teilmengen von A. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathbb{P}(A_n)$ endlich, und daher ist Ω abzählbar nach 7. $\square$

4. Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

4.1. Definition von Grenzwert und Stetigkeit

Satz und Definition 4.1. *Seien X und Y normierte Räume, $\emptyset \neq D \subset X$, $f\colon D \to Y$ eine Abbildung, $a \in X$ und $c \in Y$. Dann sind äquivalent:*

(a) *Für jede Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in $D \setminus \{a\}$ mit $(a_n)_{n\geq 0} \to a$ ist $(f(a_n))_{n\geq 0} \to c$.*

(b) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x \in D \setminus \{a\})\ \big[\, \|x-a\| < \delta \implies \|f(x)-c\| < \varepsilon \,\big]$.

(c) $(\forall V \in \mathcal{U}(c))\ (\exists U \in \mathcal{U}(a))\ \ f(U \cap D \setminus \{a\}) \subset V$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so sagt man, f *hat bei Annäherung an a den Grenzwert c* und schreibt

$$\lim_{x\to a} f(x) = c\,.$$

Gibt es kein $c \in Y$ mit $\lim_{x\to a} f(x) = c$, so sagt man, $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert nicht.

f heißt *stetig* in a, wenn

$$a \in D \quad \text{und} \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,.$$ Andernfalls heißt f *unstetig* in a.

Ist f stetig in a, so nennt man a eine *Stetigkeitsstelle* und andernfalls eine *Unstetigkeitsstelle* von f. Insbesondere ist jedes $a \in X \setminus D$ eine Unstetigkeitsstelle von f.

f heißt *stetig* (in D), wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

$\mathcal{C}(D,Y) = \mathcal{C}^0(D,Y)$ bezeichne die Menge aller stetigen Abbildungen $f\colon D \to Y$.

f heißt *stetig ergänzbar* in a, wenn es eine in a stetige Funktion $\widetilde{f}\colon D \cup \{a\} \to Y$ mit $\widetilde{f}\,|\,D\setminus\{a\} = f\,|\,D\setminus\{a\}$ gibt. Man sagt, dann auch, f ist in a stetig ergänzbar durch den Wert $\widetilde{f}(a)$. Jede solche Funktion $\widetilde{f}$ heißt eine *stetige Ergänzung* von f in a. Insbesondere ist f in jeder Stetigkeitsstelle von f stetig ergänzbar durch den Wert $f(a)$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) Durch Widerspruch. Wir nehmen an,

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists x_n \in D \setminus \{a\})\Big[\, \|x_n - a\| < \frac{1}{n} \ \wedge\ \|f(x_n) - c\| \geq \varepsilon \,\Big].$$

Dann folgt $(x_n)_{n\geq 1} \to a$ und $(f(x_n))_{n\geq 1} \not\to c$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sei $V \in \mathcal{U}(c)$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon(c) \subset V$. Dann

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x \in D \setminus \{a\})\ \big[\, \|x-a\| < \delta \implies \|f(x)-c\| < \varepsilon) \,\big],$$

das heißt, $f(B_\delta(a) \cap D \setminus \{a\}) \subset B_\varepsilon(c) \subset V$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $(a_n)_{n\geq 0} \to a$ und $V \in \mathcal{U}(c)$. Sei $U \in \mathcal{U}(a)$ mit $f(U \cap D \setminus \{a\}) \subset V$. Dann $(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \geq n_0)\ \ a_n \in U$, und daher $(\forall n \geq n_0)\ \ f(a_n) \in V$. Damit folgt $(f(a_n))_{n\geq 0} \to c$. □

Bemerkungen: Seien die Voraussetzungen wie in Satz und Definition 4.1.

1. Ist $a \notin D'$, so gibt es keine Folge in $D \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Daher ist dann $(\forall c \in Y)\ \lim_{x\to a} f(x) = c$.

   Insbesondere gilt: Ist $a \in D \setminus D'$ (ein isolierter Punkt von D), so ist f stetig in a.

2. Ist $a \in D'$, so gibt es höchstens ein $c \in Y$ mit $\lim_{x\to a} f(x) = c$.

   Beweis. Seien c, $c' \in Y$ mit $\lim_{x\to a} f(x) = c$ und $\lim_{x\to a} f(x) = c'$. Wegen $a \in D'$ gibt es nach Satz 3.2.5 eine Folgt $(a_n)_{n\ge 0}$ in $D \setminus \{a\}$ mit $(a_n)_{n\ge 0} \to a$, und nach Definition ist dann $(f(a_n))_{n\ge 0} \to c$ und $(f(a_n))_{n\ge 0} \to c'$, also $c = c'$. $\square$

3. Ist $\emptyset \neq D_1 \subset D$ und $\lim_{x\to a} f(x) = c$, so folgt $\lim_{x\to a}(f \mid D_1)(x) = c$.

   Insbesondere gilt für alle $a \in D_1$: Ist f stetig in a, so ist auch $f \mid D_1$ stetig in a.

4. Ist $U \in \mathcal{U}(a)$ und $D \cap U \neq \emptyset$, so gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a}(f \mid D\cap U)(x) = c\,.$$

   Ist insbesondere $a \in D$ und $U \in \mathcal{U}(a)$, so gilt: f stetig in a $\Longleftrightarrow$ $f \mid D \cap U$ stetig in a.

   Beweis. $\Longrightarrow$: Nach 3.

   $\Longleftarrow$: Sei $(a_n)_{n\ge 0}$ eine Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $(a_n)_{n\ge 0} \to a$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass $(\forall n \ge n_0)$ $a_n \in U$. Dann ist $(a_n)_{n\ge n_0}$ eine Folge in $D\cap U \setminus \{a\}$ mit $(a_n)_{n\ge n_0} \to a$, daher ist $(f(a_n))_{n\ge n_0} \to c$ und auch $(f(a_n))_{n\ge 0} \to c$. $\square$

5. Ist $\lim_{x\to a} f(x) = c$, so ist f stetig ergänzbar in a durch den Wert c, und im Falle $a \in D'$ hat f höchstens eine stetige Ergänzung in a.

Satz 4.2. *Seien X und Y normierte Räume, $D \subset X$, $a \in D$ und $f \colon D \to Y$.*

A. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *f ist stetig in a.*

(b) *Für jede Folge $(a_n)_{n\ge 0}$ in D gilt: $(a_n)_{n\ge 0} \to a \implies (f(a_n))_{n\ge 0} \to f(a)$.*

(c) $(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists\, \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x \in D)\ \big[\, \|x-a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \,\big]$.

(d) $(\forall\, V \in \mathcal{U}(f(a)))\ (\exists\, U \in \mathcal{U}(a))\ \ f(U \cap D) \subset V$.

B. *Sei f stetig in a.*

1. *Sei $b \in Y$ und $f(a) \neq b$. Dann* $(\exists\, U \in \mathcal{U}(a))\ (\forall x \in U \cap D)\ \ f(x) \neq b\,$.
2. *Sei $Y = \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $f(a) > b$. Dann* $(\exists\, U \in \mathcal{U}(a))\ (\forall x \in U \cap D)\ \ f(x) > b\,$.

Beweis. **A.** (a) $\Rightarrow$ (b) Sei $(a_n)_{n\ge 0}$ eine Folge in D, $(a_n)_{n\ge 0} \to a$ und $T = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n = a\}$. Ist T endlich, so $(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)$ $(\forall n \ge n_0)$ $a_n \in D \setminus \{a\}$, und wegen $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ folgt $(f(a_n))_{n\ge 0} \to f(a)$. Ist $\mathbb{N}_0 \setminus T$ endlich, so $(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)$ $(\forall n \ge n_0)$ $a_n = a$, und daher wieder $(f(a_n))_{n\ge 0} \to f(a)$. Sind T und $T_1 = \mathbb{N}_0 \setminus T$ beide unendlich, so folgt $(f(a_n))_{n\in T} \to f(a)$ und $(f(a_n))_{n\in T_1} \to f(a)$, also auch $(f(a_n))_{n\ge 0} \to f(a)$.

(a) $\Rightarrow$ (c) und (a) $\Rightarrow$ (d) Nach Satz 4.1 (mit $c = f(a)$).

(b) $\Rightarrow$ (a), (c) $\Rightarrow$ (a) und (d) $\Rightarrow$ (a) Nach Satz 4.1.

B. 1. Sei $\varepsilon = \|f(a) - b\| \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach **A** $(\exists U \in \mathcal{U}(a))$ $f(U \cap D) \subset B_\varepsilon(f(a))$. Dann ist $b \notin f(U \cap D)$, also $(\forall x \in U \cap D)$ $f(x) \neq b$.

2. Ist $f(a) > b$, so folgt $(b, \infty) \in \mathcal{U}(f(a))$. Nach **A** $(\exists U \in \mathcal{U}(a))$ $f(U \cap D) \subset (b, \infty)$, also $(\forall x \in U \cap D)$ $f(x) > b$. $\square$

Satz 4.3. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{K}^n$ und $h \colon D \to \mathbb{K}$ eine rationale Funktion. Dann ist h stetig. Insbesondere ist jede Polynomfunktion $f \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ stetig.*

Beweis. Wir müssen zeigen: Für $\boldsymbol{z} \in D$ und jede Folge $(\boldsymbol{z}_k)_{k\geq 0}$ in D mit $(\boldsymbol{z}_k)_{k\geq 0} \to \boldsymbol{z}$ ist $(h(\boldsymbol{z}_k))_{k\geq 0} \to h(\boldsymbol{z})$. Auf Grund des Normäquivalenzsatzes ist es dabei gleichgültig, welche Norm wir zur Definition der Konvergenz verwenden.

Sei $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in D$ und $(\boldsymbol{z}_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in D mit $(\boldsymbol{z}_k)_{k\geq 0} \to \boldsymbol{z}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\boldsymbol{z}_k = (z_{k,1}, \ldots, z_{k,n})$. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt $(\forall j \in \{1, \ldots, n)$ $(z_{k,j})_{k\geq 0} \to z_j$ nach Satz 3.17. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ definiert $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\Re(x_1), \Im(x_1), \ldots, \Re(x_n), \Im(x_n))$ eine Isometrie zwischen $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^{2n}$ bezüglich der Standardnorm. Daher folgt (wieder mit Satz 3.17) $(\forall j \in \{1, \ldots, n)$ $(\Re(z_{k,j}))_{k\geq 0} \to \Re(z_j)$ $\wedge$ $(\Im(z_{k,j}))_{k\geq 0} \to \Im(z_j)$, also nach Satz 3.7 wieder $(z_{k,j})_{k\geq 0} \to z_j$.

FALL 1: $h\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ist ein Potenzprodukt. Für $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ist dann

$$h(\boldsymbol{x}) = c x_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{d_n} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{K}, \quad d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad d_1 = \ldots = d_n = 0, \quad \text{falls} \quad c = 0.$$

Wir führen den Beweis durch Induktion nach $d = d_1 + \ldots + d_n \in \mathbb{N}_0$ (den *Grad* von h).

$d = 0$: Dann ist h konstant und die Behauptung trivial.

$d \geq 1$, $d - 1 \to d$: Dann gibt es ein Potenzprodukt $h_0\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ vom Grade $d-1$ und ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $(\forall \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n)$ $h(\boldsymbol{x}) = x_j h_0(\boldsymbol{x})$. Dann folgt $(h(\boldsymbol{z}_k))_{k\geq 0} = (z_{k,j} h_0(\boldsymbol{z}_k))_{k\geq 0} \to z_j h_0(\boldsymbol{z}) = h(\boldsymbol{z})$ nach Induktionsvoraussetzung und Satz 3.6.

FALL 2: $h\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ist eine Polynomfunktion, $h = h_1 + \ldots + h_m$ mit $m \in \mathbb{N}$ und Potzenzprodukten $h_1, \ldots, h_m\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Nach FALL 1 ist $(\forall j \in \{1, \ldots, m\})$ $(h_j(\boldsymbol{z}_k))_{k\geq 0} \to h_j(\boldsymbol{z})$, und daher folgt $(h(\boldsymbol{z}_k))_{k\geq 0} \to h(\boldsymbol{z})$.

FALL 3: $h\colon D \to \mathbb{K}$ ist eine rationale Funktion,

$$h = \frac{f}{g} \quad \text{mit Polynomfunktionen} \quad f, g \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K}), \quad \text{so dass} \quad D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid g(\boldsymbol{x}) \neq 0\}.$$

Nach FALL 2 ist $(f(\boldsymbol{z}_k))_{k\geq 0} \to f(\boldsymbol{z})$ und $(g(\boldsymbol{z}_k))_{k\geq 0} \to g(\boldsymbol{z})$, und mit Satz 3.6 folgt $(h(\boldsymbol{z}_k))_{k\geq 0} \to h(\boldsymbol{z})$. □

Weitere Beispiele:

1. X sei ein normierter Raum. Dann ist $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ stetig.
   Beweis. Nach Satz 3.2.4. □
2. Die Abbildung
   $$f\colon X \setminus \{0\} \to X, \quad \text{definiert durch} \quad f(x) = \frac{1}{\|x\|}\, x,$$
   ist stetig, aber $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht. Daher ist f nicht stetig ergänzbar in 0.
   Beweis. Sei $a \in X \setminus \{0\}$ und $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $X \setminus \{0\}$ mit $(a_n)_{n\geq 0} \to a$. Dann folgt $(\|a_n\|^{-1})_{n\geq 0} \to \|a\|^{-1}$ und daher auch
   $$\Big(\frac{1}{\|a_n\|}\, a_n\Big)_{n\geq 0} \to \frac{1}{\|a\|}\, a \qquad (\text{nach Satz 3.5}).$$
   Daher ist f stetig in a. Sei nun $a \in X \setminus \{0\}$, und für $n \in \mathbb{N}$ sei
   $$a_n = \frac{(-1)^n}{n}\, a, \quad \text{also} \quad (a_n)_{n\geq 0} \to 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\|a_n\|}\, a_n = (-1)^n a.$$
   Daher ist $(f(a_n))_{n\geq 0}$ nicht konvergent, und $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht. □

3. Die Abbildungen $z \mapsto |z|$, $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto \Re(z)$ und $z \mapsto \Im(z)$ sind stetige Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

   Beweis. Nach Satz 3.6. $\square$

4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & \text{falls} \quad x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

   Dann ist f stetig in 0. Für $a \in \mathbb{R}^\times$ existiert $\lim_{x\to a} f(x)$ nicht.

   Beweis. Es ist $f(0) = 0$ und $(\forall x \in \mathbb{R})$ $|f(x)| \le |x|$. Insbesondere folgt: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})$ $(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ $|f(x)| < \varepsilon$ (setze $\delta = \varepsilon$). Daher ist f stetig in 0.

   Sei nun $a \in \mathbb{R}^\times$ und $V = B_{|a|}(f(a))$. Dann ist entweder $f(a) = 0$ und $a \notin V$ oder $f(a) = a$ und $0 \notin V$. Wir zeigen: Es gibt kein $U \in \mathcal{U}(a)$ mit $f(U) \subset V$. Ist nämlich $U \in \mathcal{U}(a)$, so gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U$, und daher ist $U \cap \mathbb{Q} \ne \emptyset$ und $U \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \ne \emptyset$ (nach Satz 1.10 und Satz 3.22), also folgt $\{0, a\} \subset f(U)$ und $f(U) \not\subset V$. $\square$

5. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \\ \frac{1}{q}\,, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad q = \min\{m \in \mathbb{N} \mid mx \in \mathbb{Z}\}\,. \end{cases}$$

   Dann ist f stetig in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und unstetig in $\mathbb{Q}$.

   Beweis. Sei $a \in \mathbb{Q}$. Dann ist $f(a) \ne 0$, und nach Satz 3.22 gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ \ |a_n - a| < \frac{1}{n}\,,$$

   also $(a_n)_{n\ge 0} \to a$ und $(\forall n \in \mathbb{N})$ $f(a_n) = 0$. Daher ist f unstetig in a.

   Sei nun $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wir nehmen an, f sei unstetig in a. Dann

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists a_n \in \mathbb{R})\ \ \Big[\,|a_n - a| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad |f(a_n)| \ge \varepsilon\,\Big]\,.$$

   $(a_n)_{n\ge 1}$ ist eine Folge in $\mathbb{Q}$, $(a_n)_{n\ge 0} \to a$, und

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ q_n = \min\{m \in \mathbb{Z} \mid ma_n \in \mathbb{Z}\} \le \varepsilon^{-1}\,.$$

   Daher ist die Menge $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ endlich, und es sei $q \in \mathbb{N}$ das Produkt aller q_n. Dann folgt $(\forall n \in \mathbb{N})$ $qa_n \in \mathbb{Z}$ und $(qa_n)_{n\ge 1} \to qa$. Folglich ist die Folge $(qa_n)_{n\ge 1}$ schließlich konstant und $qa \in \mathbb{Z}$, ein Widerspruch zu $a \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Satz und Definition 4.4. *Seien X und Y normierte Räume, $\emptyset \ne D \subset X$, $f\colon D \to Y$ eine Abbildung und $L \in \mathbb{R}_{>0}$.*

1. *Sei $a \in D$ und $U \in \mathcal{U}(a)$, so dass $(\forall x \in D \cap U)$ $\|f(x) - f(a)\| \le L\,\|x - a\|$. Dann ist f stetig in a.*

   Erfüllt f die obigen Voraussetzungen, so sagt man, f genügt einer *Lipschitzbedingung bei a* (mit Lipschitzkonstante L).

2. *Sei $(\forall x, y \in D)$ $\|f(x) - f(y)\| \le L\,\|x - y\|$. Dann ist f stetig.*

   Erfüllt f die obigen Voraussetzungen, so sagt man, f genügt einer *Lipschitzbedingung* (mit Lipschitzkonstante L).

Beweis. Es genügt, 1. zu zeigen. Sei $a \in D$ und $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in D mit $(a_n)_{n\geq 0} \to a$. Dann $(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \geq n_0)\ \ a_n \in U$. Für $n \geq n_0$ ist dann $\|f(a_n) - f(a)\| \leq L\,\|a_n - a\|$ und daher $(f(a_n))_{n\geq 0} \to f(a)$. $\square$

Satz 4.5. *Seien X und Y normierte Räume, $\emptyset \neq D \subset X$, $a \in X$, und seien $f, g\colon D \to Y$ und $h\colon D \to \mathbb{R}$ Abbildungen.*

1. *Seien $c, d \in Y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = c$, $\lim_{x\to a} g(x) = d$ und $\lim_{x\to a} h(x) = \lambda$.*
   (a) $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = c \pm d$, *und* $\lim_{x\to a}(hf)(x) = \lambda c$.
   (b) *Ist $(Y,\boldsymbol{\cdot})$ eine normierte Algebra, so ist $\lim_{x\to a}(f\boldsymbol{\cdot} g)(x) = c\boldsymbol{\cdot} d$.*
   (c) *Sei $Y = \mathbb{R}$ oder $Y = \mathbb{C}$ und $d \neq 0$. Dann*
   $$(\exists\, U \in \mathcal{U}(a))\ (\forall x \in D \cap U \setminus \{a\})\ \ g(x) \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to a} \frac{f \,|\, D \cap U \setminus \{a\}}{g \,|\, D \cap U \setminus \{a\}}(x) = \frac{c}{d}\,.$$
2. *Ist $\lim_{x\to a} h(x) = 0$ und f beschränkt oder h beschränkt und $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, so folgt $\lim_{x\to a}(hf)(x) = 0$.*
   Ist $(Y,\boldsymbol{\cdot})$ eine normierte Algebra und ist $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ und g beschränkt oder f beschränkt und $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, so folgt $\lim_{x\to a}(f\boldsymbol{\cdot} g)(x) = 0$.
3. *Seien f, g und h stetig in a.*
   (a) *$f \pm g$ und hg sind stetig in a. Ist $(Y,\boldsymbol{\cdot})$ eine normierte Algebra, so ist auch $f\boldsymbol{\cdot} g$ stetig in a.*
   (b) *Die Funktion $\|f\|\colon D \to \mathbb{R}$, definiert durch $\|f\|(x) = \|f(x)\|$, ist stetig in a.*
   (c) *Sei $Y = \mathbb{R}$ oder $Y = \mathbb{C}$ und $g(a) \neq 0$. Dann*
   $$\big(\exists\, U \in \mathcal{U}(a)\big)\ (\forall x \in D \cap U) \quad g(x) \neq 0 \quad \wedge \quad \frac{f \,|\, D \cap U}{g \,|\, D \cap U} \ \text{ ist stetig in } a.$$
4. *$\mathcal{C}(D, Y)$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(D, Y)$. Ist Y eine normierte Algebra, so ist $\mathcal{C}(D, Y) \subset \mathrm{Abb}(D, Y)$ eine Unteralgebra.*
5. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $Y = \mathbb{K}^n$ und $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$. Seien $f_1, \ldots, f_n\colon X \to \mathbb{K}$ definiert durch $(\forall x \in D)\ \ f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ [man schreibt dann auch $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon D \to \mathbb{K}^n$]. Dann gilt:*
   (a) $\lim_{x\to a} f(x) = \boldsymbol{c} \iff (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ \ \lim_{x\to a} f_i(x) = c_i$.
   (b) *f stetig in a $\iff$ $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})$ f_i stetig in a.*
6. *Im Falle $Y = \mathbb{C}$ gilt:*
   $$\lim_{x\to a} f(x) = c \iff \lim_{x\to a} \overline{f(x)} = \overline{c} \iff \lim_{x\to a} \Re(f(x)) \to \Re c \ \wedge\ \lim_{x\to a} \Im(f(x)) \to \Im c\,.$$
   Insbesondere folgt: f stetig in a $\iff$ $\overline{f}$ stetig in a $\iff$ $\Re f$ und $\Im f$ stetig in a.
7. *Im Falle $Y = \mathbb{R}$ gilt:*
   $$\lim_{x\to a} \max\{f(x), g(x)\} = \max\{c, d\} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to a} \min\{f(x), g(x)\} = \min\{c, d\}\,.$$
   Insbesondere folgt: Sind f und g stetig in a, so sind auch die Funktionen
   $$\max(f, g)\colon D \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \min(f, g)\colon D \to \mathbb{R}\,,$$
   definiert durch $\max(f, g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ und $\min(f, g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, stetig in a.

Beweis. 1. Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $D\setminus\{a\}$ mit $(a_k)_{k\geq 0}\to a$. Dann folgt $(f(a_k))_{k\geq 0}\to c$, $(g(a_k))_{k\geq 0}\to d$ und $(h(a_k))_{k\geq 0}\to\lambda$.

(a) Nach Satz 3.5 folgt

$$((f\pm g)(x_k))_{k\geq 0}=(f(x_k)\pm g(x_k))_{k\geq 0}\to c\pm d \quad\text{und}\quad ((hf)(x_k))_{k\geq 0}=(h(x_k)f(x_k))_{k\geq 0}\to\lambda c\,.$$

(b) Nach Satz 3.5 folgt $((fg)(x_k))_{k\geq 0}=(f(x_k)g(x_k))_{k\geq 0}\to cd$.

(c) Angenommen, $(\forall U\in\mathcal{U}(a))\ (\exists x\in D\cap U\setminus\{a\})\ \ g(x)=0$. Dann gibt es eine Folge $(a_k)_{k\geq 0}$ in $D\cap U\setminus\{a\}$ mit $(a_k)_{k\geq 0}\to a$, so dass $(\forall k\in\mathbb{N}_0)\ \ g(a_k)=0$, im Widerspruch zu $d\neq 0$.

Sei nun $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $D\setminus\{a\}$, so dass $(\forall k\in\mathbb{N}_0)\ \ g(a_k)\neq 0$ und $(a_k)_{k\geq 0}\to a$. Nach Satz 3.6 folgt dann

$$\Bigl(\frac{f}{g}(a_k)\Bigr)_{k\geq 0}=\Bigl(\frac{f(a_k)}{g(a_k)}\Bigr)_{k\geq 0}\ \to\ \frac{c}{d}\,.$$

2. Sei $\lim_{x\to a}h(x)=0$ und f beschränkt, also $\|f\|_D<\infty$. Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $D\setminus\{a\}$ mit $(a_k)_{k\geq 0}\to a$. Dann ist $(h(x_k))_{k\geq 0}\to 0$, und $(\forall k\in\mathbb{N}_0)\ \ \|(hf)(x_k)\|\leq\|f\|_D\,\|h(x_k)\|$. Wegen $(\|h(x_k)\|)_{k\geq 0}\to 0$ folgt $((hf)(x_k))_{k\geq 0}\to 0$. Die übrigen Fälle beweist man genauso.

3. (a) Nach 1.(a) und 1.(b).

(b) Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in D mit $(a_k)_{k\geq 0}\to a$. Dann folgt $(f(a_k))_{k\geq 0}\to f(a)$ und daher $(\|f(a_k)\|)_{k\geq 0}\to\|f(a)\|$.

(c) Nach 1.(c).

4. Nach 3.(a).

5. Es genügt, (a) zu zeigen. Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $D\setminus\{a\}$ mit $(a_k)_{k\geq 0}\to a$. Im Falle $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ folgt aus Satz 3.20: $(f(a_k))_{k\geq 0}\to\boldsymbol{c}\iff(\forall i\in\{1,\ldots,n\})\ (f_i(a_k))_{k\geq 0}\to c_i$. Im Falle $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ folgt wegen der Isometrie zwischen $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^{2n}$ und Satz 3.6:

$$\begin{aligned}(f(a_k))_{k\geq 0}\to\boldsymbol{c}\ &\iff\ (\forall i\in\{1,\ldots,n\})\ \ (\Re(f_i(a_k)))_{k\geq 0}\to\Re(c_i)\ \wedge\ (\Im(f_i(a_k)))_{k\geq 0}\to\Im(c_i)\\ &\iff\ (\forall i\in\{1,\ldots,n\})\ \ (f_i(a_k))_{k\geq 0}\to c_i\,.\end{aligned}$$

6. Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $D\setminus\{a\}$ mit $(a_k)_{k\geq 0}\to a$. Nach Satz 3.6 gilt dann

$$(f(a_k))_{k\geq 0}\to c\ \iff\ (\,\overline{f(a_k)}\,)_{k\geq 0}\to\overline{c}\ \iff\ (\Re f(a_k))_{k\geq 0}\to\Re(c)\ \wedge\ (\Im f(a_k))_{k\geq 0}\to\Im(c)\,.$$

7. Die Behauptungen folgen wegen

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

und

$$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}\,.$$

□

Satz 4.6. *Seien X, Y, Z normierte Räume, $\emptyset\neq D\subset X$, $\emptyset\neq E\subset Y$, $f\colon D\to Y$, $g\colon E\to Z$ und $f(D)\subset E$.*

1. *Sei $a\in X$, $b\in Y$, $c\in Z$, und sei entweder $a\notin D'$ oder $b\notin E$ oder g stetig in b. Dann gilt:*

$$\lim_{x\to a}f(x)=b\ \wedge\ \lim_{y\to b}g(y)=c\quad\Longrightarrow\quad\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=c\,.$$

2. *Sei* $a \in D$, f *stetig in* a *und* g *stetig in* $f(a)$*. Dann ist* $g \circ f : D \to Z$ *stetig in* a*. Insbesondere gilt: Sind* f *und* g *stetig, so ist auch* $g \circ f$ *stetig.*

Beweis. Es genügt, 1. zu zeigen. Im Falle $a \notin D'$ ist nichts zu beweisen. Sei also $a \in D'$ und $(a_k)_{k \ge 0}$ eine Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $(a_k)_{k \ge 0} \to a$. Dann ist $(f(a_k))_{k \ge 0}$ eine Folge in E mit $(f(a_k))_{k \ge 0} \to b$. Ist $b \notin E$ oder g stetig in b, so folgt $((g \circ f)(a_k))_{k \ge 0} = \big(g(f(a_k))\big)_{k \ge 0} \to c$. $\square$

Weitere Beispiele: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$.
   Sei $j : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^n$ definiert durch $j(x) = (c_1, \ldots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ (Einlagerung in die i-te Komponente). Dann ist j stetig.
   Sei $\boldsymbol{c} \in D \subset \mathbb{K}^n$, X ein normierter Raum und $f : D \to X$ stetig in $\boldsymbol{c}$. Sei $c_i \in D_i \subset \mathbb{K}$ mit
   $$\{c_1\} \times \ldots \times \{c_{i-1}\} \times D_i \times \{c_{i+1}\} \times \ldots \times \{c_n\} \subset D\,,$$
   und sei $f_i : D_i \to X$ definiert durch $f_i(x) = f(c_1, \ldots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ (man nennt f_i eine partielle Funktion von f). Dann ist f_i stetig in c_i.
   Beweis. j ist stetig nach Satz 4.5.5, und $f_i = f \circ j \,|\, D_i$ ist stetig nach Satz 4.6.
2. Die Abbildungen
   $$\begin{cases} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & x+y\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \begin{cases} \mathbb{K}^\times \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{y}{x} \end{cases}$$
   sind stetig (man nennt daher $\mathbb{K}$ einen *topologischen Körper*).
   Beweis. Nach den Sätzen 3.5 und 3.6.

4.2. Einseitige und uneigentliche Grenzwerte

Definition 4.1. Sei X ein normierter Raum, $\emptyset \ne D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $f : D \to X$ und entweder $c \in X$ oder $X = \mathbb{R}$ und $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. c heißt *linksseitiger* [*rechtsseitiger*] *Grenzwert von* f *bei Annäherung an* a,
   $$\lim_{x \to a-} f(x) = c \quad [\,\lim_{x \to a+} f(x) = c\,]\,,$$
   wenn für jede Folge $(x_k)_{k \ge 0}$ in $D \cap (-\infty, a)$ $[\,D \cap (a, \infty)\,]$ gilt:
   $$(x_k)_{k \ge 0} \to a \quad \Longrightarrow \quad \big(f(x_k)\big)_{k \ge 0} \to c\,.$$
   Gibt es kein c mit $\lim_{x \to a-} f(x) = c$ $[\,\lim_{x \to a+} f(x) = c\,]$, so sagt man,
   $$\lim_{x \to a-} f(x) \quad [\,\lim_{x \to a+} f(x)\,] \quad \textit{existiert nicht.}$$
2. c heißt *Grenzwert von* f *bei Annäherung an* a,
   $$\lim_{x \to a} f(x) = c\,,$$
   wenn für jede Folge $(x_k)_{k \ge 0}$ in $D \setminus \{a\}$ gilt: $(x_k)_{k \ge 0} \to a \quad \Longrightarrow \quad \big(f(x_k)\big)_{k \ge 0} \to c$.
   Im Falle $c \in X$ ist diese Definition mit der aus Satz und Definition 4.1 konsistent.

3. Sei $X = \mathbb{R}$.
   a heißt *Sprungstelle* von f, wenn $a \in D^\circ$ und
$$(\exists\, c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}) \quad c_1 \ne c_2 \;\wedge\; \lim_{x\to a-} f(x) = c_1 \;\wedge\; \lim_{x\to a+} f(x) = c_2\,.$$
   a heisst *Unendlichkeitsstelle* von f, wenn
$$\lim_{x\to a-} f(x) = \infty \quad\vee\quad \lim_{x\to a-} f(x) = -\infty \quad\vee\quad \lim_{x\to a+} f(x) = \infty \quad\vee\quad \lim_{x\to a+} f(x) = -\infty\,.$$
   Ist a eine Unendlichkeitsstelle von f, so nennt man die Gerade $\{a\}\times\mathbb{R}$ eine *senkrechte Asymptote* an $\operatorname{Graph}(f)$.

Bemerkungen: Sei $\emptyset \ne D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $c \in \overline{\mathbb{R}}$.
1. Ist $a \notin [D\cap(-\infty,a)]'$ $\big[\,a \notin [D\cap(a,\infty)]'\,\big]$, so folgt $\lim_{x\to a-} f(x) = c$ $[\lim_{x\to a+} f(x) = c]$.
2. Für $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{x\to a} f(x) = c \iff \lim_{x\to a-} f(x) = c \;\wedge\; \lim_{x\to a+} f(x) = c\,.$
   Beweis. $\Longrightarrow$: Offensichtlich.
   $\Longleftarrow$: Sei $(a_k)_{k\ge0}$ eine Folge in $D\setminus\{a\}$ mit $(a_k)_{k\ge0}\to a$. Sei $T_+ = \{k\in\mathbb{N}_0 \mid a_k > a\}$ und $T_- = \{k\in\mathbb{N}_0 \mid a_k < a\}$. Ist T_- endlich, so liegt ein Endstück der Folge $(a_k)_{k\ge0}$ in (a,∞) und daher folgt $(f(a_k))_{k\ge0}\to c$. Ist T_+ endlich, so liegt ein Endstück der Folge $(a_k)_{k\ge0}$ in $(-\infty,a)$ und daher folgt $(f(a_k))_{k\ge0}\to c$. Sind T_+ und T_- beide unendlich, so folgt $(f(a_k))_{k\in T_+}\to c$ und $(f(a_k))_{k\in T_-}\to c$, also auch $(f(a_k))_{k\ge0}\to c$ nach den Sätzen 3.4 und 3.14. ☐
3. Ist $D\cap(-\infty,a)\ne\emptyset$, so gilt: $\lim_{x\to a-} f(x) = c \iff \lim_{x\to a}\big(f\,|\,D\cap(-\infty,a)\big) = c.$
   Ist $D\cap(a,\infty)\ne\emptyset$, so gilt: $\lim_{x\to a+} f(x) = c \iff \lim_{x\to a}\big(f\,|\,D\cap(a,\infty)\big) = c.$

Beispiele:
1. Die *Heaviside-Funktion* $H\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist definiert durch
$$H(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls} \quad x > 0\,,\\ 0\,, & \text{falls} \quad x \le 0\,.\end{cases}$$
   H ist stetig in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\lim_{x\to0-} H(x) = 0 = H(0)$, $\lim_{x\to0+} H(x) = 1$, $\lim_{x\to0} H(x)$ existiert nicht. H ist in 0 linksseitig, aber nicht rechtsseitig stetig.
2. Für $\nu\in\mathbb{N}$ sei $F_\nu\colon \mathbb{R}^\times\to\mathbb{R}$ definiert durch $F_\nu(x) = x^{-\nu}$. Dann gilt:
$$\operatorname{Graph}(F_\nu) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^\nu y = 1\}\,, \quad \lim_{x\to0+} x^{-\nu} = \infty\,, \quad \lim_{x\to0-} x^{-\nu} = (-1)^\nu\infty\,,$$
$$\lim_{x\to0} x^{-2\nu} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to0} x^{-(2\nu-1)} \quad \text{existiert nicht.}$$
   Beweis. Nach Satz 3.14.

Definition 4.2. Sei $\emptyset\ne D\subset\mathbb{R}$.
1. Sei X ein normierter Raum, $f\colon D\to X$ und entweder $c\in X$ oder $X=\mathbb{R}$ und $c\in\overline{\mathbb{R}}$. Dann definiert man
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \qquad \Big[\lim_{x\to-\infty} f(x) = c\Big]\,,\,,$$
   wenn für jede Folge $(x_k)_{k\ge0}$ in D gilt: $(x_k)_{k\ge0}\to\infty$ $\big[-\infty\big]$ $\Longrightarrow$ $(f(x_k))_{k\ge0}\to c.$

2. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, seien $k,\, d \in \mathbb{R}$ und $G_{k,d} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx+d\}$. Man nennt die Gerade $G_{k,d}$ eine *Asymptote* an $\operatorname{Graph}(f)$ in ∞ $\big[$in $-\infty\big]$, wenn
$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(kx+d)\big)=0 \quad \Big[\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(kx+d)\big)=0\Big].$$

Bemerkungen:

1. Sei $\emptyset \ne D \subset \mathbb{R}$ nach oben [nach unten] beschränkt, X ein normierter Raum, $f\colon D\to X$ und entweder $c\in X$ oder $X=\mathbb{R}$, $c\in\overline{\mathbb{R}}$. Dann gibt es keine Folge $(x_k)_{k\ge0}$ in D mit $(x_k)_{k\ge0}\to\infty$ $[\,(x_k)_{k\ge0}\to-\infty\,]$ und daher ist stets
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=c \quad [\,\lim_{x\to\infty} f(x)=c\,].$$
2. Sei $(a_k)_{k\ge0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist $a\colon \mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$, $k\mapsto a(k)=a_k$, eine Funktion, und die Definitionen des Folgengrenzwertes und des Funktionsgrenzwertes stimmen überein.

   Beweis. Wir müssen zeigen: Ist $a\in\overline{\mathbb{R}}$ und $(a_k)_{k\ge0}\to a$, so gilt für jede Folge $(m_k)_{k\ge0}$ in $\mathbb{N}$ mit $(m_k)_{k\ge0}\to\infty$ ebenfalls $(a_{m_k})_{k\ge0}\to a$. Ist $(m_k)_{k\ge0}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $(m_k)_{k\ge0}\to\infty$, so folgt $(m_k^{-1})_{k\ge0}\to0$ nach Satz 3.14, und die Behauptung folgt aus Satz 3.4. ☐
3. Sei $\emptyset\ne D\subset\mathbb{R}$, X ein normierter Raum, $f\colon D\to X$ und entweder $c\in X$ oder $X=\mathbb{R}$ und $c\in\overline{\mathbb{R}}$. Sei $D^-=\{-x\mid x\in D\}$ und $f^-\colon D^-\to X$ definiert durch $f^-(x)=f(-x)$. Dann gilt:
$$c=\lim_{x\to-\infty} f(x) \iff c=\lim_{x\to\infty} f^-(x)=\lim_{x\to\infty} f(-x)\,.$$
   Beweis. Für jede Folge $(a_k)_{k\ge0}$ in D gilt: $(a_k)_{k\ge0}\to-\infty \iff (-a_k)_{k\ge0}\to\infty$. ☐

Satz 4.7. *Sei $\emptyset\ne D\subset\mathbb{R}$, X ein normierter Raum, $f\colon D\to X$, $a\in\mathbb{R}$, und*
$$\textit{entweder } c\in X \quad \textit{oder} \quad X=\mathbb{R}\,,\ c\in\overline{\mathbb{R}}\,.$$

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   (a) $\lim_{x\to a-} f(x)=c$.
   (b) *Für jede streng monoton wachsende Folge $(x_n)_{n\ge0}$ in $D\cap(-\infty,a)$ mit $(x_n)_{n\ge0}\to a$ ist $(f(x_n))_{n\ge0}\to c$.*
   (c) *Falls $c\in X$:* $(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0})\ (\exists\delta\in\mathbb{R}_{>0})\ \big(\forall x\in D\cap(a-\delta,a)\big)\ \ \|f(x)-c\|<\varepsilon$.
   Falls $c=\infty$: $(\forall b\in\mathbb{R})\ (\exists\delta\in\mathbb{R}_{>0})\ \big(\forall x\in D\cap(a-\delta,a)\big)\ \ f(x)>b$.
2. *Sei* $\sup(D)=\infty$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
   (a) $\lim_{x\to\infty} f(x)=c$.
   (b) *Für jede streng monoton wachsende Folge $(x_n)_{n\ge0}$ in D mit $(x_n)_{n\ge0}\to\infty$ ist $(f(x_n))_{n\ge0}\to c$.*
   (c) *Falls $c\in X$:* $(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0})\ (\exists M\in\mathbb{R})\ \big(\forall x\in D\cap(M,\infty)\big)\ \ \|f(x)-c\|<\varepsilon$.
   Falls $c=\infty$: $(\forall b\in\mathbb{R})\ (\exists M\in\mathbb{R})\ (\forall x\in D\cap(M,\infty)\ \ f(x)>b$.
3. *Seien X und Y normierte Räume, $f\colon D\to X$, $f(D)\subset E\subset X$, $g\colon E\to Y$, und seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*
   - *entweder $b\in X$ oder $X=\mathbb{R}$ und $b\in\overline{\mathbb{R}}$,*
   - *entweder $c\in Y$ oder $Y=\mathbb{R}$ und $c\in\overline{\mathbb{R}}$,*
   - *entweder $b\notin E$ oder g stetig in b.*

Dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \ \wedge \ \lim_{y\to b} g(y) = c \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} (g\circ f)(x) = c.$$

Beweis. 1. (a) $\Rightarrow$ (b) Nach Definition.

(b) $\Rightarrow$ (c) FALL 1: $c \in X$.

Durch Widerspruch. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(\forall \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ \big(\exists x \in D \cap (a-\delta, a)\ \ \|f(x)-c\| \geq \varepsilon$. Sei $x_0 \in D \cap (-\infty, a)$ beliebig, und sei die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ in $D \cap (-\infty, a)$ rekursiv definiert, so dass

$$(\forall n \geq 1)\ \ x_n \in D \cap \Big(\max\Big\{x_{n-1}, a - \frac{1}{n}\Big\}, a\Big) \ \text{ und } \ \|f(x_n) - c\| \geq \varepsilon\,.$$

Dann ist $(x_n)_{n\geq 0}$ eine streng monoton wachsende Folge in $D \cap (-\infty, a)$ mit $(x_n)_{n\geq 0} \to a$ und $(f(x_n))_{n\geq 0} \not\to c$.

FALL 2: $c = \infty$.

Durch Widerspruch. Sei $b \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(\forall \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ \big(\exists x \in D \cap (a-\delta, a)\ \ f(x) \leq b$. Sei $x_0 \in D \cap (-\infty, a)$ beliebig, und sei die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ in $D \cap (-\infty, a)$ rekursiv definiert, so dass

$$(\forall n \geq 1)\ \ x_n \in D \cap \Big(\max\big\{x_{n-1}, a - \frac{1}{n}\big\}, a\Big) \ \text{ und } \ f(x_n) \leq b\,.$$

Dann ist $(x_n)_{n\geq 0}$ eine streng monoton wachsende Folge in $D \cap (-\infty, a)$ mit $(x_n)_{n\geq 0} \to a$ und $(f(x_n))_{n\geq 0} \not\to \infty$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Wie Satz 4.1.

2. (a) $\Rightarrow$ (b) Nach Definition.

(b) $\Rightarrow$ (c) FALL 1: $c \in X$.

Durch Widerspruch. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(\forall M \in \mathbb{R})\ \big(\exists x \in D \cap (M, \infty)\ \ \|f(x)-c\| \geq \varepsilon$. Sei $x_0 \in D$ beliebig, und sei die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ in D rekursiv definiert, so dass

$$(\forall n \geq 1)\ \ x_n \in D \cap \big(\max\{x_{n-1}, n\}, \infty\big) \ \text{ und } \ \|f(x_n) - c\| \geq \varepsilon\,.$$

Dann ist $(x_n)_{n\geq 0}$ eine streng monoton wachsende Folge in D mit $(x_n)_{n\geq 0} \to \infty$ und $(f(x_n))_{n\geq 0} \not\to c$.

FALL 2: $c = \infty$.

Durch Widerspruch. Sei $b \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(\forall M \in \mathbb{R})\ \big(\exists x \in D \cap (M, \infty)\big)\ \ f(x) \leq b$. Sei $x_0 \in D$ beliebig, und sei die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ in D rekursiv definiert, so dass

$$(\forall n \geq 1)\ \ x_n \in D \cap \big(\max\{x_{n-1}, n\}, \infty\big) \ \text{ und } \ f(x_n) \leq b\,.$$

Dann ist $(x_n)_{n\geq 0}$ eine streng monoton wachsende Folge in D mit $(x_n)_{n\geq 0} \to \infty$ und $(f(x_n))_{n\geq 0} \not\to \infty$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Wie Satz 4.1.

3. Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in D mit $(a_k)_{k\geq 0} \to \infty$. Dann folgt $(f(a_k))_{k\geq 0} \to b$, und es ist entweder $b \notin E$ oder g stetig in b. Daher folgt $((g\circ f)(a_k))_{k\geq 0} = g\big(f(a_k)\big)_{k\geq 0} \to c$. □

Satz 4.8. *Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, und sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ monoton wachsend [fallend]. Dann ist*

$$\lim_{x\to a-} f(x) \ = \ \sup f\big(D \cap (-\infty, a)\big) \qquad \Big[\lim_{x\to a-} f(x) \ = \ \inf f\big(D \cap (-\infty, a)\big)\Big]\,,$$

$$\lim_{x\to a+} f(x) \ = \ \inf f\big(D \cap (a, \infty)\big) \qquad \Big[\lim_{x\to a+} f(x) \ = \ \sup f\big(D \cap (a, \infty)\big)\Big]\,,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \sup f(D) \quad \big[\inf f(D)\big]\,, \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf f(D) \qquad \big[\sup f(D)\big]\,,$$

Beweis. Wir beweisen die erste Behauptung für monoton wachsendes f (die anderen Beweise sind analog). Im Falle $D\cap(-\infty,a)=\emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei also $D\cap(-\infty,a)\neq\emptyset$ und $c=\sup f\big(D\cap(-\infty,a)\big)\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

FALL 1: $c\in\mathbb{R}$. Wir zeigen: $(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0})\ (\exists\delta\in\mathbb{R}_{>0})\ (\forall x\in D\cap(a-\delta,a))\ \ |f(x)-c|<\varepsilon$.

Sei $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$. Wegen $\sup f\big(D\cap(-\infty,a)\big)=c$ gibt es ein $z\in D\cap(-\infty,a)$ mit $f(z)>c-\varepsilon$. Sei $\delta=a-z$ und $x\in D\cap(a-\delta,a)$. Dann ist $x>z$ und daher $c\geq f(x)\geq f(z)>c-\varepsilon$.

FALL 2: $c=\infty$. Wir zeigen: $(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0})\ (\exists\delta\in\mathbb{R}_{>0})\ (\forall x\in D\cap(a-\delta,a))\ \ f(x)>\varepsilon$.

Sei $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$. Wegen $\sup f\big(D\cap(-\infty,a)\big)=\infty$ gibt es ein $z\in D\cap(-\infty,a)$ mit $f(z)>\varepsilon$. Sei $\delta=a-z$ und $x\in D\cap(a-\delta,a)$. Dann ist $x>z$ und daher $f(x)\geq f(z)>\varepsilon$. $\square$

Satz 4.9 (Wachstum der Polynomfunktionen)**.**

1. *Sei* $f\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$, $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ *mit* $n\in\mathbb{N}_0$, $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$ *und* $a_n\neq 0$. *Dann gilt für alle* $x\in\mathbb{C}$*:*

$$|x|\geq\max\Big\{1,\ \frac{2}{|a_n|}\sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu|\Big\} \quad\Longrightarrow\quad \frac12\,|a_nx^n|\leq|f(x)|\leq\frac32\,|a_nx^n|\,.$$

2. *Sei* $f\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ *mit* $n\in\mathbb{N}$, $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ *und* $a_n>0$. *Dann ist*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=(-1)^n\infty\,.$$

Beweis. 1. Sei $x\in\mathbb{C}$. Aus

$$|x|\geq\max\Big\{1,\ \frac{2}{|a_n|}\sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu|\Big\} \quad \text{folgt} \quad \frac{1}{|a_nx^n|}\Big|\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu x^\nu\Big|\leq\frac{1}{|a_nx|}\sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu|\leq\frac12$$

und daher

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |a_nx^n|\,\Big|1+\frac{1}{|a_nx^n|}\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu x^\nu\Big| \leq |a_nx^n|\Big[1+\frac{1}{|a_nx^n|}\Big|\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu x^\nu\Big|\Big] \leq \frac32\,|a_nx^n| \\ &\geq |a_nx^n|\Big[1-\frac{1}{|a_nx^n|}\Big|\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu x^\nu\Big|\Big] \geq \frac12\,|a_nx^n|\,.\end{aligned}$$

2. Es ist

$$f(x)=a_nx^n\Big[1+\Big(\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\ldots+\frac{a_0}{a_nx^n}\Big)\Big]\,, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\Big(\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\ldots+\frac{a_0}{a_nx^n}\Big)=0\,,$$

$$\lim_{x\to\infty}a_nx^n=\infty\,, \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} = \begin{cases}\infty\,, & \text{falls } n \text{ gerade}\,,\\ -\infty\,, & \text{falls } n \text{ ungerade}\,.\end{cases} \quad \square$$

Satz 4.10 (Wachstum der rationalen Funktionen)**.** *Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $h\colon D \to \mathbb{R}$ eine rationale Funktion mit maximalem Definitionsbereich D (dann ist $\sup(D) = \infty$ und $\inf(D) = -\infty$). Sei*

$$(\forall x \in D) \quad h(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_{m-1} \in \mathbb{R}$ und $a_n > 0$.

1. $n < m \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$.
2. $n = m \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = a_n$.
3. $n > m \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = (-1)^{n-m}\infty$.
4. $n = m+1 \quad \Longrightarrow$ *die Gerade $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a_n x + (a_{n-1} - b_{n-2}a_n)\}$ ist eine Asymptote an* $\mathrm{Graph}(h)$ *in ∞ und in $-\infty$.*

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}^\times$ ist

$$h(x) \;=\; x^{n-m}\,\frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}}\,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} \;=\; a_n\,,$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \infty\,, & \text{falls} \quad n > m\,, \\ 1\,, & \text{falls} \quad n = m\,, \\ 0\,, & \text{falls} \quad n < m\,, \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} x^{n-m} = \begin{cases} (-1)^{n-m}\infty\,, & \text{falls} \quad n > m\,, \\ 1\,, & \text{falls} \quad n = m\,, \\ 0\,, & \text{falls} \quad n < m\,. \end{cases}$$

Damit folgen 1., 2. und 3.

4. Es ist

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\pm\infty} \big[\, h(x) - (a_n x + a_{n-1} - b_{n-2}a_n)\big] \\ &\quad = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots) - (a_n x + a_{n-1} - b_{n-2}a_n)(x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots)}{x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots} \\ &\quad = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(a_{n-2} - a_{n-1} - b_{n-2}a_n)x^{n-2} + \ldots}{x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots} \;=\; 0\,. \quad \square \end{aligned}$$

4.3. Stetige Funktionen auf Intervallen; Logarithmen

Satz 4.11. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$.*

A. *Sei f stetig.*

1. (Zwischenwertsatz von Bolzano). *Seien $a, b \in I$, $a < b$, $y \in \mathbb{R}$, und sei entweder $f(a) < y < f(b)$ oder $f(a) > y > f(b)$. Dann gibt es ein $z \in (a,b)$ mit $f(z) = y$.*
2. *Ist f nicht konstant, so ist $f(I)$ ist ein Intervall.*
3. *Ist f injektiv, so ist f streng monoton.*

4. *Sei* $f: I \to \mathbb{R}$ *streng monoton wachsend* [*fallend*], $a = \inf(I)$, $b = \sup(I)$, $c = \inf f(I)$ *und* $d = \sup f(I)$. *Dann ist* $c < d$, *und es gilt*:

$$\begin{aligned} I = [a,b] &\implies f(I) = [c,d] = [f(a), f(b)] \quad \big[\, f(I) = [c,d] = [f(b), f(a)]\,\big] \\ I = [a,b) &\implies f(I) = [c,d) = [f(a), d) \quad \big[\, f(I) = (c, f(a)\,\big] \\ I = (a,b] &\implies f(I) = (c,d] = (c, f(b)] \quad \big[\, f(I) = [f(b), d\,\big) \\ I = (a,b) &\implies f(I) = (c,d)\,. \end{aligned}$$

B. *Ist* f *streng monoton, so ist* $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ *stetig.*

Beweis. **A.** 1. Sei $f(a) < y < f(b)$ und $z = \sup\{x \in [a,b] \mid f(x) \le y\}$. Nach Satz 3.15 gibt es eine Folge $(x_k)_{k\ge0}$ in $[a,b]$, so dass $(\forall k \in \mathbb{N}_0)$ $f(x_k) \le y$ und $(x_k)_{k\ge0} \to z$. Dann folgt $(f(x_k))_{k\ge0} \to f(z)$, also auch $f(z) \le y$ und daher $z < b$. Wäre $f(z) < y$, so gäbe es nach Satz 4.2 ein $z' \in (z,b)$ mit $f(z') < y$, ein Widerspruch. Daher ist $f(z) = y$.

2. Nach 1. und Satz 1.16.

3. Angenommen, f sei nicht streng monoton. Dann gibt es x_1, x_2, $x_3 \in I$ mit $x_1 < x_2 < x_3$ und

entweder $\big[\, f(x_1) < f(x_2)$ und $f(x_2) > f(x_3)\,\big]$ oder $\big[\, f(x_1) > f(x_2)$ und $f(x_2) < f(x_3)\,\big]$.

Wir nehmen an, es sei $f(x_1) < f(x_2)$ und $f(x_2) > f(x_3)$ (im anderen Falle argumentiert man analog). Wegen der Injektivität von f ist $f(x_1) \ne f(x_3)$.

FALL 1: $f(x_1) > f(x_3)$. Wegen $f(x_3) < f(x_1) < f(x_2)$ gibt es nach 1. ein $y \in (x_2, x_3)$ mit $f(y) = f(x_1)$, ein Widerspruch.

FALL 2: $f(x_1) < f(x_3)$. Wegen $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ gibt es nach 1. ein $y \in (x_1, x_2)$ mit $f(y) = f(x_3)$, ein Widerspruch.

4. Sei f stetig und streng monoton wachsend (im anderen Falle argumentiert man analog). Nach 2. ist $f(I)$ ein Intervall, also $c < d$ und $(c,d) \subset f(I) \subset [c,d]$. Wir müssen daher die folgenden vier Aussagen zeigen:

a. $a \in I \implies c = f(a)$. **b.** $a \notin I \implies c \notin f(I)$.
c. $b \in I \implies d = f(b)$. **d.** $b \notin I \implies d \notin f(I)$.

Wir zeigen **a.** und **b.** (die beiden anderen Aussagen beweist man analog).

a. Sei $a \in I$. Dann ist $c \le f(a)$, und wir nehmen an, es sei $c < f(a)$. Sei $y \in (c, f(a))$. Dann ist $y \in f(I)$, und nach 1. gibt es ein $z \in I$, so dass $f(z) = y$. Dann ist aber $z > a$ und $f(z) < f(a)$, ein Widerspruch.

b. Wir nehmen an, es sei $a \notin I$ und $c \in f(I)$, $c = f(y)$ mit $y \in I$, also $y > a$. Ist $x \in (a,y)$, so ist $x \in I$ und daher $c \le f(x) < f(y) = c$, ein Widerspruch.

B. Sei f streng monoton wachsend (den anderen Fall behandelt man analog), $y_0 \in f(I)$ und $x_0 = f^{-1}(y_0) \in I$. Dann ist auch f^{-1} streng monoton wachsend, und wir müssen zeigen:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ \big(\forall y \in f(I) \cap (y_0 - \delta, y_0 + \delta)\big)\ \ f^{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\,.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

FALL 1: $x_0 \in I^\circ$.

Sei $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon]$ mit $[x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0] \subset I$. Dann ist $f(x_0 - \varepsilon_0) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon_0)$, und es sei $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(x_0 - \varepsilon_0) < y_0 - \delta < y_0 + \delta < f(x_0 + \varepsilon_0)$. Sei nun $y \in f(I) \cap (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$. Dann ist $f(x_0 - \varepsilon_0) < y < f(x_0 + \varepsilon_0)$ und daher

$$x_0 - \varepsilon \le x_0 - \varepsilon_0 = f^{-1}\big(f(x_0 - \varepsilon_0)\big) < f^{-1}(y) < f^{-1}\big(f(x_0 + \varepsilon_0)\big) = x_0 + \varepsilon_0 \le x_0 + \varepsilon\,.$$

FALL 2: $x_0 = \min(I)$.

Sei $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon]$ mit $[x_0, x_0+\varepsilon_0] \subset I$. Dann ist $y_0 = f(x_0) < f(x_0+\varepsilon_0)$, und da f streng monoton wächst, ist $y_0 = \min\bigl(f(I)\bigr)$. Sei $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $y_0 + \delta < f(x_0+\varepsilon_0)$ und $y \in f(I) \cap (y_0-\delta, y_0+\delta)$, also $y_0 \le y \le y_0+\delta$. Dann folgt

$$x_0 = f^{-1}(y_0) \le f^{-1}(y) \le f^{-1}(y_0+\delta) < f^{-1}\bigl(f(x_0+\varepsilon_0)\bigr) = x_0+\varepsilon_0 \le x_0 + \varepsilon\,.$$

FALL 3: $x_0 = \max(I)$. Analog zu FALL 2. □

Satz und Definition 4.12.

1. *Die Funktion* $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definiert durch* $(a, \rho) \mapsto a^\rho$, *ist stetig.*
2. *Sei* $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Die Funktion*

   $$\mathrm{Pot}_\rho \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}\,, \quad \textit{definiert durch} \quad \mathrm{Pot}_\rho(x) = x^\rho\,,$$

   ist stetig und streng monoton (*wachsend, falls* $\rho > 0$, *und fallend, falls* $\rho < 0$).

   Es ist $\mathrm{Pot}_\rho(\mathbb{R}_{>0}) = \mathbb{R}_{>0}$, *und* ${\mathrm{Pot}_\rho}^{-1} = \mathrm{Pot}_{1/\rho}$.

   Pot_ρ heißt *Potenzfunktion zum Exponenten* ρ.

   Im Falle $\rho > 0$ *ist* $\lim_{x\to 0} x^\rho = 0$, *und* Pot_ρ *hat eine stetige Ergänzung*

   $$\mathrm{Pot}_\rho \colon \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R} \quad \textit{mit} \quad \mathrm{Pot}_\rho(0) = 0^\rho = 0\,.$$

3. *Sei* $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$. *Die Funktion*

   $${}^a\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \textit{definiert durch} \quad {}^a\exp(x) = a^x\,,$$

   ist stetig und streng monoton (*wachsend, falls* $a > 1$, *und fallend, falls* $a < 1$).

   Es ist ${}^a\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$.

   ${}^a\exp$ heißt *Exponentialfunktion zur Basis* a. Ihre Umkehrfunktion

   $${}^a\log = ({}^a\exp)^{-1} \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$

   heißt *Logarithmusfunktion zur Basis* a.

   Die Funktion ${}^a\log \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ *ist stetig und streng monoton* (*wachsend, falls* $a > 1$, *und fallend, falls* $a < 1$), *und es ist* ${}^a\log(\mathbb{R}_{>0}) = \mathbb{R}$.

   Die Funktion ${}^{10}\log$ heißt *dekadische* oder *Brigg'sche Logarithmusfunktion*, die Funktion ${}^{\mathsf{e}}\log = \log = \ln$ heißt *natürliche Logarithmusfunktion*.

Beweis. 1. Für jedes $M \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ genügt die Funktion $(a, \rho) \mapsto a^\rho$ in $(M^{-1}, M) \times (-M, M)$ nach Satz 3.12 einer Lipschitzbedingung und ist daher nach Satz 4.4 stetig.

2. Die Funktion $\mathrm{Pot}_\rho = \bigl(x \mapsto (x, \rho) \mapsto x^\rho\bigr)$ ist stetig nach 1. und Satz 4.6. Nach Satz 3.12 ist Pot_ρ streng monoton (wachsend, falls $\rho > 0$, und fallend, falls $\rho < 0$), es ist $\mathrm{Pot}_\rho(\mathbb{R}_{>0}) \subset \mathbb{R}_{>0}$ und $\mathrm{Pot}_\rho^{-1} = \mathrm{Pot}_{1/\rho}$. Ist $y \in \mathbb{R}_{>0}$, so folgt $y = \mathrm{Pot}_\rho\bigl(\mathrm{Pot}_{1/\rho}(y)\bigr) \in \mathrm{Pot}_\rho(\mathbb{R}_{>0})$ und daher $\mathrm{Pot}_\rho(\mathbb{R}_{>0}) = \mathbb{R}_{>0}$. Im Falle $\rho > 0$ ist Pot_ρ streng monoton wachsend und daher

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{Pot}_\rho(x) = 0\,.$$

3. Die Funktion ${}^a\exp = \bigl(x \mapsto (a, x) \mapsto a^x\bigr)$ ist stetig nach 1. und Satz 4.6. Nach Satz 3.12 ist ${}^a\exp$ streng monoton (wachsend, falls $a > 1$, und fallend, falls $a < 1$), und es ist

${}^a\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{>0}$. Auf Grund von Beispiel 2 nach Satz 3.7 und Beispiel 1 nach Satz 3.14 ist

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0\,, & \text{falls} \quad a<1\,,\\ \infty\,, & \text{falls} \quad a>1\,,\end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} a^{-n} = \begin{cases} \infty\,, & \text{falls} \quad a<1\,,\\ 0\,, & \text{falls} \quad a>1\,.\end{cases}$$

Daher gilt: $(\forall y \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists x_1,\, x_2 \in \mathbb{R})\ \ a^{x_1} < y < a^{x_2}$, und mit Hilfe von Satz 4.11 folgt ${}^a\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$.

Mit ${}^a\exp$ ist auch ${}^a\log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig (nach Satz 4.11) und streng monoton, und ${}^a\log(\mathbb{R}_{>0}) = \mathbb{R}$. □

Satz 4.13 (Rechenregeln für Logarithmen)**.** *Seien* $a,\, b \in \mathbb{R}_{>0}\setminus\{1\}$, $x,\, y \in \mathbb{R}_{>0}$ *und* $\rho \in \mathbb{R}$.

$${}^a\log a = 1\,, \quad {}^a\log 1 = 0\,, \quad a^{{}^a\log x} = x\,, \quad {}^a\log(xy) = {}^a\log x + {}^a\log y\,,$$

$${}^a\log\Big(\frac{1}{x}\Big) = -\,{}^a\log x\,, \quad {}^a\log(x^\rho) = \rho\,{}^a\log x \quad \textit{und} \quad {}^b\log x = (\,{}^a\log x)\,(\,{}^b\log a)\,.$$

Beweis. Für $z \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt: $u = a^z \iff z = {}^a\log u$. Damit folgen die ersten drei Gleichungen unmittelbar.

Wegen

$$a^{{}^a\log x + {}^a\log y} = a^{{}^a\log x}\, a^{{}^a\log y} = xy \quad \text{folgt} \quad {}^a\log(xy) = {}^a\log x + {}^a\log y\,,$$

und wegen

$${}^a\log x + {}^a\log\Big(\frac{1}{x}\Big) = {}^a\log 1 = 0 \quad \text{folgt} \quad {}^a\log\Big(\frac{1}{x}\Big) = -\,{}^a\log x\,.$$

Es ist

$$a^{\rho\,({}^a\log x)} = \big(a^{{}^a\log x}\big)^\rho = x^\rho\,, \quad \text{also} \quad {}^a\log(x^\rho) = \rho\,{}^a\log x\,,$$

und daher

$${}^b\log x = {}^b\log\big(a^{{}^a\log x}\big) = (\,{}^a\log x)\,(\,{}^b\log a)\,.$$ □

Satz 4.14 (Grenzwertsätze für Potenzen und Logarithmen)**.** *Seien* $a \in \mathbb{R}_{>1}$ *und* $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\rho} = \infty\,;$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^\rho a^{-x} = 0\,;$ 3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{{}^a\log x}{x^\rho} = 0\,;$ 4. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^\rho\,{}^a\log x = 0\,;$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a\,;$ 6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{{}^a\log(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}\,;$ 7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\rho - 1}{x} = \rho\,.$

Beweis. 1. Auf Grund von Beispiel 5 nach Satz 3.7 gilt: Ist $b \in \mathbb{R}$ mit $|b| < 1$ und $p \in \mathbb{N}$, so folgt $(b^n n^p)_{n\ge 1} \to 0$. Wir müssen zeigen:

Für jede Folge $(x_k)_{k\ge 0}$ in $\mathbb{R}_{>1}$ mit $(x_k)_{k\ge 0} \to \infty$ ist $(x_k^{-\rho} a^{x_k})_{k\ge 0} \to \infty$.

Sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p > \rho$ und $(x_k)_{k\ge 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{>1}$. Für $k \ge 0$ sei $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k - 1 \le x_k < n_k$. Dann ist $(n_k)_{k\ge 0} \to \infty$, für alle $k \ge 0$ ist $x_k^\rho < n_k^\rho < n_k^p$, und

$$x_k^{-\rho} a^{x_k} \;\ge\; n_k^{-p} a^{n_k - 1} \;=\; a^{-1}\big((a^{-1})^{n_k}\, n_k^p\big)^{-1} \;\to\; \infty \quad (\text{nach Satz } 3.14).$$

2. Nach 1. und Satz 3.14.

3. Sei $(x_k)_{k\ge 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{>0}$ mit $(x_k)_{k\ge 0} \to \infty$, und sei $y_k = {}^a\log x_k$, also $x_k = a^{y_k}$. Nach Satz 4.8 ist dann auch $(y_k)_{k\ge 0} \to \infty$, und mit 1. und Satz 3.14 folgt

$$\frac{{}^a\log x_k}{x_k^\rho} \;=\; \frac{y_k}{a^{\rho y_k}} \;=\; \Big(\frac{(a^\rho)^{y_k}}{y_k}\Big)^{-1} \;\to\; 0\,.$$

4. Nach 3. und Satz 3.14.

5. Sei $(x_k)_{k\ge0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^\times$ mit $(x_k)_{k\ge0} \to 0$, und sei $y_k = a^{x_k} - 1 \in \mathbb{R}^\times$, also $x_k \log a = \log(y_k+1)$. Wegen der Stetigkeit von ${}^a\exp$ folgt $(y_k)_{k\ge0} \to 0$, und wegen der Stetigkeit von $\log$ folgt $\log\bigl[(1+y_k)^{1/y_k}\bigr] \to \log \mathsf{e} = 1$ nach Satz 3.13. Damit erhalten wir

$$\frac{a^{x_k}-1}{x_k} = \frac{y_k}{\log(y_k+1)}\log a = \frac{1}{\log\bigl[(1+y_k)^{1/y_k}\bigr]}\log a \to \log a\,.$$

6. Sei $(x_k)_{k\ge0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^\times$ mit $(x_k)_{k\ge0} \to 0$, ohne Einschränkung $(\forall k \ge 0)\ |x_k| < 1$, und sei $y_k = {}^a\log(1+x_k) \in \mathbb{R}^\times$. Wegen der Stetigkeit von $\log$ folgt $(y_k)_{k\ge0} \to 0$ und daher nach 5.

$$\frac{{}^a\log(1+x_k)}{x_k} = \frac{y_k}{a^{y_k}-1} \to \frac{1}{\log a}\,.$$

7. Sei $(x_k)_{k\ge0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^\times$ mit $(x_k)_{k\ge0} \to 0$, ohne Einschränkung $(\forall k \ge 0)\ |x_k| < 1$. Sei $z_k = \log(1+x_k)$ und $y_k = \rho z_k$. Dann folgt $(y_k)_{k\ge0} \to 0$, $(z_k)_{k\ge0} \to 0$, und daher nach 5.

$$\frac{(1+x_k)^\rho - 1}{x_k} = \frac{\mathsf{e}^{y_k}-1}{\mathsf{e}^{z_k}-1} = \Bigl(\frac{\mathsf{e}^{y_k}-1}{y_k}\Bigr)\Bigl(\frac{\mathsf{e}^{z_k}-1}{z_k}\Bigr)^{-1}\frac{y_k}{z_k} \to \rho\,. \qquad \square$$

4.4. Kompaktheit

Satz und Definition 4.15. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $C \subset X$.*

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   (a) *Für jede Menge $\mathfrak{U}$ offener Teilmengen von X gilt:*

   $$\textit{Ist } C \subset \bigcup_{U\in\mathfrak{U}} U\,, \quad \textit{so existiert eine endliche Teilmenge } \mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U} \textit{ mit } C \subset \bigcup_{U\in\mathfrak{U}_0} U$$

   Man nennt $\mathfrak{U}$ eine *offene Überdeckung* von C und $\mathfrak{U}_0$ eine *endliche Teilüberdeckung.*

   (b) *Jede Folge in C hat einen Häufungswert in C.*

   (c) *Jede Cauchyfolge in C hat einen Grenzwert in C, und für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ hat die offene Überdeckung $\{B_\varepsilon(a) \mid a \in C\}$ von C eine endliche Teilüberdeckung.*

   Man sagt dann, C ist vollständig und totalbeschränkt.

   Eine Menge C mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) heißt *kompakt.*
2. *Ist C kompakt, so ist C abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. 1. (a) $\Rightarrow$ (b) Sei $(a_k)_{k\ge0}$ eine Folge in C ohne Häufungswert in C. Nach Satz 3.16 gilt:

$$(\forall\, a \in C)\ (\exists\, U_a \in \mathcal{U}(a))\ \ |\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k \in U_a\}| < \infty\,.$$

Für $a \in C$ ist dann auch $a \in U_a^\circ$. Daher ist $\{U_a^\circ \mid a \in C\}$ eine offene Überdeckung von C und besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Das ist aber ein Widerspruch, da jedes U_a° nur endlich viele Folgenglieder enthält.

(b) $\Rightarrow$ (c) Nach Satz 3.18 hat jede Cauchyfolge in C einen Grenzwert in C. Wir nehmen nun an, es gebe ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass die offene Überdeckung $\{B_\varepsilon(a) \mid a \in C\}$ von C keine endliche Teilüberdeckung enthält. Dann gibt es eine Folge $(a_k)_{k\geq 0}$ in C, so dass

$$(\forall k \in \mathbb{N}_0)\;\; a_{k+1} \notin \bigcup_{i=0}^{k} B_\varepsilon(a_i)\,, \quad \text{also insbesondere} \quad (\forall k > l \geq 0)\;\; \|a_k - a_l\| \geq \varepsilon\,.$$

Für jedes $a \in C$ ist daher $|\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k \in B_{\varepsilon/2}(a)\}| \leq 1$, also a kein Häufungswert von $(a_k)_{k\geq 0}$, ein Widerspruch.

(c) $\Rightarrow$ (a) Wir nehmen im Gegenteil an, es gebe eine offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ von C ohne endliche Teilüberdeckung. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $E_n \subset C$ eine endliche Menge, so dass

$$C \subset \bigcup_{a\in E_n} B_{1/2^n}(a)\,, \quad \text{und sei} \quad \Omega = \Big\{ C' \subset C \;\Big|\; \text{für jede endliche Menge } \mathfrak{E} \subset \mathfrak{U} \text{ ist } C' \not\subset \bigcup_{U\in\mathfrak{E}} U \Big\}$$

Wir konstruieren (rekursiv) eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in C mit folgender Eigenschaft:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $a_n \in E_n$, $C \cap B_{1/2^n}(a_n) \in \Omega$ und $B_{1/2^n}(a_n) \cap B_{1/2^{n+1}}(a_{n+1}) \neq \emptyset$.

Wegen

$$C = \bigcup_{a\in E_0} (C \cap B_1(a)) \;\in\; \Omega$$

gibt es ein $a_0 \in E_0$ mit $C \cap B_1(a_0) \in \Omega$. Sei nun $n \geq 0$, $a_n \in E_n$ mit $C \cap B_{1/2^n}(a_n) \in \Omega$, und sei $E'_{n+1} = \{a \in E_{n+1} \mid B_{1/2^{n+1}}(a) \cap B_{1/2^n}(a_n) \neq \emptyset\}$. Wegen

$$C \cap B_{1/2^n}(a_n) = \bigcup_{a\in E'_{n+1}} C \cap B_{1/2^{n+1}}(a)$$

gibt es ein $a_{n+1} \in E_{n+1}$ mit $C \cap B_{1/2^{n+1}}(a_{n+1}) \in \Omega$ und $B_{1/2^n}(a_n) \cap B_{1/2^{n+1}}(a_{n+1}) \neq \emptyset$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in B_{1/2^n}(a_n) \cap B_{1/2^{n+1}}(a_{n+1})$. Dann folgt

$$\|a_{n+1} - a_n\| \leq \|a_{n+1} - z\| + \|z - a_n\| < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^{n+1}}\,,$$

und für $k > n$ ist

$$\|a_k - a_n\| = \Big\|\sum_{i=n}^{k-1}(a_{i+1} - a_i)\Big\| \leq \sum_{i=n}^{k-1} \|a_{i+1} - a_i\| < \sum_{i=n}^{k-1} \frac{3}{2^{i+1}} = 3(2^{-n} - 2^{-k}) < 3 \cdot 2^{-n}\,,$$

also $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchyfolge $\big[\,(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\;(\exists n_0 \geq 0)\;(\forall k > n \geq n_0)\;\; \|a_k - a_n\| < \varepsilon\,\big]$. Nach Voraussetzung gibt es ein $a \in C$ mit $(a_n)_{n\geq 0} \to a$. Sei $U \in \mathfrak{U}$ mit $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_r(a) \subset U$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\|a - a_n\| < \frac{r}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}\,.$$

Ist nun $x \in B_{1/2^n}(a_n)$, so folgt

$$\|x - a\| \leq \|x - a_n\| + \|a_n - a\| < \frac{1}{2^n} + \frac{r}{2} < r\,, \quad \text{also} \quad x \in B_r(a) \subset U\,.$$

Daher ist $B_{1/2^n}(a_n) \subset U$, im Widerspruch zu $C \cap B_{1/2^n}(a_n) \in \Omega$.

2. Sei C kompakt und $a \in \overline{C}$. Nach Satz 3.2 gibt es eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in C mit $(a_n)_{n\geq 0} \to a$. Nach 1. hat $(a_n)_{n\geq 0}$ einen Häufungswert in C, also folgt $a \in C$. Daher ist C abgeschlossen.

Nach 1. gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in E$, so dass $C \subset B_1(a_1) \cup \ldots \cup B_1(a_n)$. Ist nun $a \in E$, so gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a \in B_1(a_i)$, und es folgt

$$\|a\| \le \|a - a_i\| + \|a_i\| \le 1 + \max\{\|a_1\|, \ldots, \|a_n\|\}\,, \quad \text{also ist } C \text{ beschränkt.} \qquad \square$$

Satz 4.16.

1. *Sei X ein endlich-dimensionales $\mathbb{R}$-Vektorraum und $C \subset X$ abgeschlossen und beschränkt (bezüglich irgendeiner Norm). Dann ist C kompakt.*
2. *Jede nicht-leere kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat eine Maximum und ein Minimum.*

Beweis. Wegen des Normäquivalenzsatzes kommt es auf die Wahl der Norm nicht an. Sei im Folgenden $\|\cdot\|$ eine Norm auf X.

1. Sei $C \subset X$ abgeschlossen und beschränkt, und sei $(a_n)_{n\ge 0}$ eine Folge in C. Dann ist $(a_n)_{n\ge 0}$ beschränkt und hat nach Satz 3.20 eine Häufungswert $a \in X$. Also gibt es eine gegen a konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\ge 0}$, und nach Satz 3.2 folgt $a \in \overline{C} = C$. Daher ist C kompakt nach Satz 4.15.

2. Sei $\emptyset \ne A \subset \mathbb{R}$ kompakt, also abgeschlossen und beschränkt, und sei $a = \inf(A) \in \mathbb{R}$. Nach Satz 3.15 gibt es eine Folge $(a_n)_{n\ge 0}$ in A mit $(a_n)_{n\ge 0} \to a$, und nach Satz 3.2 ist $a \in \overline{A} = A$, also $a = \min(A)$. Die Existenz des Maximums beweist man analog. $\square$

Bemerkung:
Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

4.5. Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Definition 4.3. Sei X ein normierter Raum und $A \subset D \subset X$. Man sagt, A ist *relativ offen* [*relativ abgeschlossen*] in D, wenn es eine offene [abgeschlossene] Menge $C \subset X$ gibt mit $A = D \cap C$.

Satz 4.17. *Seien X und Y normierte Räume, $\emptyset \ne D \subset X$ und $f\colon D \to Y$.*

1. *Es sind äquivalent:*
   (a) *f ist stetig.*
   (b) *Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ relativ abgeschlossen in D.*
   (c) *Für jede offene Teilmenge $V \subset Y$ ist $f^{-1}(V)$ relativ offen in D.*
2. *Sei D kompakt und f stetig.*
   (a) *$f(D)$ ist kompakt, und die Menge $\big\{\|f(x)\| \bigm| x \in D\big\} \subset \mathbb{R}$ hat ein Miniumum und ein Maximum. Ist insbesondere $Y = \mathbb{R}$, so hat auch $f(D)$ ein Miniumum und ein Maximum.*
   (b) *Ist f injektiv, so ist auch $f^{-1}\colon f(D) \to X$ stetig.*

Beweis. 1. (a) $\Rightarrow$ (b) Sei $A \subset Y$ abgeschlossen. Wir zeigen $f^{-1}(A) = \overline{f^{-1}(A)} \cap D$. Offensichtlich ist $f^{-1}(A) \subset \overline{f^{-1}(A)} \cap D$.

Sei also $a \in \overline{f^{-1}(A)} \cap D$. Nach Satz 3.2 gibt es eine Folge $(a_n)_{n\ge 0}$ in $f^{-1}(A)$ mit $(a_n)_{n\ge 0} \to a$. Wegen der Stetigkeit von f in a ist dann $(f(a_n))_{n\ge 0} \to f(a)$, und da A abgeschlossen ist, folgt $f(a) \in A$, also $a \in f^{-1}(A) \cap D$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sei $V \subset Y$ offen. Dann ist $Y \setminus V$ abgeschlossen, also $f^{-1}(Y \setminus V) = A \cap D$ mit einer abgeschlossenen Menge $A \subset X$. Daher ist $f^{-1}(V) = D \setminus f^{-1}(Y \setminus V) = D \cap (X \setminus A)$ relativ offen in D.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sei $a \in D$ und $V \in \mathcal{U}(f(a))$. Dann gibt es eine offene Menge $U \subset X$ mit $f^{-1}(V^\circ) = U \cap D$. Wegen $f(a) \in V^\circ$ ist $a \in U$, also $U \in \mathcal{U}(a)$ und $f(U \cap D) \subset f(f^{-1}(V)) \subset V$.

2. (a) Es genügt, die Kompaktheit von $f(D)$ zu beweisen. Sei $\mathfrak{V}$ eine offene Überdeckung von $f(D)$. Nach 1. gibt es zu jedem $V \in \mathfrak{V}$ eine offene Menge $U_V \subset X$ mit $f^{-1}(V) = U_V \cap D$. Dann ist

$$D = f^{-1}(f(D)) \subset \bigcup_{V \in \mathfrak{V}} f^{-1}(V) \subset \bigcup_{V \in \mathfrak{V}} U_V\,,$$

also $\{U_V \mid U \in \mathfrak{V}\}$ eine offene Überdeckung von D. Da D kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $\mathfrak{V}_0 \subset \mathfrak{V}$ mit

$$D \subset \bigcup_{V \in \mathfrak{V}_0} U_V\,, \quad \text{also} \quad D = \bigcup_{V \in \mathfrak{V}_0} U_V \cap D\,, \quad \text{und daher} \quad f(D) = \bigcup_{V \in \mathfrak{V}_0} f(U_V \cap D) \subset \bigcup_{V \in \mathfrak{V}_0} V\,.$$

(b) Wir müssen zeigen: $(\forall\, a \in D)$ f^{-1} stetig in $f(a)$. Angenommen, das sei falsch. Dann gibt es ein $a \in D$ und eine Folge $(y_n)_{n \geq 0}$ in $f(D)$ mit $(y_n)_{n \geq 0} \to f(a)$ und $(f^{-1}(y_n))_{n \geq 0} \not\to a$. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass die Menge $T = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid f^{-1}(y_n) \notin B_\varepsilon(a)\}$ unendlich ist. Da D kompakt ist, hat die Folge $(f^{-1}(y_n))_{n \in T}$ einen Häufungswert $c \in D$. Sei $T_1 \subset T$ unendlich mit $(f^{-1}(y_n))_{n \in T_1} \to c$. Da $D \setminus B_\varepsilon(a) = D \cap (X \setminus B_\varepsilon(a))$ abgeschlossen ist, folgt $c \notin B_\varepsilon(a)$, und wegen $(y_n)_{n \in T_1} = f(f^{-1}(y_n))_{n \in T_1} \to f(c)$ folgt $f(c) = f(a)$ und $c = a$, ein Widerspruch! □

Satz 4.18. *Sei* $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *und* $n = \mathrm{grad}(f) \in \mathbb{N}$.

1. *Ist n ungerade, so ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Insbesondere besitzt f in $\mathbb{R}$ eine Nullstelle.*
2. *Sei n gerade und a der Leitkoeffizient von f. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(\mathbb{R}) = [c, \infty)\,, \quad \textit{falls} \quad a > 0\,, \qquad \textit{und} \qquad f(\mathbb{R}) = (-\infty, c]\,, \ \textit{falls} \ \ a < 0\,.$$

Beweis. 1. Nach den Sätzen 4.9 und 4.11.

2. Sei $a > 0$ (im Falle $a < 0$ betrachte man $-f$). Nach Satz 4.9 ist

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty\,, \quad \text{folglich} \quad (\exists b \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-b, b])\ \ |f(x)| > |f(0)|\,.$$

Es folgt $\inf f(\mathbb{R}) = \inf f([-b, b]) = \min f([-b, b])$ nach Satz 4.16, und mit Satz 4.11 folgt die Behauptung. □

4.6. Folgen stetiger Funktionen

Beispiel:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = x^n$. Dann ist

$$\big(f_n(x)\big)_{n \geq 1} \to f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls} \quad x < 1\,, \\ 1\,, & \text{falls} \quad x = 1\,. \end{cases}$$

$(\forall n \geq 1)$ f_n stetig, aber f ist unstetig!

Definition 4.4. Seien X und Y normierte Räume, $\emptyset \ne D \subset X$ und $\|\cdot\|_D$ die Supremumsnorm auf $\operatorname{Abb}(D, Y)$ (siehe Definition 2.11). Sei $(f_n \colon D \to Y)_{n \ge 0}$ eine Folge von Abbildungen und $f \colon D \to X$.

1. Man sagt, die Folge $(f_n)_{n\ge 0}$ *konvergiert (punktweise)* gegen f, $(f_n)_{n\ge 0} \to f$, wenn $(\forall x \in D)\ (f_n(x))_{n\ge 0} \to f(x)$. Explizit:
$$(\forall x \in D)\ (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \ge n_0)\ \ \|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon\,.$$
2. Man sagt, die Folge $(f_n)_{n\ge 0}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen f, $(f_n)_{n\ge 0} \rightrightarrows f$, wenn $(\|f - f_n\|_D)_{n\ge 0} \to 0$. Explizit:
$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \ge n_0)\ (\forall x \in D)\ \ \|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon\,.$$
3. Man sagt, die Folge $(f_n)_{n\ge 0}$ *konvergiert lokal gleichmäßig* gegen f,
$$(f_n)_{n\ge 0} \rightrightarrows_{\text{lok}} f\,, \quad \text{wenn} \quad (\forall x \in D)\ (\exists U \in \mathcal{U}(x))\ (f_n \,|\, U \cap D)_{n\ge 0} \rightrightarrows f \,|\, U \cap D\,.$$
4. Sei $\emptyset \ne D_0 \subset D$. Man sagt, die Folge $(f_n)_{n\ge 0}$ *konvergiert auf* D_0 *(lokal) gleichmäßig* gegen f, wenn die Folge $(f_n \,|\, D_0)_{n\ge 0}$ auf D_0 (lokal) gleichmäßig gegen $f \,|\, D_0$ konvergiert. Anstatt „$(f_n)_{n\ge 0}$ konvergiert auf D_0 (lokal) gleichmäßig gegen f" sagt man auch, „$(f_n(x))_{n\ge 0}$ konvergiert für $x \in D_0$ (lokal) gleichmäßig gegen $f(x)$".

Satz 4.19. *Seien X und Y normierte Räume, $\emptyset \ne D \subset X$, $a \in X$, sei $(f_n \colon D \to Y)_{n\ge 0}$ eine Folge von Abbildungen und $f \colon D \to Y$.*

1. *Sei $(f_n)_{n\ge 0} \rightrightarrows f$.*
   (a) $\big[(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ f_n$ *beschränkt*$\big] \implies f$ *beschränkt.*
   (b) *Sei $(c_n)_{n\ge 0}$ eine Folge in Y, $c \in Y$, $(c_n)_{n\ge 0} \to c$. Dann gilt:*
   $$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ \ \lim_{x\to a} f_n(x) = c_n \quad \implies \quad \lim_{x \to a} f(x) = c\,.$$
   (c) *Sei $(c_n)_{n\ge 0}$ eine Folge in Y und $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ $\lim_{x\to a} f_n(x) = c_n$. Ist $a \in D'$ und Y ein Banachraum, so ist $(c_n)_{n\ge 0}$ konvergent.*
   (d) *Sei $a \in D$ und $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ f_n stetig in a. Dann ist f stetig in a.*
2. *Sei $(f_n)_{n\ge 0} \rightrightarrows_{\text{lok}} f$. Dann gilt: $\big[(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ f_n$ stetig$\big] \implies f$ stetig.*
3. *Sei D kompakt und $(f_n)_{n\ge 0} \rightrightarrows_{\text{lok}} f$. Dann folgt $(f_n)_{n\ge 0} \rightrightarrows f$.*

Die Aussage von Satz 4.19.1.(b) behauptet eine “Vertauschung von Grenzprozessen”:
$$\lim_{x\to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)\,.$$

Beweis. 1. (a) Wegen $(f_n)_{n\ge 0} \rightrightarrows f$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\|f - f_n\|_D \le 1$. Dann folgt $\|f\|_D \le \|f - f_n\|_D + \|f_n\|_D \le 1 + \|f_n\|_D < \infty$.

1. (b) Wir müssen zeigen: Für jede Folge $(x_k)_{k\ge 0}$ in $D \setminus \{a\}$ mit $(x_k)_{k \ge 0} \to a$ ist $(f(x_k))_{k\ge 0} \to c$. Sei $(x_k)_k \ge 0$ Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $(x_k)_{k\ge 0} \to a$. Dann ist zu zeigen:
$$(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists k_0 \ge 0)(\forall k \ge k_0)\quad \|f(x_k) - c\| < \varepsilon\,.$$
Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann
$$(\exists\, n_0 \ge 0)\ (\forall\, n \ge n_0)\quad \|f - f_n\|_D < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{und} \qquad (\exists\, n_1 \ge 0)\ (\forall\, n \ge n_1)\quad \|c_n - c\| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Sei $n \geq \max(n_0, n_1)$. Dann
$$(\exists\, k_0 \geq 0)\ (\forall\, k \geq k_0) \quad \|f_n(x_k) - c_n\| < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$
und für alle $k \geq k_0$ folgt
$$\|f(x_k) - c\| \leq \|f(x_k) - f_n(x_k)\| + \|f_n(x_k) - c_n\| + \|c_n - c\| \leq \|f - f_n\|_D + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon\,.$$

1. (c) Es genügt, zu zeigen: $(c_n)_{n\geq 0}$ ist eine Cauchyfolge in Y, das heißt,
$$(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists\, n_0 \geq 0)\ (\forall\, m,\, n \geq n_0) \quad \|c_m - c_n\| < \varepsilon\,.$$
Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann
$$(\exists\, n_0 \geq 0)\ (\forall\, n \geq n_0) \quad \|f - f_n\|_D < \frac{\varepsilon}{4}\,.$$
Seien $m,\, n \geq n_0$. Dann gibt es ein $x \in D$ mit
$$\|f_n(x) - c_n\| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{und} \qquad \|f_m(x) - c_m\| < \frac{\varepsilon}{4}\,,$$
und wegen $\|f(x) - f_n(x)\| \leq \|f - f_n\|_D$ und $\|f(x) - f_m(x)\| \leq \|f - f_m\|_D$ folgt
$$\|c_n - c_m\| \leq \|c_n - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - c_m\| < \varepsilon\,.$$

1. (d) Wegen $(f_n)_{n\geq 0} \rightrightarrows f$ ist $(f_n(a))_{n\geq 0} \to f(a)$. Nach (b) folgt $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, also ist f stetig in a.

2. Sei $(f_n)_{n\geq 0} \rightrightarrows_{\text{lok}} f$ und $(\forall\, n \in \mathbb{N}_0)$ f_n stetig. Sei $a \in D$. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}(a)$ mit $(f_n \,|\, U \cap D)_{n\geq 0} \rightrightarrows f \,|\, U \cap D$. Nach 1.(c) ist $f \mid U \cap D$ stetig in a, und daher ist auch f stetig in a.

3. Für $x \in D$ sei $U_x \in \mathcal{U}(x)$, so dass $(f_n \,|\, U_x \cap D)_{n\geq 0} \rightrightarrows f \,|\, U_x \cap D$. Dann ist die Menge $\mathfrak{U} = \{U_x^\circ \mid x \in D\}$ eine offene Überdeckung von D. Daher gibt es $x_1, \ldots x_k \in D$ mit
$$D \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}^\circ \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\,.$$
Wie müssen zeigen: $\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\big)\ \big(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0\big)\ \big(\forall n \geq n_0\big)\ \big(\forall x \in D\big)\ \ \|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon\,.$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ ist $(f_n \,|\, U_{x_i} \cap D)_{n\geq 0} \rightrightarrows f \,|\, U_{x_i} \cap D$, und daher gibt es ein $n_i \geq 0$, so dass $(\forall x \in U_{x_i} \cap D)\ \ \|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$. Ist nun $n \geq n_0 = \max(n_1, \ldots, n_k)$, so folgt $(\forall x \in D)\ \ \|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon\,.$ □

Beispiel: Die Funktionenfolge $(f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\geq 1}$ sei definiert durch
$$f_n(x) = \begin{cases} nx\,, & \text{falls} \quad 0 < 2nx \leq 1\,, \\ 1 - nx\,, & \text{falls} \quad 1 < 2nx \leq 2\,, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Dann gilt: $(\forall n \in \mathbb{N})$ f_n ist stetig, $(f_n)_{n\geq 0} \to 0$, aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig.

Satz 4.20 (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)**.** *Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, $\emptyset \neq D \subset X$ und $(f_n \colon D \to Y)$ eine Folge von Funktionen. Dann sind äquivalent:*

(a) *Es gibt eine Funktion $f \colon D \to Y$ mit $(f_n)_{n\geq 0} \rightrightarrows f$.*

(b) $\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\big)\ \big(\exists n_0 \geq 0\big)\ \big(\forall m,\, n \geq n_0\big)\quad \|f_m - f_n\|_D < \varepsilon\,.$

Beweis. 1. (a) $\Rightarrow$ (b) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $(f_n)_{n\geq 0} \rightrightarrows f$ gilt:

$$(\exists\, n_0 \geq 0)\ (\forall\, n \geq n_0) \quad \|f - f_n\|_D < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Für $m,\, n \geq n_0$ ist dann $\|f_n - f_m\|_D \leq \|f_n - f\|_D + \|f - f_m\|_D < \varepsilon$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Für $x \in D$ und $m,\, n \in \mathbb{N}_0$ ist $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\|_D$, also $(f_n(x))_{n\geq 0}$ eine Cauchyfolge in Y und daher konvergent. Wir definieren

$$f\colon D \to Y \quad \text{durch} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

und zeigen $(f_n)_{n\geq 0} \rightrightarrows f$, also $(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \geq 0)\ (\forall n \geq n_0)\ (\forall x \in D)\ \ \|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ und $n_0 \geq 0$, so dass $(\forall m,\, n \geq n_0)\ \ \|f_m - f_n\|_D < \varepsilon_1$. Sei $n \geq n_0$ und $x \in D$. Dann ist $(\forall\, m \geq n)\ (\forall\, x \in D)\ \ \|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \|f_m - f_n\|_D < \varepsilon_1$ und daher wegen der Stetigkeit von $\|\cdot\|\colon Y \to \mathbb{R}$ auch

$$(\forall\, x \in D)\ \|f(x) - f_n(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon\,. \qquad \square$$

5. Unendliche Reihen

5.1. Definition und einfache Beispiele

Definition 5.1. Sei X ein normierter Raum und $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in X. Unter der *unendlichen Reihe*

$$\sum_{n\geq 0} a_n \quad \text{versteht man die Folge} \quad (A_k)_{k\geq 0} \quad \text{ihrer } \textit{Partialsummen } A_k = \sum_{n=0}^{k} a_n\,.$$

Man sagt, die Reihe *konvergiert* [*divergiert*], wenn die Folge $(A_k)_{k\geq 0}$ konvergiert [divergiert]. Ist $(A_k)_{k\geq 0} \to a \in X$, so nennt man a die *Summe der Reihe* und schreibt

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,.$$

Nach Satz 3.2 hat eine unendliche Reihe in X höchstens eine Summe.

Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$, so ist die Folge $(A_k)_{k\geq 0}$ ihrer Partialsummen monoton wachsend, also entweder beschränkt und dann konvergent oder bestimmt divergent gegen ∞, und man definiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} A_k = \sup\{A_k \mid k \geq 0\} \in [0,\infty]\,.$$

Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $[0,\infty]$ und $(\exists n \in \mathbb{N}_0)\ a_n = \infty$, so definiert man $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty\,.$

Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $(a_n)_{n\geq p}$ eine Folge mit Anfangsindex p, so definiert man

$$\sum_{n\geq p} a_n = \sum_{n\geq 0} a_{p+n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=p}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p+n}\,.$$

Beispiele:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} 1 = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = \infty\,.$$

2. Geometrische Reihe: Sei $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Dann ist $(|a|^n)_{n\geq 0} \to 0$, also $(a^n)_{n\geq 0} \to 0$, und

$$\sum_{n=0}^{k} a^n = \frac{a^{k+1}-1}{a-1}\,, \quad \text{also} \quad \Big(\sum_{n=0}^{k} a^n\Big)_{k\geq 0} \to \frac{1}{1-a}\,, \quad \text{und daher} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}\,.$$

3. g-adische Ziffernentwicklung. Sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$, $z \in [0,1)$, $z = (0,a_1a_2\ldots)_g$ die g-adische Zifferndarstellung und für $n \in \mathbb{N}$

$$z_n = (0,a_1a_2\ldots a_n)_g = \sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} \in \mathbb{Q} \quad \text{die } n\text{-te } g\text{-adische Näherung von } z\,.$$

Dann ist

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i g^{-i}\,.$$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} = \lim_{k\to\infty}\Big(\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n(n-1)}\Big) = \lim_{k\to\infty}\Big(\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big) = \lim_{k\to\infty}\Big(1-\frac{1}{k}\Big) = 1\,.$

Satz 5.1 (Elementare Konvergenzkriterien)**.**

A. *Sei X ein normierter Raum, seien $(a_n)_{n\ge 0}$, $(b_n)_{n\ge 0}$ Folgen in X, $a, b \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$\Big[\sum_{n\ge 0} a_n \ \textit{konvergent} \iff \sum_{n\ge m} a_n \ \textit{konvergent}\Big], \quad \textit{und dann} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n\,.$$

Insbesondere folgt:
Ist $(b_n)_{n\ge 0}$ ein Endstück von $(a_n)_{n\ge 0}$, oder ist $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n \ne b_n\}$ endlich, so haben

$$\sum_{n\ge 0} a_n \quad \textit{und} \quad \sum_{n\ge 0} b_n \qquad \textit{dasselbe Konvergenzverhalten}\,.$$

2. $$\sum_{n\ge 0} a_n \quad \textit{konvergent} \quad \Longrightarrow \quad (a_k)_{k\ge 0} \to 0 \quad \textit{und} \quad \Big(\sum_{n=k}^{\infty} a_n\Big)_{k\ge 0} \to 0\,.$$

3. $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a \ \wedge \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) = a+b \ \wedge \ \sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n = \lambda a\,.$$

B. *Sei $(a_n)_{n\ge 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, und seien $a, \lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a \iff \sum_{n=0}^{\infty}\Re(a_n) = \Re(a) \ \wedge \ \sum_{n=0}^{\infty}\Im(a_n) = \Im(a) \iff \sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n} = \overline{a}\,.$$

2. $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n = \lambda a\,.$$

Beweis. **A.** 1. Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Für $k \ge m$ ist

$$\sum_{n=0}^{k} a_n = \sum_{n=0}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{k} a_n\,,$$

also

$$\Big(\sum_{n=0}^{k} a_n\Big)_{k\ge 0} \ \text{konvergent} \iff \Big(\sum_{n=0}^{k} a_n\Big)_{k\ge m} \ \text{konvergent} \iff \Big(\sum_{n=m}^{k} a_n\Big)_{k\ge m} \ \text{konvergent}\,,$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k} a_n = \sum_{n=0}^{m-1} a_n + \lim_{k\to\infty}\sum_{n=m}^{k} a_n = \sum_{n=0}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n\,.$$

2. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$A_k = \sum_{n=0}^{k} a_n \quad \text{und} \quad (A_k)_{k\ge 0} \to A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,.$$

Dann folgt $a_k = A_k - A_{k-1}$, also $(a_k)_{k\geq 0} \to 0$ und

$$\Big(\sum_{n=m}^{\infty} a_n\Big)_{m\geq 1} = (A - A_{m-1})_{m\geq 1} \to 0\,.$$

3. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$A_k = \sum_{n=0}^{k} a_n \quad \text{und} \quad B_k = \sum_{n=0}^{k} b_n\,, \quad \text{also} \quad (A_k)_{k\geq 0} \to a \quad \text{und} \quad (B_k)_{k\geq 0} \to b\,.$$

Daher folgt nach Satz 3.5

$$(A_k + B_k)_{k\geq 0} = \Big(\sum_{n=0}^{k}(a_n + b_n)\Big)_{k\geq 0} \to a + b\,, \quad \text{also} \quad a + b = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)\,,$$

und

$$(\lambda A_k)_{k\geq 0} = \Big(\sum_{n=0}^{k} \lambda a_n\Big)_{n\geq 0} \to \lambda a\,, \quad \text{also} \quad \lambda a = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n\,.$$

B. 1. Nach Satz 3.6, da für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\Re\Big(\sum_{n=0}^{k} a_n\Big) = \sum_{n=0}^{k} \Re(a_n)\,, \quad \Im\Big(\sum_{n=0}^{k} a_n\Big) = \sum_{n=0}^{k} \Im(a_n) \quad \text{und} \quad \overline{\sum_{n=0}^{k} a_n} = \sum_{n=0}^{k} \overline{a_n}\,.$$

2. Wie **A.** 3., mit Satz 3.6. □

5.2. Reihen mit reellen Gliedern

Satz 5.2 (Konvergenkriterien für Reihen mit nicht-negativen Gliedern)**.** *Sei* $(a_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge in* $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

1. (Majoranten- und Minorantenkriterium) *Sei* $(b_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge in* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *und* $n_0 \geq 0$, *so dass* $(\forall n \geq n_0)\;\; a_n \leq b_n$. *Dann gilt*:

$$\sum_{n\geq 0} b_n \;\; \textit{konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n \;\; \textit{konvergent}$$

(man nennt dann $\sum_{n\geq 0} b_n$ eine *konvergente Majorante* von $\sum_{n\geq 0} a_n$),

$$\sum_{n\geq 0} a_n \;\; \textit{divergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} b_n \;\; \textit{divergent}$$

(man nennt dann $\sum_{n\geq 0} a_n$ eine *divergente Minorante* von $\sum_{n\geq 0} b_n$).

2. (Wurzelkriterium) *Sei* $\vartheta \in (0,1)$ *und* $n_0 \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt*:

$$(\forall n \geq n_0) \;\; \sqrt[n]{a_n} \leq \vartheta \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n \quad \textit{konvergent}.$$

3. (Quotientenkriterium) *Sei* $\vartheta \in (0,1)$ *und* $n_0 \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt,*:

$$(\forall n \geq n_0) \;\; a_{n+1} \leq \vartheta a_n \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n \quad \textit{konvergent}.$$

4. (Verdichtungssatz) *Sei* $(a_n)_{n\ge 0}$ *monoton fallend. Dann haben die beiden Reihen*
$$\sum_{n\ge 0} a_n \quad \textit{und} \quad \sum_{n\ge 0} 2^n a_{2^n}$$
dasselbe Konvergenzverhalten.

Beweis. Die Folge
$$\Big(\sum_{n=0}^k a_n\Big)_{k\ge 0}$$
ist monoton wachsend, und daher gilt:
$$\sum_{n\ge 0} a_n \;\text{ konvergent } \iff \Big(\sum_{n=0}^k a_n\Big)_{k\ge 0} \;\text{ beschränkt } \iff (\forall\, n_0\ge 0)\;\Big(\sum_{n=n_0}^k a_n\Big)_{k\ge n_0} \;\text{ beschränkt}\,.$$

1. Für $k\ge n_0$ ist
$$\sum_{n=n_0}^k a_n \le \sum_{n=n_0}^k b_n\,,$$
und daher folgt die Behauptung.

2. Nach 1., da
$$(\forall\, n\ge n_0)\;\; a_n\le \vartheta^n \quad \text{und} \quad \sum_{n\ge 0}\vartheta^n \quad \text{konvergent}\,.$$

3. Mittels Induktion nach n folgt $(\forall\, n\ge n_0)$ $a_n\le \vartheta^{n-n_0}a_{n_0}$, also $\sqrt[n]{a_n}\le \vartheta\,\sqrt[n]{\vartheta^{-n_0}a_{n_0}}$. Wegen $\vartheta<1$ und $\big(\sqrt[n]{\vartheta^{-n_0}a_{n_0}}\big)_{n\ge 1}\to 1$ gibt es ein $n_1\ge n_0$ mit $\vartheta\,\sqrt[n_1]{\vartheta^{-n_0}a_{n_0}}<1$ und dann $(\forall\, n\ge n_1)$ $\vartheta\,\sqrt[n]{\vartheta^{-n_0}a_{n_0}}<1$. Daher folgt die Behauptung nach 2.

4. Für $k\in\mathbb{N}$ ist
$$\sum_{n=1}^k 2^n a_{2^n} \le \sum_{n=1}^k 2\Big(\sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j\Big) = 2\sum_{j=2}^{2^k} a_j \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{2^k-1} a_n = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n \le \sum_{j=0}^{k-1} 2^j a_{2^j}\,,$$
also gilt:
$$\Big(\sum_{n=0}^k 2^n a_{2^n}\Big)_{k\ge 0} \;\text{ beschränkt } \iff \Big(\sum_{n=0}^k a_n\Big)_{k\ge 0} \;\text{ beschränkt}\,. \qquad \square$$

Beispiele:

1. Sei $s\in\mathbb{R}$. Nach dem Verdichtungssatz ist
$$\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^s}\;\begin{cases} \text{konvergent}\,, & \text{falls } \; s>1\,,\\ \text{divergent}\,, & \text{falls }\; s\le 1\,.\end{cases}$$
Die Funktion
$$\zeta\colon \mathbb{R}_{>1}\to\mathbb{R}\,,\;\text{ definiert durch }\; \zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}\,,$$
heißt *Riemann'sche Zetafunktion*. Später (Satz 6.16) werden wir beweisen:
$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6} \quad \text{und} \quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}\,.$$

2. Die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 2^n} \quad \text{konvergiert nach dem Quotientenkriterium.}$$

3. Die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} 2^n \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2} \quad \text{konvergiert nach dem Wurzelkriterium.}$$

Satz 5.3 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)**.** *Sei* $(a_n)_{n\geq 0}$ *eine streng monoton fallende Folge in* $\mathbb{R}_{>0}$ *mit* $(a_n)_{n\geq 0} \to 0$*. Dann ist die Reihe*

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n \quad \textit{konvergent. Ist} \quad A = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \textit{und} \quad (\forall k \in \mathbb{N}_0) \ \ A_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n \,,$$

so folgt $\quad (\forall k \in \mathbb{N}_0) \quad A_{2k+1} < A < A_{2k} \quad \wedge \quad |A - A_k| < a_{k+1}\,.$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist $A_{2k} - A_{2k+1} = -(-1)^{2k+1} a_{2k+1} = a_{2k+1} > 0$, und wir behaupten: $([A_{2k+1}, A_{2k}])_{k\geq 0}$ ist eine Intervallschachtelung. Wegen $(a_k)_{k\geq 0} \to 0$ genügt es, zu zeigen

$$(\forall k \in \mathbb{N}_0) \quad A_{2k+1} < A_{2k+3} \quad \wedge \quad A_{2k+2} < A_{2k}\,.$$

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $A_{2k+3}-A_{2k+1} = -a_{2k+3}+a_{2k+2} > 0$ und $A_{2k}-A_{2k+2} = -a_{2k+2}+a_{2k+1} > 0$. Nach Satz 3.9 gibt es genau ein $A \in \mathbb{R}$ mit

$$(\forall k \in \mathbb{N}_0) \quad A_{2k+1} \leq A \leq A_{2k}\,, \quad \text{und} \quad A = \lim_{k\to\infty} A_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} A_{2k}\,, \quad \text{folglich} \quad A = \lim_{k\to\infty} A_k$$

nach Satz 3.4. Für $k \in \mathbb{N}_0$ liegt A zwischen A_{k+1} und A_k, also $|A-A_k| < |A_{k+1}-A_k| = a_{k+1}$. $\square$

Beispiele (Beweise später, siehe Satz 7.12 und Satz 7.30):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log 2\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

5.3. Absolute Konvergenz und summierbare Familien

Satz und Definition 5.4. *Sei* X *ein Banachraum und* $(a_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge in* X*.*

1. (Cauchy'sche Konvergenzkriterium)

$$\sum_{n\geq 0} a_n \ \ \textit{konvergent} \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists\, k_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall\, l \geq k \geq k_0)\ \Big\|\sum_{n=k+1}^{l} a_n\Big\| < \varepsilon\,.$$

2. (Absolute Konvergenz)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n \ \ \textit{konvergent} \ \wedge \ \Big\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|\,.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so nennt man die Reihe *absolut konvergent.*

Beweis. Für $k \ge 0$ sei
$$A_k = \sum_{n=0}^{k} a_n \,.$$
Genau dann ist $\sum_{n\ge 0} a_n$ konvergent, wenn $(A_k)_{k\ge 0}$ eine Cauchyfolge ist, das heißt, wenn
$$(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists\, k_0 \ge 0)\ (\forall\, l \ge k \ge k_0) \quad \|A_l - A_k\| < \varepsilon \,.$$

1. Wegen
$$A_l - A_k = \sum_{u=k+1}^{l} a_n \quad \text{folgt die Behauptung.}$$

2. Sei $\sum_{n\ge 0} a_n$ absolut konvergent. Wir verifizieren die Bedingung aus 1. Sei $\varepsilon > 0$.
$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \|a_n\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\exists\, k_0 \ge 0)\ (\forall\, k \ge k_0) \quad \sum_{n=k}^{\infty} \|a_n\| < \varepsilon \,.$$

Für $l \ge k \ge k_0$ folgt
$$\Big\| \sum_{n=k+1}^{l} a_n \Big\| \le \sum_{n=k+1}^{l} \|a_n\| \le \sum_{n=k}^{\infty} \|a_n\| < \varepsilon \,,$$
also die Konvergenz. Für $k \ge 0$ ist
$$\Big\|\sum_{n=0}^{k} a_n\Big\| \le \sum_{n=0}^{k} \|a_n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \quad \text{und daher} \quad \Big\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big\| = \lim_{k\to\infty}\Big\|\sum_{n=0}^{k} a_n\Big\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \,. \qquad \square$$

Satz und Definition 5.5 (Großer Umordnungssatz)**.** *Sei* Λ *eine abzählbare Menge und* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *die Menge aller endlichen Teilmengen von* Λ. *Sei* $(\Lambda_i)_{i\ge 0}$ *eine Folge von Teilmengen von* Λ, *so dass*
$$\Lambda = \bigcup_{i\ge 0} \Lambda_i \quad \textit{und} \quad (\forall i > j \ge 0)\ \ \Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset \quad \big[\text{dann heißt } (\Lambda_i)_{i\ge 0} \text{ eine } \textit{Partition} \text{ von } \Lambda\,\big].$$

1. *Sei* $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *eine Familie in* $\mathbb{R}_{\ge 0}$ *und*
$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \ \sup\Big\{ \sum_{\lambda\in\Omega} a_\lambda \ \Big|\ \Omega \in \mathcal{E}(\Lambda) \Big\} \ \in [0,\infty] \,.$$
Für jede bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to \Lambda$ *gilt dann*
$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} \,, \quad \textit{und} \quad \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda_i} a_\lambda\Big) \,.$$

2. *Sei X ein Banachraum.* Eine Familie $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in X heißt *summierbar*, wenn
$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda\| < \infty \,.$$
Sei $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *eine summierbare Familie in X. Dann gibt es genau ein* $a \in X$, *so dass*
$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} \quad \textit{für jede bijektive Abbildung } \varphi\colon \mathbb{N}_0 \to \Lambda \,. \quad \text{Schreibweise:} \quad a = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \,.$$
Es gelten die folgenden Aussagen:

(a) $\displaystyle \Big\|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\Big\| \;\le\; \sum_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda\|\,.$

(b) $\displaystyle \big(\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\big)\ \big(\exists\,\Omega_0\in\mathcal{E}(\Lambda)\big)\ \big(\forall\,\Omega\in\mathcal{E}(\Lambda)\big)\quad \Omega\supset\Omega_0 \implies \Big\|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda - \sum_{\lambda\in\Omega} a_\lambda\Big\| < \varepsilon\,.$

(c) *Für jedes $i\ge 0$ mit $|\Lambda_i|=\infty$ ist $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_i}$ summierbar,*

$$\textit{die Reihe}\quad \sum_{i\ge 0}\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda_i} a_\lambda\Big)\quad \textit{ist konvergent, und}\quad \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda_i} a_\lambda\Big)\,.$$

Beweis. 1. Sei $\varphi\colon \mathbb{N}_0\to\Lambda$ bijektiv. Für $\Omega\in\mathcal{E}(\Lambda)$ sei $k=\max\,(\varphi^{-1}(\Omega))\in\mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\sum_{\lambda\in\Omega} a_\lambda \;\le\; \sum_{n=0}^{k} a_{\varphi(n)} \;\le\; \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}\,,$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sup\Big\{\sum_{n=0}^{k} a_{\varphi(n)} \;\Big|\; k\in\mathbb{N}\Big\} = \sup\Big\{\sum_{\lambda\in\varphi(\{0,\dots,k\})} a_\lambda \;\Big|\; k\in\mathbb{N}\Big\} \le \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\,,$$

woraus die erste Aussage folgt.
Sei nun $\Omega\in\mathcal{E}(\Lambda)$. Für $i\ge 0$ sei

$$a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda_i} a_\lambda \in [0,\infty] \quad\text{und}\quad \Omega_i = \Omega\cap\Lambda_i\in\mathcal{E}(\Lambda_i)\,.$$

Dann ist $\Omega_i\ne\emptyset$ nur für endlich viele $i\ge 0$ und $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Omega} a_\lambda \;=\; \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{\lambda\in\Omega_i} a_\lambda \;\le\; \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,.$

Daher genügt es, zu zeigen: $\displaystyle(\forall B\in\mathbb{R})\quad \Big[B<\sum_{i=0}^{\infty} a_i \implies \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda > B\Big].$

Ist $a_i=\infty$ für ein $i\ge 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $(\forall i\ge 0)\ a_i<\infty$. Sei $B\in\mathbb{R}$ mit

$$B<\sum_{i=0}^{\infty} a_i\,,\quad \text{sei } k\in\mathbb{N}_0 \text{ mit } B<\sum_{i=0}^{k} a_i\,,\quad \text{und sei } \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0} \text{ mit } B+\varepsilon<\sum_{i=0}^{k} a_i\,.$$

Für $i\in\{0,\dots,k\}$ sei $\Omega_i\in\mathcal{E}(\Lambda_i)$ mit $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Omega_i} a_\lambda > a_i - \frac{\varepsilon}{k+1}\,.$ Dann folgt

$$B+\varepsilon < \sum_{i=0}^{k}\sum_{\lambda\in\Omega_i} a_\lambda + \varepsilon\,,\quad \text{wir setzen}\quad \Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\ldots\cup\Omega_k\in\mathcal{E}(\Lambda)\quad\text{und erhalten}$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \ge \sum_{\lambda\in\Omega} a_\lambda = \sum_{i=0}^{k}\sum_{\lambda\in\Omega_i} a_\lambda > B\,.$$

2. Für jede bijektive Abbildung $\varphi:\mathbb{N}_0\to\Lambda$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|a_{\varphi(n)}\| = \sum_{\lambda\in\Lambda}\|a_\lambda\| < \infty\,,\quad\text{also}\quad \sum_{n\ge 0} a_{\varphi(n)}\quad\text{konvergent.}$$

Wir müssen die Unabhängigkeit der Summe von φ zeigen. Seien also $\varphi,\, \psi\colon \mathbb{N}_0 \to \Lambda$ bijektiv,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = a \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{\psi(n)} = b\,.$$

Wir zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ \ \|a-b\| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es $k_0,\, m \ge 0$, so dass

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \|a_{\varphi(i)}\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \wedge \quad (\forall k \ge k_0) \left[\Big\| a - \sum_{i=0}^{k} a_{\varphi(i)} \Big\| < \frac{\varepsilon}{3} \ \ \wedge \ \ \Big\| b - \sum_{i=0}^{k} a_{\psi(i)} \Big\| < \frac{\varepsilon}{3} \right].$$

Sei nun $k \ge k_0$ so groß, dass $\varphi(\{0,\ldots,m\}) \subset \psi(\{0,\ldots,k\})$, und sei dann $l \ge k_0$ so groß, dass $\psi(\{0,\ldots,k\}) \subset \varphi(\{0,\ldots,l\})$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|a-b\| \ &\le\ \Big\| a - \sum_{i=0}^{l} a_{\varphi(i)} \Big\| \ + \ \Big\| b - \sum_{i=0}^{k} a_{\psi(i)} \Big\| \ + \ \Big\| \sum_{i=0}^{l} a_{\varphi(i)} - \sum_{i=0}^{k} a_{\psi(i)} \Big\| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \sum_{\lambda \in \varphi(\{0,\ldots,l\}) \setminus \psi(\{0,\ldots,k\})} \|a_\lambda\| \ < \ \varepsilon\,, \end{aligned}$$

da $\varphi(\{0,\ldots,l\}) \setminus \psi(\{0,\ldots,k\}) \subset \varphi(\{0,\ldots,l\}) \setminus \varphi(\{0,\ldots,m\}) \subset \{\varphi(i) \mid i \ge m+1\}$.

Nun beweisen wir die Aussagen (a), (b) und (c).

(a) Sei $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to \Lambda$ bijektiv. Dann ist

$$\Big\| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \Big\| \ = \ \Big\| \sum_{i=0}^{\infty} a_{\varphi(i)} \Big\| \ \le \ \sum_{i=0}^{\infty} \|a_{\varphi(i)}\| \ = \ \sum_{\lambda \in \Lambda} \|a_\lambda\|\,.$$

(b) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to \Lambda$ bijektiv. Sei $k \ge 0$ mit

$$\Big\| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda - \sum_{n=0}^{k} a_{\varphi(n)} \Big\| \ < \ \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} \|a_{\varphi(n)}\| \ < \ \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

$\Omega_0 = \varphi(\{0,\ldots,k\})$ und $\Omega \supset \Omega_0$. Dann ist $\{0,\ldots,k\} \subset \varphi^{-1}(\Omega)$ und

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda - \sum_{\lambda \in \Omega} a_\lambda \Big\| \ &\le \ \Big\| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda - \sum_{n=0}^{k} a_{\varphi(n)} \Big\| \ + \ \Big\| \sum_{n=0}^{k} a_{\varphi(n)} - \sum_{n \in \varphi^{-1}(\Omega)} a_{\varphi(n)} \Big\| \\ &< \ \frac{\varepsilon}{2} \ + \sum_{n \in \varphi^{-1}(\Omega) \setminus \{0,\ldots,k\}} \|a_{\varphi(n)}\| \ \le \ \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \|a_{\varphi(n)}\| \ < \ \varepsilon\,. \end{aligned}$$

(c) Ist $i \ge 0$ und $|\Lambda_i| = \infty$, so folgt

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_i} \|a_\lambda\| \le \sum_{\lambda \in \Lambda} \|a_\lambda\| < \infty\,,$$

und daher ist $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_i}$ summierbar. Wegen

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Big\| \sum_{\lambda \in \Lambda_i} a_\lambda \Big\| \ \le \ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_i} \|a_\lambda\| \ = \ \sum_{\lambda \in \Lambda} \|a_\lambda\| \ < \infty \quad \text{ist die Reihe} \quad \sum_{i \ge 0} \Big(\sum_{\lambda \in \Lambda_i} a_\lambda \Big) \quad \text{konvergent.}$$

Sei

$$a = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \quad \wedge \quad (\forall i \ge 0) \quad a_i = \sum_{\lambda \in \Lambda_i} a_\lambda\,.$$

Dann müssen wir beweisen:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}) \quad (\exists k_0 \geq 0) \quad (\forall k \geq k_0) \quad \Big\| a - \sum_{i=0}^{k} a_i \Big\| \; < \; \varepsilon \,.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach (b) gilt:

$$\big(\exists \Omega_0 \in \mathcal{E}(\Lambda)\big) \; \big(\forall \Omega \in \mathcal{E}(\Lambda)\big) \; \Big[\Omega \supset \Omega_0 \quad \Longrightarrow \quad \Big\| a - \sum_{\lambda \in \Omega} a_\lambda \Big\| \; < \; \frac{\varepsilon}{2} \Big] \,.$$

Für $i \geq 0$ sei $\Lambda_i^* \in \mathcal{E}(\Lambda_i)$ mit $\Lambda_i^* \supset \Omega_0 \cap \Lambda_i$ und

$$\Big\| a_i - \sum_{\lambda \in \Lambda_i^*} a_\lambda \Big\| \; < \; \frac{\varepsilon}{2^{i+2}} \,. \quad \text{Dann folgt} \quad \Omega_0 \; = \; \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \Omega_0 \cap \Lambda_i \; \subset \; \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \Lambda_i^* \,,$$

und es sei $k_0 \geq 0$ mit $\Omega_0 \subset \Lambda_0^* \cup \Lambda_1^* \cup \ldots \cup \Lambda_{k_0}^*$. Ist nun $k \geq k_0$ und

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{k} \Lambda_i^* \,, \quad \text{so folgt} \quad \Omega \supset \Omega_0 \,, \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \Big\| a - \sum_{i=0}^{k} a_i \Big\| \; &\leq \; \Big\| a - \sum_{i=0}^{k} \sum_{\lambda \in \Lambda_i^*} a_\lambda \Big\| \; + \; \Big\| \sum_{i=0}^{k} \Big(a_i - \sum_{\lambda \in \Lambda_i^*} a_\lambda \Big) \Big\| \\ &\leq \; \Big\| a - \sum_{\lambda \in \Omega} a_\lambda \Big\| \; + \; \sum_{i=0}^{k} \Big\| a_i - \sum_{\lambda \in \Lambda_i^*} a_\lambda \Big\| \; < \; \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=0}^{k} \frac{\varepsilon}{2^{i+2}} \; < \; \varepsilon \,. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 5.6 (Kleiner Umordnungssatz)**.** *Sei X ein Banachraum, $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in X und $\varphi \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ bijektiv. Dann ist*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_{\varphi(n)}\| \; \in [0, \infty] \,, \quad \textit{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < \infty \; \Longrightarrow \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} \,.$$

Beweis. Nach Satz 5.5 mit $\Lambda = \mathbb{N}_0$. $\square$

Für das nächste Resultat verwenden wir folgende Terminologie:
Eine Familie $(a_{m,n})_{m,n \geq 0} = (a_{(m,n)})_{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0}$ nennt man *Doppelfolge*, und

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} a_{m,n}$$

nennt man eine *Doppelreihe.*

Satz 5.7 (Doppelreihensatz)**.**

1. *Sei $(a_{m,n})_{m,n \geq 0}$ eine Doppelfolge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist*

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} a_{m,n} \; &= \; \sup\Big\{ \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{k} a_{m,n} \; \Big| \; k \in \mathbb{N}_0 \Big\} \\ &= \; \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} \Big) = \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_{k,n-k} \Big) \,. \end{aligned}$$

2. *Sei* X *ein Banachraum und* $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ *eine Doppelfolge in* X. *Dann gilt*:

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}\|a_{m,n}\|<\infty$$

$$\Longrightarrow \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} a_{m,n}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}a_{m,n}\Big)=\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k}\Big).$$

Beweis. Nach Satz 5.5 mit $\Lambda=\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$. Man beachte, dass es zu jedem $\Omega\in\mathcal{E}(\Lambda)$ ein $k\in\mathbb{N}_0$ gibt mit $\Omega\subset\{0,\ldots,k\}\times\{0,\ldots,k\}$. □

Beispiele:

1. $$\sum_{k=2}^{\infty}\big(\zeta(k)-1\big)=\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}\Big)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^k}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1.$$

2. Für $m,\,n\geq 0$ sei

$$a_{m,n}=\begin{cases}1\,, & \text{falls}\quad m=n+1\,,\\ -1\,, & \text{falls}\quad n=m+1\,,\\ 0\,, & \text{sonst}\,.\end{cases}$$

Dann folgt

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}|a_{m,n}|=\infty\,,\quad \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\Big)=-1\,,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}a_{m,n}\Big)=1\quad\text{und}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k}\Big)=0\,.$$

Satz 5.8 (Produktsatz). *Seien* $(b_n)_{n\geq 0}$ *und* $(c_n)_{n\geq 0}$ *Folgen in* $\mathbb{C}$, *und sei*

$$\textit{entweder}\quad (\forall n\in\mathbb{N}_0)\ b_n,\,c_n\in\mathbb{R}_{\geq 0}\qquad \textit{oder}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}|b_n|<\infty\,,\quad \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|<\infty\,.$$

Dann ist

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} b_mc_n=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}c_n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}b_kc_{n-k}\Big)\qquad (\textit{mit}\ \ 0\cdot\infty=0\,)\,.$$

Beweis. Nach Satz 5.7 mit $a_{m,n}=b_mc_n$. □

5.4. Funktionenreihen

Definition 5.2. Seien X, Y normierte Räume, $\emptyset\neq D\subset X$ und $(f_n\colon D\to Y)_{n\geq 0}$ eine Folge von Abbildungen. Unter der *Funktionenreihe*

$$\sum_{n\geq 0}f_n\quad\text{versteht man die Folge}\ (F_k)_{k\geq 0}\ \text{ihrer}\ \textit{Partialsummen}\quad F_k=\sum_{n=0}^{k}f_n\colon D\to Y\,.$$

Man sagt, die Funktionenreihe *konvergiert* [*punktweise, gleichmäßig, lokal gleichmässig*], wenn die Folge $(F_k)_{k\geq 0}$ diese Eigenschaft hat. Ist $(F_k)_{k\geq 0} \to F\colon D \to Y$, so nennt man F die *Summe der Reihe* und schreibt

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \qquad \Big(\text{es ist dann} \quad (\forall x \in D) \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\Big) .$$

Die Funktionenreihe heißt *normal konvergent*, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_D < \infty .$$

Man sagt, die Funktionenreihe *konvergiert absolut*, wenn

$$(\forall\, x \in D) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n(x)\| < \infty .$$

Satz 5.9 (Weierstraß)**.** *Seien X, Y normierte Räume, $\emptyset \neq D \subset X$ und $(f_n\colon D \to Y)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen.*

1. *Sei*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ f_n \ \ \textit{stetig}, \quad \sum_{n\geq 0} f_n \ \ \textit{lokal gleichmäßig konvergent, und} \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n .$$

   Dann ist $f\colon D \to Y$ stetig.

2. *Sei Y ein Banachraum.*

   Ist $\sum_{n\geq 0} f_n$ normal konvergent, so ist $\sum_{n\geq 0} f_n$ gleichmäßig und absolut konvergent.

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$F_k = \sum_{n=0}^{k} f_n\colon D \to Y .$$

1. Es ist $(\forall\, k \geq 0)\ F_k$ stetig, und $(F_k)_{k\geq 0} \Rightarrow_{\text{lok}} f$, also f stetig nach Satz 4.19.
2. Für m, $n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq n$ ist

$$F_m - F_n = \sum_{k=n+1}^{m} f_k .$$

Nach Satz 4.20 ist zu zeigen:

$$(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists\, n_0 \geq 0)\ (\forall\, m \geq n \geq n_0) \ \ \Big\|\sum_{k=n+1}^{m} f_k\Big\|_D \ < \ \varepsilon .$$

Sei $\varepsilon \in R_{>0}$. Nach Satz 5.4 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $m \geq n \geq n_0$

$$\sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_D < \varepsilon , \qquad \text{und daher} \qquad \Big\|\sum_{k=n+1}^{m} f_k\Big\|_D \ \leq \ \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_D \ < \ \varepsilon . \qquad \square$$

Beispiel(Peano-Kurve). Sei $g_0\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_0(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls} \quad |t| \le \frac{1}{3}\,, \\ 3|t|-1\,, & \text{falls} \quad \frac{1}{3} < |t| < \frac{2}{3}\,, \\ 1, & \text{falls} \quad |t| \ge \frac{2}{3}\,. \end{cases}$$

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $t_1 \in [-1,1)$ mit $t \in t_1 + 2\mathbb{Z}$ und $g(t) = g_0(t_1)$. Dann ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig (Skizze!), $(\forall t \in \mathbb{R})\quad g(t) \in [0,1]$, und

$$g(t) = a\,, \quad \text{falls} \quad t = 2g + a + \theta \quad \text{mit} \quad g \in \mathbb{Z}\,,\ a \in \{0,\,1\}\,,\ \theta \in \Big[0, \frac{1}{3}\Big]\,.$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\varphi_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{2^{k+1}}\Big(g(4^{2k+1}t),\, g(4^{2k+2}t)\Big) \in \Big[0,\, \frac{1}{2^{k+1}}\Big] \times \Big[0,\, \frac{1}{2^{k+1}}\Big]\,.$$

Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k\|_{[0,1]} \;\le\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\sqrt{2} \;<\; \infty\,,$$

also die Reihe

$$\sum_{k\ge 0} \varphi_k$$

normal konvergent, und daher ist ihre Summenfunktion

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k :\ [0,1] \to \mathbb{R}^2$$

stetig. Offensichtlich ist $\varphi\big([0,1]\big) \subset [0,1]\times[0,1]$, und wir behaupten $\varphi\big([0,1]\big) = [0,1]\times[0,1]$. Sei dazu $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$. Wir betrachten die 2-adischen Darstellungen in der Form

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{2^{k+1}}, \qquad y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{2k+2}}{2^{k+1}} \quad \text{mit} \quad a_i \in \{0,1\}\,.$$

Dann ist

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 4^{-i} \in [0,1]\,.$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist $4^k t = 2g + a_k + \theta$ mit $g \in \mathbb{N}_0$ und $\theta \in [0, \frac{1}{3}]$, also $g(4^k t) = a_k$ und

$$\varphi(t) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{2^{k+1}}\,,\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+2}}{2^{k+1}}\Big) = (x,y)\,.$$

5.5. Potenzreihen

Definition 5.3. Sei $(a_n)_{n\ge 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Die unendliche Reihe

$$P = P[z] = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$$

heißt *Potenzreihe* in z mit Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\ge 0}$. Die Menge

$$\mathcal{D}_P = \{z \in \mathbb{C} \mid P[z] \text{ ist konvergent}\,\}$$

heißt *Konvergenzbereich* von P, (es ist stets $0 \in \mathcal{D}_P$), und die [ebenfalls mit P bezeichnete] Funktion

$$P\colon \mathcal{D}_P \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

heißt *die durch die Potenzreihe* $P[z]$ *dargestellte Funktion.* Für $N \ge 0$ und $z \in \mathbb{C}$ sei

$$P_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n\,.$$

Die Polynomfunktion $P_N\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt N-tes *Näherungspolynom* von $P[z]$.
Für $n \ge 0$ sei $p_n(z) = a_n z^n$. Dann ist $p_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion, und man kann die Potenzreihe $P[z]$ auch als Funktionenreihe

$$P = \sum_{n\ge 0} p_n$$

auffassen. Dann ist $(P_N)_{N\ge 0}$ die Folge der Partialsummen dieser Funktionenreihe.

Satz und Definition 5.10 (Konvergenzsatz für Potenzreihen)**.** *Sei* $(a_n)_{n\ge 0}$ *eine Folge in* $\mathbb{C}$*,*

$$P[z] = \sum_{n\ge 0} a_n z^n\,, \quad \textit{und} \quad \rho = \Big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\Big)^{-1} \in [0,\infty] \quad \textit{mit} \quad 0^{-1} = \infty \quad \textit{und} \quad \infty^{-1} = 0\,.$$

$\rho = \rho_P$ heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe $P[z]$.

1. *Die Potenzreihe* $P[z]$ *ist*

$$\begin{cases} \textit{absolut konvergent}, & \textit{falls} \quad |z| < \rho\,, \\ \textit{divergent}, & \textit{falls} \quad |z| > \rho\,. \end{cases}$$

   Insbesondere gilt:
   $\mathcal{D}_P = \{0\}$*, falls* $\rho_P = 0$*;* $\mathcal{D}_P = \mathbb{C}$*, falls* $\rho_P = \infty$*, und* $B_\rho(0) \subset \mathcal{D}_P \subset \overline{B}_\rho(0)$*, falls* $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$*.*

2. *Sei* $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ a_n \ne 0$*. Dann gilt*:

$$\textit{Existiert} \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \in [0,\infty]\,, \quad \textit{so ist} \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Beweis. 1. Für $|z| > \rho$ ist

$$\frac{1}{|z|} < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,, \quad \text{also} \quad \Big|\Big\{n \in \mathbb{N}_0 \;\Big|\; \frac{1}{|z|} < \sqrt[n]{|a_n|}\Big\}\Big| = \infty$$

und daher $|a_n z^n| > 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere ist $(a_n z^n)_{n\ge 0} \not\to 0$ und $P[z]$ divergent.

Sei nun $|z| < \rho$. Dann ist

$$\frac{1}{|z|} > \limsup\nolimits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,, \quad \text{und es sei } \vartheta \in (0,1) \text{ mit } \frac{\vartheta}{|z|} > \limsup\nolimits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Nach Satz 3.17.4 folgt dann

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \ge n_0) \quad \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{\vartheta}{|z|}, \quad \text{also} \quad \sqrt[n]{|a_n z^n|} \le \vartheta\,.$$

Daher ist $P[z]$ absolut konvergent nach Satz 5.2.3.

2. Sei
$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \in [0,\infty]\,.$$
Nach 1. genügt es, zu zeigen: $P[z]$ ist absolut konvergent für $0 < |z| < r$ und divergent für $|z| > r$. Für $z \in \mathbb{C}^\times$ ist
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{|z|}{r}\,.$$
Ist $|z| > r$, so ist $(a_n z^n)_{n\ge 0} \not\to 0$, also $P[z]$ divergent. Ist $|z| < r$, so gibt es ein $\vartheta \in (0,1)$, so dass
$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \ge n_0) \quad |a_{n+1}z^{n+1}| \le \vartheta |a_n z^n|\,,$$
und daher ist $P[z]$ absolut konvergent nach Satz 5.2.2. $\square$

Beispiele:

1. Sei $(a_n)_{n\ge 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$,
$$P[z] = \sum_{n\ge 0} a_n z^n \quad \text{und} \quad d \in \mathbb{N}_0\,, \quad \text{so dass} \quad (\forall n > d) \quad a_n = 0\,.$$
Dann ist $P(z) = P_N(z)$ für alle $N \ge d$, also $P = \big(z \mapsto P(z)\big)$ eine Polynomfunktion, $\operatorname{grad}(P) \le d$ und natürlich $\rho_P = \infty$.

2. Sei $q \in \mathbb{C}^\times$. Dann hat
$$G_q[z] = \sum_{n\ge 0} q^n z^n \quad \text{den Konvergenzradius} \quad \rho_{G_q} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{q^n}{q^{n+1}}\right| = 1/|q|\,,$$
den Konvergenzbereich $\mathcal{D}_{G_q} = B_{1/|q|}(0)$, und
$$\big(\forall z \in B_{1/|q|}(0)\big) \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n z^n = \frac{1}{1-qz}\,.$$

3. Sei $r \in \mathbb{R}$. Die Potenzreihe
$$P_r[z] = \sum_{n\ge 1} n^r z^n \quad \text{hat den Konvergenzradius} \quad \rho_{P_r} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^r}{(n+1)^r} = 1$$
und den Konvergenzbereich
$$\mathcal{D}_{P_r} = \begin{cases} B_1(0)\,, & \text{falls} \quad r \ge 0\,, \\ \overline{B}_1(0) \setminus \{1\}\,, & \text{falls} \quad -1 \le r < 0\,, \\ \overline{B}_1(0)\,, & \text{falls} \quad r < -1\,. \end{cases}$$

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(a) $r < -1$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $|n^r z^n| = n^r$, und wegen
$$\zeta(-r) = \sum_{n=1}^{\infty} n^r < \infty$$
ist $P_r[z]$ absolut konvergent. Insbesondere folgt $\mathcal{D}_{P_r} = \overline{B}_1(0)$.

(b) $r \ge 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $|n^r z^n| = n^r \ge 1$, also ist $(n^r z^n)_{n\ge 1}$ keine Nullfolge und daher $P_r[z]$ divergent. Insbesondere folgt $\mathcal{D}_{P_r} = B_1(0)$.

(c) $-1 \leq r < 0$. Es ist $n^r \geq n^{-1}$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = \infty\,, \quad \text{also} \quad 1 \notin D_{P_r}\,.$$

Sei nun $z \neq 1$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu = z\frac{z^n-1}{z-1}\,, \quad \text{also} \;\; A_0 = 0 \;\; \text{und} \;\; (\forall n \geq 1) \quad |A_n| \leq A = \frac{2}{|z-1|}\,.$$

Dann ist $n^r z^n = (A_n - A_{n-1})n^r = A_n[n^r - (n+1)^r] - A_{n-1}n^r + A_n(n+1)^r$, und daher gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{k} n^r z^n = \sum_{n=1}^{k} A_n\big[n^r-(n+1)^r\big] - \sum_{n=1}^{k} A_{n-1}n^r + \sum_{n=1}^{k} A_n(n+1)^r = \sum_{n=1}^{k} A_n\big[n^r-(n+1)^r\big] + A_k(k+1)^r\,.$$

Die Folge $(A_k)_{k\geq 0}$ ist beschränkt, und daher folgt $(A_k(k+1)^r)_{k\geq 0} \to 0$. Wegen

$$\sum_{n=1}^{k} \big|A_n[n^r - (n+1)^r]\big| \;\leq\; A\sum_{n=1}^{k} [n^r - (n+1)^r] \;\leq A\,[1-(k+1)^r] < A$$

ist

$$\sum_{n\geq 1} A_n\big[n^r - (n+1)^r\big] \quad \text{(absolut) konvergent}\,, \quad \text{also} \quad \sum_{n\geq 1} n^r z^n \quad \text{konvergent}$$

(aber nicht absolut konvergent). Für $-1 \leq r < 0$ ist daher $\mathcal{D}_{P_r} = \overline{B}_1(0) \setminus \{1\}$. ☐

4. Die *Logarithmusreihe*

$$L[z] = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad \text{hat den Konvergenzradius} \quad \rho_L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}/n}{(-1)^n/(n+1)}\right| = 1$$

und den Konvergenzbereich $\mathcal{D}_L = \overline{B}_1(0) \setminus \{-1\}$ [denn:

$$L[z] \;\text{konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-z)^n}{n} = P_{-1}[-z] \;\text{konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \overline{B}_1(0) \setminus \{1\}\,.]$$

Wir werden beweisen (siehe Satz 7.12): $(\forall x \in (-1,1])\;\; L(x) = \log(1+x)$. Damit folgt auch

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\,.$$

5. Binomialreihe: Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\binom{\alpha}{n} = \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\alpha-\nu}{\nu+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}\,.$$

Es ist dann

$$\binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha}{n}\frac{\alpha-n}{n+1} = \binom{\alpha-1}{n+1} + \binom{\alpha-1}{n}.$$

Die *Binomialreihe* ist definiert durch

$$B^\alpha[z] = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n\,.$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ ist $B^\alpha[z]$ ein Polynom und $\rho_{B^\alpha} = \infty$, denn

$$\binom{\alpha}{n} = 0 \quad \text{für} \quad n > \alpha\,, \quad \text{also} \quad B^\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} z^n = (1+z)^\alpha\,.$$

Im Falle $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ ist

$$\rho_{B^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\alpha - n|} = 1\,,$$

und der Konvergenzbereich ist gegeben durch

$$\mathcal{D}_{B^\alpha} = \begin{cases} \overline{B}_1(0)\,, & \text{falls} \quad \Re(\alpha) > 0)\,, \\ B_1(0)\,, & \text{falls} \quad \Re(\alpha) \le -1\,, \\ \overline{B}_1(0) \setminus \{-1\}\,, & \text{falls} \quad \Re(\alpha) \in (-1, 0]\,. \end{cases}$$

(Beweis schwierig!)
Wir werden beweisen (siehe Satz 7.12) :
$B^\alpha(z) = (1+z)^\alpha$, falls entweder $\alpha \in \mathbb{Z}$, $z \in B_1(0)$, oder $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in (-1, 1)$.

Satz 5.11 (Approximationssatz für Potenzreihen)**.** *Sei* $P[z] = \sum_{n\ge0} a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho > 0$.

1. $(\forall\, N \in \mathbb{N}_0)\ \big(\forall\, r \in (0,\rho)\big)\ (\exists\, C \in \mathbb{R}_{>0})\ \big(\forall\, z \in \overline{B}_r(0)\big) \quad |P(z) - P_N(z)| \le C|z|^{N+1}$.
2. *Sei* $0 < r < \overline{r} < \rho$. *Dann*

$$\big(\exists N_0 \ge 0\big)\ \big(\forall N \ge N_0\big)\ \big(\forall z \in \overline{B}_r(0)\big) \quad |P(z) - P_N(z)| \le \frac{\overline{r}}{\overline{r} - r}\Big(\frac{r}{\overline{r}}\Big)^{N+1}.$$

3. *Die Folge der Näherungspolynome* $(P_N)_{N\ge0}$ *konvergiert auf* $B_\rho(0)$ *lokal gleichmäßig gegen* P. *Insbesondere ist* $z \mapsto P(z)$ *stetig auf* $B_\rho(0)$.

Betrachtet man $P[z]$ als Funktionenreihe, so ist diese normal konvergent auf $B_r(0)$ für jedes $r \in (0,\rho)$, aber im Allgemeinen nicht auf $B_\rho(0)$.

Beweis von Satz 5.11. 1. und 2. Seien $N \in \mathbb{N}_0$, $r \in (0,\rho)$ und $z \in \overline{B}_r(0)$. Dann folgt

$$|P(z) - P_N(z)| = \Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n\Big| \ \le \ \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||z|^n \le C|z|^{N+1} \quad \text{mit} \quad C = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^{n-N-1}\,.$$

Für $r < \overline{r} < \rho$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,\overline{r}^n < \infty\,, \quad \text{also} \quad (\exists N_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \ge N_0) \quad |a_n|\,\overline{r}^n < 1\,,$$

und für $N \ge N_0$ folgt

$$|P(z) - P_N(z)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \Big(\frac{r}{\overline{r}}\Big)^n = \Big(\frac{r}{\overline{r}}\Big)^{N+1} \frac{1}{1 - \frac{r}{\overline{r}}} = \frac{\overline{r}}{\overline{r} - r}\Big(\frac{r}{\overline{r}}\Big)^{N+1}.$$

3. Sei $z \in B_\rho(0)$ und $|z| < r < \overline{r} < \rho$. Dann ist $B_r(0) \in \mathcal{U}(z)$, und nach 2.

$$(\exists N_0 \ge 0)\ (\forall N \ge N_0) \quad \|P - P_N\|_{B_r(0)} \ \le \ \frac{\overline{r}}{\overline{r} - r}\Big(\frac{r}{\overline{r}}\Big)^{N+1},$$

also $(\|P - P_N\|_{B_r(0)})_{N\geq 0} \to 0$, und daher $\big(P_N \,|\, B_r(0)\big)_{N\geq 0} \;\Rightarrow\; P \,|\, B_r(0)$. $\square$

Satz 5.12 (Abel'scher Grenzwertsatz). *Sei* $P[z] = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, $z_0 \in \mathcal{D}_P$ *und* $|z_0| = \rho$, *und sei* $\varphi\colon (-1,1] \to \mathbb{C}$ *definiert durch* $\varphi(t) = P(tz_0)$. *Dann ist*

$$\lim_{t\to 1-} P(tz_0) = P(z_0) \quad \text{(Grenzwert bei radialer Annäherung)}\,, \quad \textit{also } \varphi \textit{ stetig in } 1\,.$$

Beweis. Für $t \in (-1,1]$ ist

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \quad \text{mit} \quad b_n = a_n z_0^n\,, \quad \text{also} \quad \varphi(1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,,$$

und wir müssen zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\,\big(\exists \delta \in (0,\,1)\big)\,\big(\forall t \in (1-\delta,\,1)\,\big)\quad |\varphi(t) - \varphi(1)| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, und für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\,, \text{ also } \quad (r_n)_{n\geq 0} \to 0\,.$$

Dann

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall n \geq n_0) \quad |r_n| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \text{und} \quad \big(\exists \delta \in (0,1)\,\big) \quad \delta \sum_{n=0}^{n_0-1} |r_n| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sei $t \in (1-\delta, 1)$. Dann ist nach Satz 5.8 und wegen der Konvergenz von $\sum_{n\geq 0} r_n t^n$

$$\frac{\varphi(t)}{1-t} = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} t^j\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n} b_j\Big) t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\big[\varphi(1) - r_n\big] t^n = \frac{\varphi(1)}{1-t} - \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n\,.$$

Damit folgt

$$\frac{|\varphi(t) - \varphi(1)|}{1-t} \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |r_n| + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} t^n < \frac{\varepsilon}{2\delta} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{1-t}\,, \quad \text{also} \quad |\varphi(t) - \varphi(1)| \leq (1-t)\frac{\varepsilon}{2\delta} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.$$

$\square$

Definition 5.4 (Summe und Produkt von Potenzreihen). Seien

$$P[z] = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \text{und} \quad Q[z] = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

Potenzreihen und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann definiert man

$$(\lambda P)[z] = \sum_{n\geq 0} (\lambda a_n) z^n\,, \quad (P \pm Q)[z] = \sum_{n\geq 0} (a_n \pm b_n) z^n \quad \text{und} \quad (PQ)[z] = \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\Big) z^n\,.$$

Ist $\rho = \min\{\rho_P,\, \rho_Q\}$, so folgt mit den den Sätzen 5.10, 5.1 und 5.8:

$\rho_{\lambda P} = \rho_P$ (falls $\lambda \neq 0$), $\rho_{P\pm Q} \geq \rho$, $\rho_{PQ} \geq \rho$, und für alle $z \in B_\rho(0)$ ist $(\lambda P)(z) = \lambda P(z)$, $(P \pm Q)(z) = P(z) \pm Q(z)$ und $(PQ)(z) = P(z)Q(z)$.

Satz 5.13 (Identitätssatz für Potenzreihen). *Seien*

$$P[z] = \sum_{n\ge 0} a_n z^n \quad \textit{und} \quad Q[z] = \sum_{n\ge 0} b_n z^n$$

Potenzreihen mit Konvergenzradien ρ_P *und* ρ_Q, *sei* $\rho = \min(\rho_P, \rho_Q) > 0$, *und sei* $(x_k)_{k\ge 0}$ *eine Folge in* $B_\rho(0) \setminus \{0\}$ *mit* $(x_k)_{k\ge 0} \to 0$ *und* $(\forall k \ge 0)$ $P(x_k) = Q(x_k)$. *Dann ist* $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ $a_n = b_n$ (*also* $P[z] = Q[z]$).

Insbesondere gilt: *Ist* $D \subset \mathcal{D}_P \cap \mathcal{D}_Q$, $0 \in D'$ *und* $P \,|\, D = Q \,|\, D$, *so folgt* $P[z] = Q[z]$.

Beweis. Induktion nach n. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, und sei $a_m = b_m$ für alle $m \in \{0, \ldots, n-1\}$. Dann ist für $z \in B_\rho(0)$

$$(P-Q)(z) = P(z) - Q(z) = \sum_{m=n}^{\infty} (a_m - b_m) z^m = z^n R(z) \quad \text{mit} \quad R[z] = \sum_{m\ge 0} (a_{n+m} - b_{n+m}) z^m \,,$$

und nach Satz 5.11 ist $R\colon B_\rho(0) \to \mathbb{C}$ stetig in 0. Damit folgt

$$a_n - b_n = R(0) = \lim_{k\to\infty} R(x_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{P(x_k) - Q(x_k)}{x_k^n} = 0 \,. \qquad \square$$

Satz 5.14 (Einsetzen von Potenzreihen). *Seien*

$$P[z] = \sum_{n\ge 0} a_n z^n \quad \textit{und} \quad Q[z] = \sum_{m\ge 0} b_m z^m$$

Potenzreihen mit Konvergenzradien $\rho_P > 0$ *und* $\rho_Q > 0$, *und sei* $|b_0| < \rho_P$. *Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $z \in B_{\rho_Q}(0)$ *sei*

$$Q^n[z] = (Q \cdot \ldots \cdot Q)[z] = \sum_{m\ge 0} b_m(n) z^m \quad (n\text{-faches Cauchyprodukt})$$

mit Koeffizienten $b_m(n) \in \mathbb{C}$. *Dann gilt*:

$$(\forall m \in \mathbb{N}_0) \quad \sum_{n\ge 0} a_n b_m(n) \quad \textit{ist absolut konvergent},$$

und es gibt ein $\rho \in (0, \rho_Q)$, *so dass*

$$\big(\forall z \in B_\rho(0)\big) \; |Q(z)| < \rho_P \quad \textit{und} \quad P\big(Q(z)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big(\sum_{m=0}^{\infty} b_m(n) z^m \Big) = \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_m(n) \Big) z^m \,.$$

Insbesondere gilt:

Es gibt es eine Potenzreihe $R[z]$ *und ein* $\rho \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < \rho < \min\{\rho_R, \rho_Q\}$, *so dass*

$$(\forall\, z \in B_\rho(0)) \quad |Q(z)| < \rho_P \quad \wedge \quad P(Q(z)) = R(z) \,.$$

Im Spezialfall $b_0 = 0$ *ist* $b_m(n) = 0$, *falls* $m < n$, *und daher*

$$P(Q(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{m} a_n b_m(n) \Big) z^m \,.$$

Beweis. Sei

$$P^*[z] = \sum_{n\geq 0} |a_n| z^n\,, \quad Q^*[z] = \sum_{n\geq 0} |b_n| z^n \quad \text{und} \quad Q^{*n}[z] = (Q^* \cdot \ldots \cdot Q^*)[z] = \sum_{m\geq 0} b_m^*(n) z^m\,.$$

Dann folgt $\rho_{P^*} = \rho_P$, $\rho_{Q^*} = \rho_Q$, und die Potenzreihen Q^n und Q^{*n} haben Konvergenzradien $\rho_n \geq \rho_Q$ und $\rho_n^* \geq \rho_Q$. Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ ist $b_m(n)$ eine Summe von Produkten aus $b_0, \ldots, b_m$, und $b_m^*(n)$ ist dieselbe Summe von Produkten aus $|b_0|, \ldots, |b_m|$. Daher folgt $|b_m(n)| \leq b_m^*(n)$.

Sei nun $r \in (0, \rho_Q)$. Nach Satz 5.11 gibt es ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$(\forall z \in \overline{B}_r(0)) \quad \big|Q^*(|z|) - |b_0|\big| \leq C|z|\,.$$

Sei $\rho \in (0, r)$ mit $C\rho + |b_0| < \rho_P$ und $z \in B_\rho(0)$. Dann ist

$$|Q(z)| \;\leq\; Q^*(|z|) \;\leq\; \big|Q^*(|z|) - |b_0|\big| + |b_0| \;\leq C\rho + |b_0| \;<\; \rho_P\,.$$

Mit Satz 5.7.1 folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} \big|a_n b_m(n) z^m\big| \;\leq\; \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} |a_n|\, b_m^*(n)\, |z|^m \;&=\; \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| b_m^*(n)\Big)|z|^m \\
&=\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \Big(\sum_{m=0}^{\infty} b_m^*(n)|z|^m\Big) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| Q^*\big(|z|\big)^n \;<\; \infty\,,
\end{aligned}$$

also insbesondere

$$(\forall m \in \mathbb{N}_0) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_m(n)| \;\leq\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| b_m^*(n) \;< \infty\,,$$

und nach Satz 5.7.2 folgt

$$P\big(Q(z)\big) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big(\sum_{m=0}^{\infty} b_m(n) z^m\Big) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_m(n)\Big) z^m\,. \qquad \square$$

Satz und Definition 5.15 (Quotienten von Potenzreihen)**.** *Seien*

$$P[z] = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \textit{und} \quad Q[z] = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

Potenzreihen mit Konvergenzradien $\rho_P > 0$ und $\rho_Q > 0$, und sei $b_0 \neq 0$. Dann gibt es ein $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\rho \leq \min(\rho_P, \rho_Q)$ und eine Potenzreihe $R[z]$ mit Konvergenzradius $\rho_R \geq \rho$, so dass

$$(\forall z \in B_\rho(0)) \;\; Q(z) \neq 0 \quad \wedge \quad R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\,.$$

Dabei ist

$$R[z] = \sum_{n\geq 0} c_n z^n \quad \textit{mit} \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0) \quad c_n = b_0^{-1}\Big(a_n - \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu b_{n-\nu}\Big)\,.$$

Die (nach Satz 5.13 eindeutig bestimmte) Potenzreihe $R[z]$ heißt *Quotient* von P und Q. Ihre Koeffizientenfolge $(c_n)_{n\geq 0}$ berechnet sich rekursiv aus obigem (unendlichen) Gleichungssystem.

Beweis. Wir betrachten die Potenzreihen
$$Q_1[z] = \sum_{n\geq 1}(-b_0^{-1}b_n)z^n \quad \text{und} \quad P_1[z] = \sum_{n\geq 0} z^n\,.$$
Dann ist $\rho_{Q_1} = \rho_Q$, $\rho_{P_1} = 1$,
$$(\forall z \in B_{\rho_Q}(0))\;\; Q_1(z) = \frac{-Q(z)+b_0}{b_0} \quad \text{und} \quad (\forall z \in B_1(0))\;\; P_1(z) = \frac{1}{1-z}\,.$$
Nach Satz 5.14 gibt es ein $\rho' \in (0, \rho_Q)$ und eine Potenzreihe $R'[z]$ mit Konvergenzradius $\rho_{R'} \geq \rho'$, so dass
$$(\forall z \in B_{\rho'}(0))\;\; \Big[\,|Q_1(z)| < 1 \quad \wedge \quad R'(z) = P_1(Q_1(z)) = \frac{b_0}{Q(z)}\,\Big]\,,$$
und aus $|Q_1(z)| < 1$ folgt $Q(z) \neq 0$. Sei nun
$$R[z] = (b_0^{-1}R'P)[z] = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$$
und $\rho = \min(\rho', \rho_P)$. Dann ist $0 < \rho \leq \min(\rho_P, \rho_Q)$, $\rho_R \geq \rho$, und für $z \in B_\rho(0)$ folgt
$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\,, \quad \text{also} \quad P(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n = \Big(\sum_{n=0}^\infty c_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^\infty b_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^\infty \Big(\sum_{\nu=0}^n c_\nu b_{n-\nu}\Big) z^n\,.$$
Nach Satz 5.13 erhalten wir
$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \quad a_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu b_{n-\nu}\,, \quad \text{also} \quad c_n = b_0^{-1}\Big(a_n - \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu b_{n-\nu}\Big)\,. \qquad \square$$

Beispiel:
Sei $P(z) = z$, $Q(z) = 1 - z - z^2$.
Dann gibt es ein $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine Potenzreihe $R[z] = \sum_{n\geq 0} F_n z^n$ mit Konvergenzradius $\rho_R \geq \rho$, so dass
$$(\forall z \in B_\rho(0)) \quad \frac{z}{1-z-z^2} \;=\; \sum_{n=0}^\infty F_n z^n\,.$$
In der Notation von Satz 5.15 ist $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $(\forall n \geq 2)$ $a_n = 0$, $b_0 = 1$, $b_1 = b_2 = -1$, $(\forall n \geq 3)$ $b_n = 0$, und $(\forall n \geq 0)$ $c_n = F_n$. Das lineare Gleichungssystem
$$(\forall n \geq 0) \quad F_n \;=\; a_n - \sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu b_{n-\nu} \;=\; a_n - \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu F_{n-\nu}$$
liefert die Rekursionsformeln $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $(\forall n \geq 2)$ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Die Folge $(F_n)_{n\geq 0}$ ist die Folge der Fibonacci-Zahlen (siehe Beispiel nach Satz 3.1).
Es ist aber auch
$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{x-\omega'} - \frac{1}{x-\omega}\Big) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,, \quad \omega' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,,$$
also (für $|x| < \min\{|\omega|, |\omega'|\} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$)
$$\frac{x}{1-x-x^2} \;=\; \frac{x}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{\omega}\,\frac{1}{1-\frac{x}{\omega}} - \frac{1}{\omega'}\,\frac{1}{1-\frac{x}{\omega'}}\Big) \;=\; \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{\omega^n} - \frac{1}{\omega'^n}\Big)x^n$$

und daher nach Satz 5.13

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \quad F_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{\omega^n} - \frac{1}{\omega'^n}\Big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big].$$

6. Elementare und analytische Funktionen

6.1. Analytische Funktionen

Definition 6.1. Sei $\emptyset \ne D \subset \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$.

1. f heißt *analytisch* in einem Punkt $z_0 \in D$, wenn gilt:

   $z_0 \in D'$, und es gibt ein $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine Potenzreihe $P[z] = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $\rho_P \ge \rho$, so dass
   $$\big(\forall x \in D \cap B_\rho(z_0)\big) \quad f(x) = P(x-z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-z_0)^n \,.$$
2. f heißt *analytisch* (in D), wenn f in jedem Punkt von D analytisch ist (nach 1. ist dann $D \subset D'$). $\mathcal{O}(D)$ bezeichne die Menge der in D analytischen Funktionen.

   Ist $D \subset \mathbb{C}$ offen, so nennt man eine in D analytische Funktion *holomorph.* Ist $D \subset \mathbb{R}$, so nennt man eine in D analytische Funktion *reell-analytisch.*

Satz und Definition 6.1 (Eigenschaften analytischer Funktionen)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$.*

1. *Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ analytisch in z_0. Dann ist f stetig in z_0, und es gibt genau eine Potenzreihe $P[z] = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$, so dass*
   $$\big(\exists \rho \in (0, \rho_P]\big)\ \big(\forall x \in D \cap B_\rho(z_0)\big) \quad f(x) = P(x-z_0)\,.$$
   Man sagt dann, f hat in z_0 die *Potenzreihenentwicklung*
   $$f(x) = P(x-z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-z_0)^n$$
   und nennt $\operatorname{ord}(f; z_0) = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n \ne 0\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die *Ordnung* von f in z_0.
   Ist $f \ne 0$ und $d = \operatorname{ord}(f; z_0)$, so hat die Potenzreihenentwicklung von f in z_0 die Form
   $$f(x) = (x-z_0)^d \sum_{n=0}^{\infty} a_{d+n} (x-z_0)^n \quad \textit{mit} \quad a_d \ne 0\,,$$
   und $(\exists\, \varepsilon \in (0, \rho)\,)\ (\forall x \in D \cap B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) \ \ f(x) \ne 0.$
2. *Seien f, $g\colon D \to \mathbb{C}$ analytisch in z_0 und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind auch die Funktionen λf, $f+g$ und fg analytisch in z_0,* $\operatorname{ord}(f+g; z_0) \ge \min\{\operatorname{ord}(f; z_0), \operatorname{ord}(g; z_0)\}$ *und* $\operatorname{ord}(fg; z_0) = \operatorname{ord}(f; z_0) + \operatorname{ord}(g; z_0)$.

   Insbesondere ist $\mathcal{O}(D)$ eine $\mathbb{C}$-Unteralgebra von $\operatorname{Abb}(D, \mathbb{C})$.
3. *Seien f, $g\colon D \to \mathbb{C}$ analytisch in z_0, und seien m, $n \in \mathbb{N}$, so dass $f(x) = (x-z_0)^m f_0(x)$ und $g(x) = (x-z_0)^n g_0(x)$ mit in z_0 analytischen Funktionen f_0, $g_0\colon D \to \mathbb{C}$. Sei $f_0(z_0) = a_0 \ne 0$ und $g_0(z_0) = b_0 \ne 0$. Dann ist $m = \operatorname{ord}(f; z_0)$, $n = \operatorname{ord}(g; z_0)$, und*
   $$(\exists \rho \in \mathbb{R}_{>0})\ \big(\forall x \in D \cap B_\rho(z_0) \setminus \{z_0\}\big) \quad \Big[g_0(x) \ne 0 \quad \wedge \quad \frac{f(x)}{g(x)} = (x-z_0)^{m-n} \frac{f_0(x)}{g_0(x)} \Big]\,.$$
   Insbesondere gilt:
   $$h_0 = \frac{f_0}{g_0}\colon D \cap B_\rho(z_0) \to \mathbb{C} \quad \textit{ist analytisch in} \quad z_0\,, \quad h_0(z_0) = \frac{a_0}{b_0}\,,$$

und die Potenzreihenentwicklung von h_0 in z_0 erhält man als Quotienten der Potenzreihenentwicklungen von f_0 und g_0.

Im Falle $n = 0$ ist $\frac{f}{g}$ analytisch in z_0. Im Falle $0 < n \leq m$ ist $\frac{f}{g}$ stetig ergänzbar in z_0, und die stetige Ergänzung ist analytisch in z_0.

Man sagt dann, $\frac{f}{g}$ is analytisch in z_0, unterscheidet nicht mehr zwischen der Funktion $\frac{f}{g}$ und ihrer stetigen Eränzung und schreibt

$$\frac{f}{g}(z_0) \;=\; \frac{f(x)}{g(x)}\Big|_{x=z_0} \;=\; \lim_{x\to z_0} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

4. *Sei $g\colon D \to \mathbb{C}$ analytisch in z_0, $g(D) \subset E \subset \mathbb{C}$ und $f\colon E \to \mathbb{C}$ analytisch in $g(z_0)$. Dann ist auch $f\circ g\colon D \to \mathbb{C}$ analytisch in z_0, und die Potenzreihenentwicklung von $g\circ f$ in z_0 erhält man wie folgt:*

   Seien

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-z_0)^m \quad \textit{und} \quad f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\big(y - g(z_0)\big)^m$$

   die Potenzreihenentwicklungen von g in z_0 und von f in $g(z_0)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist dann die Funktion $x \mapsto (g(x)-g(z_0))^n$ analytisch in z_0 und habe die Potenzreihenentwicklung

$$\big(g(x) - g(z_0)\big)^n = \Big(\sum_{m=1}^{\infty} b_m(x-z_0)^m\Big)^n = \sum_{m=n}^{\infty} b_m(n)(x-z_0)^m$$

   mit Koeffizienten $b_m(n) \in \mathbb{C}$, $b_0(0) = 1$, und $b_m(0) = 0$ für $m > 0$. Dann hat $f\circ g$ in z_0 die Potenzreihenentwicklung

$$(f\circ g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big(\sum_{m=1}^{\infty} b_m(x-z_0)^m\Big)^n = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{m} a_n b_m(n)\Big)(x-z_0)^m\,.$$

5. *Sei $P[z]$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist die Funktion $f\colon B_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$, definiert durch $f(x) = P(x-z_0)$, analytisch in $B_\rho(z_0)$.*

   Explizit erhält man die Potenzreihenentwicklung von f in einem Punkt $z_1 \in B_\rho(z_0)$ durch Einsetzen der Potenzreihe $T[z] = (z_1 - z_0) + z$ in $P[z]$: Ist $P[z] = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ und $z_1 \in B_\rho(z_0)$, so gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $x \in B_\varepsilon(z_1)$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\big(z_1 + (x-z_1)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\big((z_1-z_0) + (x-z_1)\big)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}(z_1-z_0)^{n-m}(x-z_1)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m} a_n(z_1-z_0)^{n-m}\Big)(x-z_1)^m\,. \end{aligned}$$

Beweis. 1. Nach Definition hat f in z_0 eine Potenzreihenentwicklung der behaupteten Form. Nach Satz 5.11 ist die Funktion $z \mapsto P(z)$ stetig in $B_\rho(0)$, und wegen

$$f \mid D\cap B_\rho(0) = (x \mapsto x - z_0 \mapsto P(x-z_0)$$

ist f stetig in z_0.

Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung: Wegen $z_0 \in D'$ gibt es eine Folge $(x_k)_{k\ge0}$ in $D \cap B_\rho(z_0) \setminus \{z_0\}$ mit $(x_k)_{k\ge0} \to z_0$. Dann ist $(x_k - z_0)_{k\ge0}$ eine Folge in $B_\rho(0) \setminus \{0\}$ mit $(x_k - z_0)_{k\ge0} \to 0$. Sind nun $P[z]$ und $P_1[z]$ Potenzreihen, so dass

$$\big(\forall x \in D \cap B_\rho(z_0)\big) \quad f(x) = P(x - z_0) = P_1(x - z_0)\,,$$

so folgt $(\forall k \ge 0)$ $P(x_k - z_0) = P_1(x_k - z_0)$, und daher $P[z] = P_1[z]$ nach Satz 5.13.
Sei nun $d = \operatorname{ord}(f; z_0) \in \mathbb{N}_0$ und

$$f_0\colon B_\rho(z_0) \to \mathbb{C} \quad \text{definiert durch} \quad f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{d+n} z^n\,.$$

Nach Satz 5.11 ist f_0 stetig in z_0, es ist $f_0(z_0) = a_d \ne 0$, und mit Satz 4.2.**B** folgt:

$$(\exists\, \varepsilon \in (0,\rho)\,)\ (\forall x \in D \cap B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) \quad f_0(x) \ne 0\,.$$

Für $x \in D \cap B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ ist dann $f(x) = (x - z_0)^d f_0(x) \ne 0$.

2. folgt aus Satz 5.11 und den Rechenregeln für Potenzreihen, 3. folgt aus Satz 5.15, und 4. und 5. folgen aus Satz 5.14. □

Beispiele:
1. Jede Polynomfunktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist analytisch, d. h., $\mathcal{P}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{C})$.
2. Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $h\colon D \to \mathbb{C}$ eine rationale Funktion. Dann gibt es Polynomfunktionen $f,\, g \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ mit $D = \{x \in \mathbb{C} \mid g(x) \ne 0\}$. Nach Satz 4.2.**B.**1 ist D offen, und nach Obigem ist $h \in \mathcal{O}(D)$.

Satz 6.2. *Für $d \in \mathbb{N}_0$ und $z \in B_1(0)$ ist*

$$(1+z)^{-d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-d}{n} z^n\,.$$

Beweis. Induktion nach d. Für $d = 0$ ist nichts zu zeigen.
$d \ge 0$, $d \to d+1$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt für $z \in B_1(0)$

$$\begin{aligned}(1+z)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-d-1}{n} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-d-1}{n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-d-1}{n} z^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\binom{-d-1}{n} + \binom{-d-1}{n-1}\Big] z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{-d}{n} z^n = (1+z)^{-d}\,,\end{aligned}$$

und nach Division durch $1+z$ folgt die Behauptung. □

7.2. Exponentialfunktion, Sinus und Kosinus

Satz und Definition 6.3. *Die Potenzreihe*

$$\sum_{n\ge0} \frac{z^n}{n!} \quad \textit{hat den Konvergenzradius} \quad \rho = \infty\,.$$

Die Funktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ heißt *Exponentialfunktion*.

Ist $z \in \mathbb{C}$ und $(z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $(z_n)_{n\geq 1} \to z$, so folgt

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{z_n}{n}\Big)^n = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n, \quad \textit{und} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \exp(x) = \mathsf{e}^x .$$

Beweis. Wegen $\big(\sqrt[n]{n!}\,\big)_{n\geq 1} \to \infty$ (siehe Beispiel 3 nach Satz 3.14) ist $\rho = \infty$ nach Satz 5.10. Aus Satz 3.13 folgt

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; \mathsf{e}^x = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n ,$$

und daher genügt es, zu zeigen: Für jede Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{C}$ mit $(z_n)_{n\geq 1} \to z$ ist

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{z_n}{n}\Big)^n, \quad \text{also} \quad (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\;(\exists n_0 \geq 0)\;(\forall n \geq n_0) \quad \Big|\Big(1+\frac{z_n}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\Big| < \varepsilon .$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $Z \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(\forall n \geq 0)\; |z_n| \leq Z$. Dann ist auch $|z| \leq Z$, und es sei $m \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{Z^k}{k!} \;<\; \frac{\varepsilon}{3} .$$

Dann ist für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\Big(\frac{z_n}{n}\Big)^k = \sum_{k=0}^{m}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{z_n^k}{k!}, \quad \text{also} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\Big(\frac{z_n}{n}\Big)^k = \sum_{k=0}^{m}\frac{z^k}{k!}$$

und daher

$$(\exists n_0 \geq m)\;(\forall n \geq n_0) \quad \Big|\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\Big(\frac{z_n}{n}\Big)^k - \sum_{k=0}^{m}\frac{z^k}{k!}\Big| \;<\; \frac{\varepsilon}{3} .$$

Sei $n \geq n_0$. Dann folgt

$$\Big|\Big(1+\frac{z_n}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\Big| \leq \Big|\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\Big(\frac{z_n}{n}\Big)^k - \sum_{k=0}^{m}\frac{z^k}{k!}\Big| + \Big|\sum_{k=m+1}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{z_n}{n}\Big)^k\Big| + \Big|\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\Big| < \varepsilon ,$$

da

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{z_n}{n}\Big)^k\Big| \;\leq\; \sum_{k=m+1}^{n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{|z_n|^k}{k!} \;<\; \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{Z^k}{k!} \;<\; \frac{\varepsilon}{3}$$

und

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\Big| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{Z^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3} . \qquad \square$$

Definition 6.2. Für $z \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert man die *Exponentialfunktion zur Basis* a durch

$$a^z = \exp(z \log a) , \quad \text{insbesondere} \quad \mathsf{e}^z = \exp(z) .$$

Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt diese Definition mit der aus 3.4 überein, denn nach Satz 5.12 ist dann

$$a^z = \mathsf{e}^{\log(a^z)} = \mathsf{e}^{z\log a} .$$

Die *Kosinusfunktion* $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die *Sinusfunktion* $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die *hyperbolische Kosinusfunktion* $\cosh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und die *hyperbolische Sinusfunktion* $\sinh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind definiert durch

$$\cos z = \cos(z) = \frac{1}{2}\big(\mathsf{e}^{iz} + \mathsf{e}^{-iz}\big)\,, \qquad \sin z = \sin(z) = \frac{1}{2i}\big(\mathsf{e}^{iz} - \mathsf{e}^{-iz}\big)\,,$$
$$\cosh z = \cosh(z) = \frac{1}{2}\big(\mathsf{e}^{z} + \mathsf{e}^{-z}\big)\,, \qquad \sinh z = \sinh(z) = \frac{1}{2}\big(\mathsf{e}^{z} - \mathsf{e}^{-z}\big)\,.$$

Satz 6.4. *Seien* $z,\, z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ *und* $x \in \mathbb{R}$.

1. *Es ist*
$$\cos(-z) = \cos z\,, \quad \sin(-z) = -\sin z\,, \quad \cosh z = \cos(iz)\,, \quad \sinh z = -i\sin(iz)\,,$$
$$\cosh z = \cosh(-z)\,, \quad \sinh z = -\sinh(-z)\,,$$
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}\,, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}\,, \quad \frac{\sin z}{z}\Big|_{z=0} = 1\,,$$
$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \textit{und} \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,$$
2. *Für alle* $F \in \{\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh\}$ *gilt*: $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist analytisch* (*also insbesondere stetig*), $\overline{F(z)} = F(\overline{z})$ *und* $F(x) \in \mathbb{R}$.
3. (Additionstheoreme)
$$\mathsf{e}^{z_1+z_2} = \mathsf{e}^{z_1}\mathsf{e}^{z_2}\,, \quad \mathsf{e}^{z} \ne 0\,, \quad (\forall n \in \mathbb{Z}) \;\; (\mathsf{e}^{z})^n = \mathsf{e}^{nz}\,,$$
$$\mathsf{e}^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z\,, \quad \cos^2 z + \sin^2 z = \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\,,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2\,, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1\,,$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \quad \textit{und} \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z\,.$$
4. (Moivre'sche Formeln) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz$.
5. $|\mathsf{e}^{z}| = \mathsf{e}^{\Re(z)}$, $|\mathsf{e}^{ix}| = 1$ *und* $|\mathsf{e}^{ix} - 1| \le |x|$.

Beweis. 1. Es ist
$$\cos z = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{k!}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k + (-i)^k}{2}\, \frac{z^k}{k!}\,,$$
und daraus folgt die Behauptung wegen
$$\frac{i^k + (-i)^k}{2} = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ (-1)^m\,, & \text{falls } k = 2m \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0\,. \end{cases}$$
Alle übrigen Behauptungen sind genauso leicht nachzurechnen.

2. Nach Satz 6.1.1 und Satz 5.1.B.1.
3. Nach Satz 5.7 ist
$$\mathsf{e}^{z_1}\mathsf{e}^{z_2} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n = \mathsf{e}^{z_1+z_2}\,.$$

Wegen $\mathsf{e}^{z}\mathsf{e}^{-z} = \mathsf{e}^{0} = 1$ ist $\mathsf{e}^{z} \ne 0$. Für $n \ge 0$ folgt $(\mathsf{e}^{z})^n = \mathsf{e}^{nz}$ durch Induktion nach n, und wegen $\mathsf{e}^{-nz}(\mathsf{e}^{z})^n = \mathsf{e}^{-nz}\mathsf{e}^{nz} = 1$ folgt $\mathsf{e}^{-nz} = ((\mathsf{e}^{z})^n)^{-1} = (\mathsf{e}^{z})^{-n}$.

Wegen $2(\cos z \pm i \sin z) = (\mathsf{e}^{iz} + \mathsf{e}^{-iz}) \pm (\mathsf{e}^{iz} - \mathsf{e}^{-iz}) = 2\mathsf{e}^{\pm iz}$ folgt $\mathsf{e}^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$. Daher ist

$$\cos^2 z + \sin^2 z = (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = \mathsf{e}^{iz}\mathsf{e}^{-iz} = 1$$

und $\cosh^2 z - \sinh^2 z = \cos^2(iz) + \sin^2(iz) = 1$.
Es ist

$$\begin{aligned}\cos(z_1 + z_2) \pm i \sin(z_1 + z_2) &= \mathsf{e}^{\pm i(z_1+z_2)} = \mathsf{e}^{\pm iz_1}\mathsf{e}^{\pm iz_2} = (\cos z_1 \pm i \sin z_1)(\cos z_2 \pm i \sin z_2) \\ &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \pm i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2)\,.\end{aligned}$$

Durch Addition und Subtraktion dieser beiden Formeln folgen die Additionstheorem für Sinus und Kosinus, und daraus folgen unmittelbar die Verdoppelungsformeln.

4. Nach 3. ist $(\cos z + i \sin z)^n = (\mathsf{e}^{iz})^n = \mathsf{e}^{inz} = \cos nz + i \sin nz$.

5. Es ist $|\mathsf{e}^z|^2 = \mathsf{e}^z\overline{\mathsf{e}^z} = \mathsf{e}^z\mathsf{e}^{\overline{z}} = \mathsf{e}^{z+\overline{z}} = \mathsf{e}^{2\Re(z)} = (\mathsf{e}^{\Re(z)})^2$, und aus $\mathsf{e}^{\Re(z)} > 0$ folgt $|\mathsf{e}^z| = \mathsf{e}^{\Re(z)}$, also insbesondere $|\mathsf{e}^{ix}| = 1$.
Wegen $|\mathsf{e}^{ix} - 1|^2 = (\mathsf{e}^{ix} - 1)(\mathsf{e}^{-ix} - 1) = 2(1 - \cos x) \le 4$ folgt die Ungleichung für $|x| \ge 2$, und für $x = 0$ ist sie trivial. Sei also $0 < |x| < 2$. Dann ist

$$(\forall n \ge 0) \quad \frac{x^{2n}}{(2n+2)!} > \frac{x^{2n+2}}{(2n+4)!} \qquad \text{und daher} \qquad \frac{1 - \cos x}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!} < \frac{1}{2}$$

nach Satz 5.3, woraus wieder $|\mathsf{e}^{ix} - 1| \le |x|$ folgt. ☐

Satz und Definition 6.5. *Es gibt genau eine Zahl* $\pi \in \mathbb{R}_{>0}$, *so dass* $\{t \in \mathbb{R} \mid \mathsf{e}^{it} = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}$. $\pi = 3,14159\ldots$ *heißt* LUDOLPH*'sche Zahl. Es ist*

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0\,, \quad \forall x \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big) \;\cos x > 0\,, \quad \sin\pi = 0\,, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad \textit{und} \quad \forall x \in (0, \pi) \;\sin x > 0\,.$$

Beweis. Eindeutigkeit: Seien π, $\pi' \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $2\pi\mathbb{Z} = 2\pi'\mathbb{Z}$. Dann gibt es k, $k' \in \mathbb{N}$ mit $2\pi = 2\pi' k'$ und $2\pi' = 2\pi k$, also $kk' = 1$ und daher $k = k' = 1$.
Existenz: Sei $x \in (0, \sqrt{6})$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$(2n+2)(2n+3) \ge 6 > x^2\,, \quad \text{also} \quad \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\,,$$

und nach Satz 5.3 folgt

$$0 < x - \frac{x^3}{6} \;<\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; \sin x \;<\; x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\,.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(2n+1)(2n+2) \ge 12 > x^2\,, \quad \text{also} \quad \frac{x^{2n}}{(2n)!} > \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,,$$

und nach Satz 5.3 folgt wieder

$$-\frac{x^2}{2} \;<\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \;=\; \cos x - 1 \;<\; -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\,.$$

Daher ist $\cos x > 0$ für alle $x \in (0, \sqrt{2}\,]$ und $\cos 2 < 0$. Nach Satz 4.11.A.1 gibt es ein $t \in (\sqrt{2}, 2)$ mit $\cos t = 0$, es sei $\tau = \inf\{t \in (\sqrt{2}, 2) \mid \cos t = 0\}$ und $\pi = 2\tau$. Dann gibt es eine Folge $(t_n)_{n\ge 0}$ in $(\sqrt{2}, 2)$, so dass $(\forall n \ge 0)\; \cos t_n = 0$ und $(t_n)_{n\ge 0} \to \tau$. Wegen der Stetigkeit von $\cos$ folgt daraus $\cos\tau = 0$, und nach Definition ist $\cos x > 0$ für alle $x \in [0, \tau)$.

Wegen $\tau < 2 < \sqrt{6}$ ist auch $\sin x > 0$ für alle $x \in (0, \tau)$, und nach Satz 6.4 folgt für alle $x \in (0, 2\tau)$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} > 0\,.$$

Wegen $\sin^2\tau = 1 - \cos^2\tau = 1$ und $\sin\tau > 0$ folgt $\sin\tau = 1$ und $\mathsf{e}^{i\tau} = \cos\tau + i\sin\tau = i$. Für $k \in \mathbb{Z}$ ist $\mathsf{e}^{2\pi ik} = (\mathsf{e}^{i\tau})^{4k} = i^{4k} = 1$, und es bleibt zu zeigen:

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ \big[\mathsf{e}^{it} = 1 \implies t \in 2\pi\mathbb{Z}\big]\,.$$

Sei $t \in \mathbb{R}$ mit $\mathsf{e}^{it} = 1$ und $l \in \mathbb{Z}$ mit $t \in [l\tau, l\tau + \tau)$. Wir setzen $t = l\tau + x$ mit $x \in [0, \tau)$ und $l = 2m + e$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $e \in \{0, 1\}$. Dann folgt

$$1 = \mathsf{e}^{it} = \mathsf{e}^{(2m+e)i\tau + ix} = i^{2m+e}\mathsf{e}^{ix} = (-1)^m i^e(\cos x + i\sin x)\,.$$

Wegen $\cos x \neq 0$ ist $e = 0$, also $\sin x = 0$ und daher $x = 0$. Damit folgt $1 = (-1)^m$, also $m = 2n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $t = 4n\tau \in 2\pi\mathbb{Z}$. □

Satz 6.6.

1. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})\ \ \big[\mathsf{e}^{z_1} = \mathsf{e}^{z_2} \iff z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}\big]\,.$
2. *Spezielle Werte von* $\sin$ *und* $\cos$*:*

z	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin z$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos z$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

3. *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *und* $k \in \mathbb{Z}$ *ist*

$$\cos\Big(z \pm \frac{\pi}{2}\Big) = \mp\sin z\,, \quad \sin\Big(z \pm \frac{\pi}{2}\Big) = \pm\cos z\,,$$

$$\cos(z + k\pi) = (-1)^k\cos z \quad \textit{und} \quad \sin(z + k\pi) = (-1)^k\sin z\,.$$

4. $\{z \in \mathbb{C} \mid \sin z = 0\} = \pi\mathbb{Z}$ *und* $\{z \in \mathbb{C} \mid \cos z = 0\} = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\,.$

Beweis. 1. $\Longleftarrow$: Aus $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$ folgt $\mathsf{e}^{z_1 - z_2} = 1$ nach Satz 6.5, und daraus $\mathsf{e}^{z_1} = \mathsf{e}^{z_2}$ nach Satz 6.4.

$\Longrightarrow$: Aus $\mathsf{e}^{z_1} = \mathsf{e}^{z_2}$ folgt $\mathsf{e}^{z_1 - z_2} = 1 = |\mathsf{e}^{z_1 - z_2}| = \mathsf{e}^{\Re(z_1 - z_2)}$ nach Satz 6.4. Daher ist $\Re(z_1 - z_2) = 0$, also $z_1 - z_2 = it$ mit $t \in \mathbb{R}$, und nach Satz 6.5 folgt $t \in 2\pi\mathbb{Z}$.

2. Nach Definition ist $\mathsf{e}^{2\pi i} = 1 = (\mathsf{e}^{\pi i})^2$ und $\mathsf{e}^{\pi i} \neq 1$, also $-1 = \mathsf{e}^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi$, und daraus folgt $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$. Nach Satz 6.5 ist

$$\big(\mathsf{e}^{\frac{i\pi}{4}}\big)^2 = \mathsf{e}^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\Big)^2\,,$$

also

$$\mathsf{e}^{\frac{i\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \pm\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\Big)\,, \quad \text{und wegen} \quad \cos\frac{\pi}{4} > 0 \quad \text{folgt} \quad \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Sei nun

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{6}, \quad \beta = \sin\frac{\pi}{6}, \quad \text{also} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}\,, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1\,.$$

Dann ist

$$(\alpha + i\beta)^3 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta i - 3\alpha\beta^2 - i\beta^3\,,$$

also $\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) = 0$. Wegen $\alpha \neq 0$ folgt

$$0 = \alpha^2 - 3\beta^2 = \alpha^2 - 3(1-\alpha^2) = 4\alpha^2 - 3\,, \quad \text{also} \quad \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1}{2}\,.$$

Daher ist

$$\sin\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \cos\frac{\pi}{3} = \cos^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

3. folgt aus 2. und Satz 6.4.3, und 4. folgt aus 2. und Satz 6.5. □

6.2. Bogenlänge und Kreismessung

Satz 6.7. *Die Abbildung*

$$\operatorname{cis}\colon [0,2\pi) \to S^1 = \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z| = 1\big\}\,, \quad \textit{definiert durch} \quad \operatorname{cis}(t) = \mathsf{e}^{it} = \cos t + i\sin t\,,$$

ist stetig und bijektiv. Die Umkehrabbildung $\operatorname{cis}^{-1}\colon S^1 \to [0,2\pi)$ *ist unstetig in* 1 *und stetig in allen Punkten* $z \in S^1 \setminus \{1\}$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit von exp ist cis stetig, und nach Satz 6.6.1 ist cis injektiv.
Surjektivität von cis: Sei $z = x + iy \in S^1$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 = 1$. Dann ist $x \in [-1,1]$, und wegen $\cos\pi = -1$, $\cos 0 = 1$ gibt es nach Satz 4.11.A.1 ein $t \in [0,\pi]$ mit $\cos t = x$. Dann folgt

$$|y| = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = |\sin t|\,.$$

Im Falle $\sin t = y$ folgt $z = \mathsf{e}^{it}$. Im Falle $\sin t \neq y$ ist $t \neq 0$, also $2\pi - t \in [0,2\pi)$ und $z = \mathsf{e}^{i(2\pi - t)}$.
Stetigkeit von cis^{-1} in $S^1 \setminus \{1\}$: Sei $z \in S^1 \setminus \{1\}$ und $(z_n)_{n\ge0}$ eine Folge in S^1 mit $(z_n)_{n\ge0} \to z$. Dann ist $t_n = \operatorname{cis}^{-1}(z_n) \in [0,2\pi)$, und nach Satz 4.16 hat $(t_n)_{n\ge0}$ einen Häufungswert $t \in [0,2\pi]$. Ist $T \subset \mathbb{N}_0$ unendlich mit $(t_n)_{n\in T} \to t$, so folgt $(\mathsf{e}^{it_n})_{n\in T} \to \mathsf{e}^{it}$, und wegen $\mathsf{e}^{it_n} = z_n$ folgt $\mathsf{e}^{it} = z \neq 1$, also $t = \operatorname{cis}^{-1}(z) \in (0,2\pi)$. Da t der einzige Häufungswert von $(t_n)_{n\ge0}$ ist, folgt $(t_n)_{n\ge0} \to t$ nach Satz 3.17.
Unstetigkeit von cis^{-1} in 1: Sei $(\varepsilon_n)_{n\ge0}$ eine Folge in $(0,2\pi)$ mit $(\varepsilon_n)_{n\ge0} \to 0$. Dann ist

$$(\mathsf{e}^{(2\pi-\varepsilon_n)i})_{n\ge0} \to 1 = \operatorname{cis}(0)\,, \quad \text{aber} \quad \big(\operatorname{cis}^{-1}(\mathsf{e}^{(2\pi-\varepsilon_n)i})\big)_{n\ge0} = (2\pi - \varepsilon_n)_{n\ge0} \not\to 0\,.$$ □

Definition 6.3. Sei X ein normierter Raum und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetige Abbildung $\varphi\colon I \to X$ heißt *Weg* oder *parametrisierte Kurve* mit *Parameterintervall* I. Dann nennt man

$$\mathsf{L}(\varphi) = \sup\Big(\Big\{\sum_{j=1}^m \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\| \;\Big|\; m \in \mathbb{N}\,,\ t_0, \ldots, t_m \in I\,,\ t_0 < t_1 < \ldots < t_m\Big\}\Big) \in [0,\infty]$$

die *Länge* von φ. Ist $\mathsf{L}(\varphi) < \infty$, so heißt φ *rektifizierbar.*
Anschauliche Deutung: Für $t_0, \ldots, t_m \in I$ mit $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ sei

$$P = \bigcup_{j=1}^m \big[\varphi(t_{j-1}),\, \varphi(t_j)\big] \qquad \text{und} \qquad \mathsf{L}(P) = \sum_{j=1}^m \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\|\,.$$

Dann ist P ein φ approximierender (eventuell mehrmals durchlaufener) Polygonzug der Länge $\mathsf{L}(P)$, und die Länge von φ ist das Supremum der Längen aller solcher Polygonzüge.

Satz und Definition 6.8. *Sei* $T \in [0, 2\pi]$ *und* $\varphi\colon [0, T] \to \mathbb{C}$ *definiert durch* $\varphi(t) = \mathsf{e}^{it}$. *Dann ist* $\mathsf{L}(\varphi) = T$.

Man sagt, φ parametrisiert den Bogen von $1 = \mathsf{e}^{i0}$ bis e^{iT} auf dem komplexen Einheitskreis S^1.

Beweis. Es ist

$$\mathsf{L}(\varphi) = \sup\Big\{ \sum_{j=1}^{m} |\mathsf{e}^{it_j} - \mathsf{e}^{it_{j-1}}| \,\Big|\, m \in \mathbb{N},\ 0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m \le T \Big\},$$

und daher genügt es, zu zeigen:

A. Ist $m \in \mathbb{N}$ und $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m \le T$, so folgt

$$\sum_{j=1}^{m} |\mathsf{e}^{it_j} - \mathsf{e}^{it_{j-1}}| \le T\,.$$

B. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und Zahlen $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m \le T$, so dass

$$T - \varepsilon < \sum_{j=1}^{m} |\mathsf{e}^{it_j} - \mathsf{e}^{it_{j-1}}|\,.$$

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m \le T$. Dann ist für $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$\big|\,\mathsf{e}^{it_j} - \mathsf{e}^{it_{j-1}}\big| = \big|\,\mathsf{e}^{it_{j-1}}(\mathsf{e}^{i(t_j - t_{j-1})} - 1)\big| = (t_j - t_{j-1})\,\Big|\,\frac{\mathsf{e}^{i(t_j - t_{j-1})} - 1}{t_j - t_{j-1}}\,\Big| \le t_j - t_{j-1}$$

nach Satz 6.4.5 und daher

$$\sum_{j=1}^{m} |\mathsf{e}^{it_j} - \mathsf{e}^{it_{j-1}}| \ \le\ t_m - t_0 \ \le\ T\,.$$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen

$$\frac{\mathsf{e}^{y} - 1}{y}\Big|_{y=0} = \lim_{y \to 0} \frac{\mathsf{e}^{y} - 1}{y} = 1 \quad \text{folgt:} \quad (\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}) \quad \big(\forall y \in B_\delta(0)\big) \quad \Big|\,\frac{\mathsf{e}^{y} - 1}{y}\,\Big| \ >\ 1 - \frac{\varepsilon}{T}\,.$$

Seien nun $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$ mit $(\forall j \in \{1, \ldots, m\})\ t_j - t_{j-1} < \delta$. Dann ist

$$\sum_{j=1}^{m} |\mathsf{e}^{it_j} - \mathsf{e}^{it_{j-1}}| = \sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j-1})\,\Big|\frac{\mathsf{e}^{i(t_j - t_{j-1})} - 1}{i(t_j - t_{j-1})}\Big| > \sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j-1})\Big(1 - \frac{\varepsilon}{T}\Big) = T(1 - \frac{\varepsilon}{T}) = T - \varepsilon\,.$$

und daher

$$\sum_{j=1}^{m} |\mathsf{e}^{it_j} - \mathsf{e}^{it_{j-1}}| \ >\ T(1 - \frac{\varepsilon}{T}) \ =\ T - \varepsilon\,. \qquad \square$$

Satz 6.9 (Polarkoordinaten)**.**

1. *Die Abbildungen*

$$\theta\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi) & \to \ \mathbb{C}^\times \\ (r, \varphi) & \mapsto \ r\mathsf{e}^{i\varphi} \end{cases} \qquad \textit{und} \qquad \theta'\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi] & \to \ \mathbb{C}^\times \\ (r, \varphi) & \mapsto \ r\mathsf{e}^{i\varphi} \end{cases}$$

sind stetig und bijektiv, $\theta^{-1} \,|\, \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\ge 0}$ *und* $\theta'^{-1} \,|\, \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\le 0}$ *sind stetig,* θ^{-1} *ist unstetig auf* $\mathbb{R}_{>0}$, *und* θ'^{-1} *ist unstetig auf* $\mathbb{R}_{<0}$.

2. *Die Abbildung*

$$\theta_1\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,2\pi) & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,\varphi) & \mapsto & (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) \end{cases}$$

ist stetig und surjektiv, und $\theta_1 \,|\, \mathbb{R}_{>0}\times[0,2\pi)$ *ist injektiv.*

Beweis. Seien die Abbildungen $\gamma\colon \mathbb{R}_{>0}\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}_{>0}\times S^1$ und $\mu\colon \mathbb{R}_{>0}\times S^1\to\mathbb{C}^\times$ definiert durch $\gamma(r,\varphi)=(r,\operatorname{cis}(\varphi))$ und $\mu(r,z)=rz$. Dann ist $\theta=\mu\circ\gamma$, μ ist stetig und bijektiv, und wegen $\mu^{-1}(x)=(|x|,|x|^{-1}x)$ ist auch μ^{-1} stetig. Nach Satz 6.7 ist γ stetig und bijektiv, und wegen $\gamma^{-1}(r,z)=(r,\operatorname{cis}^{-1}(z))$ ist γ^{-1} genau dann stetig in einem Punkt $(r,z)\in\mathbb{R}_{>0}\times S^1$, wenn $z\neq 1$. Daher ist $\theta^{-1}=\gamma^{-1}\circ\mu^{-1}$ genau dann stetig in $x\in\mathbb{C}$, wenn $\mu^{-1}(x)\neq 1$, wenn also $x\notin\mathbb{R}_{>0}$.

Für alle $(r,\varphi)\in\mathbb{R}_{>0}\times(-\pi,\pi]$ ist $\pi-\varphi\in[0,2\pi)$ und $\theta'(r,\varphi)=-\overline{\theta(r,\pi-\varphi)}$, und daher folgen auch die Behauptungen für θ'.

2. Offensichtlich ist θ_1 stetig und $\theta_1\big(\{0\}\times[0,2\pi)\big)=\{\mathbf{0}\}$. Wegen $\mathbb{C}^\times=\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ und 1. ist $\theta_1\,|\,\mathbb{R}_{>0}\times[0,2\pi)\colon \mathbb{R}_{>0}\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ bijektiv. □

Geometrische Definition von Sinus und Kosinus (Skizze).

1. Definiere $K_0\colon [0,1)\to\mathbb{R}^2$ durch

$$K_0(t)=\begin{cases} \big(1-4t,\ \sqrt{1-(1-4t)^2}\big)\,, & \text{falls} \quad t\in[0,\tfrac12]\,, \\ \big(-3+4t,\ -\sqrt{1-(-3+4t)^2}\big)\,, & \text{falls} \quad t\in(\tfrac12,1) \end{cases}$$

und $K\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ durch $K(t)=K_0\big(t-\lfloor t\rfloor\big)$.

K beschreibt die Aufwicklung der Zahlengeraden auf den Einheitskreis.

2. Definiere die Kreislängenfunktion $L\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$L(x)=\begin{cases} \mathsf{L}\big(K\,|\,[0,x]\big)\,, & \text{falls} \quad x\geq 0\,, \\ -\mathsf{L}\big(K\,|\,[x,0]\big)\,, & \text{falls} \quad x<0\,. \end{cases}$$

L ist streng monoton wachsend, stetig, und $L(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Damit ist auch $L^{-1}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig.

3. Definiere $\sin,\cos\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch $(\forall t\in\mathbb{R})\ K\circ L^{-1}(t)=(\cos t,\sin t)$.

6.3 Wurzeln und Logarithmen im Komplexen, Fundamentalsatz der Algebra

Definition 6.4. Für $z\in\mathbb{C}^\times$, $z=r\mathsf{e}^{i\varphi}$ mit $r\in\mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi\in(-\pi,\pi]$ sei

$$\operatorname{Log}(z)=\log r+i\varphi\,.$$

Die Funktion $\operatorname{Log}\colon\mathbb{C}^\times\to\mathbb{C}$ heißt *Hauptwert des komplexen Logarithmus.* Für $\alpha\in\mathbb{C}$ und $z\in\mathbb{C}^\times$ sei

$$z^\alpha=\mathsf{e}^{\alpha\operatorname{Log}(z)}\,.$$

Bemerkungen:

1. Sei $z\in\mathbb{R}_{>0}$. Dann ist $\operatorname{Log}(z)=\log z$, und die Definition von z^w ist mit Definition 6.2 konsistent.

2. Für $x\in\mathbb{R}_{>0}$ ist $-x=x\mathsf{e}^{i\pi}$, also $\operatorname{Log}(-x)=\log x+i\pi$. Insbesondere ist $\operatorname{Log}(-1)=i\pi$.

3. Aus $i = \mathsf{e}^{i\pi/2}$ folgt $\mathrm{Log}(i) = \frac{i\pi}{2}$ und $i^i = \mathsf{e}^{-\pi/2}$.

Satz 6.10. *Sei* $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \in (-\pi, \pi]\}$.

1. $\exp|\mathcal{S} \colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ *ist injektiv,* $\exp(\mathcal{S}) = \exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$, *und* $(\exp|\mathcal{S})^{-1} = \mathrm{Log} \colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$.
2. $\mathrm{Log}\,|\,\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\le 0}$ *ist stetig, und* Log *ist unstetig auf* $\mathbb{R}_{<0}$.

Beweis. Nach Satz 6.6.1 ist $\exp|\mathcal{S} \colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ injektiv. Ist $z \in \mathbb{C}$, so gibt es genau ein $g \in \mathbb{Z}$ mit $\Im(z - 2\pi i g) = \Im(z) - 2\pi g \in (-\pi, \pi]$, und dann ist $\exp(z) = \exp(z - 2\pi i g) \in \exp(\mathcal{S})$. Also folgt $\exp(\mathbb{C}) = \exp(\mathcal{S})$.

Sei $\lambda \colon \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi] \to \mathcal{S}$ definiert durch $\lambda(r, \varphi) = \log r + i\varphi$. Da $\log \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig und bijektiv ist, ist auch λ stetig und bijektiv, und wegen $\lambda^{-1}(z) = (\mathsf{e}^{\Re(z)}, \Im(z))$ ist auch λ^{-1} stetig. Nach Definition ist $\mathrm{Log} = \lambda \circ \theta'^{-1} \colon \mathbb{C}^\times \to \mathcal{S}$, also $\mathrm{Log} \colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ injektiv, und Log ist genau dann stetig in einem Punkt $z \in \mathbb{C}^\times$, wenn θ'^{-1} in z stetig ist. Nach Satz 6.9.1 ist Log stetig auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\le 0}$ und unstetig in allen Punkten $z \in \mathbb{R}_{<0}$.

Sei nun $z \in \mathbb{C}^\times$ und $(r, \varphi) = \theta'^{-1}(z) \in \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi]$. Dann ist $z = r\mathsf{e}^{i\varphi}$, und

$$\exp \circ \mathrm{Log}(z) = \exp(\log r + i\varphi) = r\mathsf{e}^{i\varphi} = z\,,$$

also $\mathrm{Log} = (\exp|\mathcal{S})^{-1}$ und $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$. □

Satz 6.11. *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $z \in \mathbb{C}^\times$, $z = r\mathsf{e}^{i\varphi}$ *mit* $r \in \mathbb{R}_{>0}$ *und* $\varphi \in [0, 2\pi)$. *Dann ist*

$$\{x \in \mathbb{C} \mid x^n = z\} = \Big\{ \sqrt[n]{r}\, \exp\Big(\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}\Big) \;\Big|\; k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \Big\}.$$

Beweis. Für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ist

$$\Big[\sqrt[n]{r} \exp\Big(\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}\Big)\Big]^n = r\mathsf{e}^{i\varphi + 2k\pi i} = r\mathsf{e}^{i\varphi} = z\,.$$

Nach Satz 2.3.**A**.2 ist $\big|\{x \in \mathbb{C} \mid x^n = z\}\big| \le n$, und daher genügt es, zu zeigen:

$$\big(\forall\, k,\, k' \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\big) \quad \Big[\, k \ne k' \implies \exp\Big(\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}\Big) \ne \exp\Big(\frac{i(\varphi + 2k'\pi)}{n}\Big) \Big].$$

Sind $k,\, k' \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ mit $k \ne k'$, so folgt

$$\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n} - \frac{i(\varphi + 2k'\pi)}{n} = 2\pi i\, \frac{k - k'}{n} \notin 2\pi i \mathbb{Z}\,,$$

und die Behauptung folgt aus Satz 6.6. □

Satz 6.12 (Argand'sches Lemma)**.** *Sei* $g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *stetig in* 0, $g(0) \ne 0$, $k \in \mathbb{N}$ *und* $b \in \mathbb{C}^\times$. *Dann gibe es ein* $d \in \mathbb{C}$ *mit* $|b + d^k g(d)| < |b|$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit von g in 0 und $|g(0)| > 0$ gilt:

$$(\exists\, \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ \big(\forall z \in B_\delta(0)\big) \quad |g(z) - g(0)| < |g(0)|\,.$$

Seien $t \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{C}$ mit

$$0 < t < \min\Big\{1,\, \Big|\frac{g(0)}{b}\Big|\delta^k\Big\} \quad \text{und} \quad d^k = \frac{-tb}{g(0)}. \quad \text{Dann ist} \quad |d|^k = \frac{t|b|}{|g(0)|} < \delta^k, \quad \text{also} \quad |d| < \delta\,,$$

und daher

$$\begin{aligned}\left|b+d^k g(d)\right| \;&=\; \left|b-\frac{tb}{g(0)}\,g(d)\right| \;=\; \left|(1-t)b+\frac{tb}{g(0)}\big[g(d)-g(0)\big]\right| \\ &\le (1-t)|b|+\frac{t|b|}{|g(0)|}\left|g(d)-g(0)\right| \;<\; (1-t)|b|+t|b|<|b|\,. \quad \square\end{aligned}$$

Satz und Definition 6.13. *Sei* $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ *mit* $n\in\mathbb{N}_0$, $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$ *und* $a_n\neq 0$.

1. (Fundamentalsatzes der Algebra) *Ist* $n\ge 1$, *so hat* f *eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.
2. f *besitzt eine* (*bis auf die Reihenfolge der Faktoren*) *eindeutige Darstellung*
$$f(x)=a_n\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{e_i}$$
mit $r\in\mathbb{N}_0$, $e_1,\ldots,e_r\in\mathbb{N}$ *und verschiedenen* $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in\mathbb{C}$. *Dabei sind* $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ *die verschiedenen Nullstellen von* f *in* $\mathbb{C}$, *und* $(\forall i\in\{1,\ldots,r\})$ $e_i=\operatorname{ord}(f;\alpha_i)$.
3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent*:
   (a) $(\forall i\in\{0,\ldots,n\})$ $a_i\in\mathbb{R}$.
   (b) $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$.
   (c) $a_n\in\mathbb{R}$ $\wedge$ $(\forall\alpha\in\mathbb{C})$ $\operatorname{ord}(f;\alpha)=\operatorname{ord}(f;\overline{\alpha})$.
   Sind diese Bedingungen erfüllt, so heißt f *reell*.
4. *Ist* f *reell, so besitzt* f *eine* (*bis auf die Reihenfolge der Faktoren*) *eindeutige Darstellung*
$$f(x)=a_n\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{e_i}\prod_{j=1}^{s}(x^2+b_jx+c_j)^{d_j}$$
mit $r,\,s\in\mathbb{N}_0$, $e_1,\ldots,e_r,\,d_1,\ldots,d_s\in\mathbb{N}$, *verschiedenen* $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in\mathbb{R}$ *und verschiedenen* $(b_1,c_1),\ldots,(b_s,c_s)\in\mathbb{R}^2$, *so dass* $(\forall j\in\{1,\ldots,s\})$ $b_j^2-4c_j<0$.

Beweis. 1. Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen an, f sei nullstellenfrei in $\mathbb{C}$. Nach Satz 4.9 gibt es ein $M'\in\mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$(\forall x\in\mathbb{C})\quad\Big[\,|x|>M' \implies |f(x)|>\frac{|a_n|}{2}|x|^n\Big]\,.$$

Sei $M\ge M'$ mit $|a_n|M^n>2|f(0)|$. Die Funktion $x\mapsto|f(x)|$ ist stetig, $\overline{B}_M(0)$ ist kompakt, und nach Satz 4.17.2 gibt es ein $c\in\overline{B}_M(0)$ mit $|f(c)|=\min\big(\{|f(x)|\;\big|\;x\in\overline{B}_M(0)\}\big)$. Ist $x\in\mathbb{C}\setminus\overline{B}_M(0)$, so folgt $|f(x)|>|f(0)|\ge|f(c)|$. Daher ist $|f(c)|=\min\big\{|f(x)|\;\big|\;x\in\mathbb{C}\big\}$.
Sei $h\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definiert durch $h(z)=f(c+z)$. Dann ist $h\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$, $\operatorname{grad}(h)=n$ und $h(0)=f(c)\neq0$. Wir schreiben $h(x)$ in der Form $h(x)=f(c)+b_kx^k+b_{k+1}x^{k+1}+\ldots+b_nx^n$ mit $k\in\{1,\ldots,n\}$, $b_k,\,b_{k+1},\ldots,b_n\in\mathbb{C}$ und $b_k\neq0$. Dann ist $h(x)=f(c)+x^kg(x)$ mit einer Polynomfunktion $g\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$ und $g(0)=b_k\neq0$. Nach Satz 6.12 gibt es ein $d\in C$ mit $|f(c)+d^kg(d)|<|f(c)|$. Aber $f(c)+d^kg(d)=h(d)=f(c+d)$, ein Widerspruch.

2. Nach Satz 2.3.2 folgt (durch Zusammenfassen gleicher Faktoren zu Potenzen)

$$(*)\qquad\qquad f(x)=g(x)\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{e_i}$$

mit $r \in \mathbb{N}_0$, $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$, verschiedenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ und einer in $\mathbb{C}$ nullstellenfreien Polynomfunktion g. Nach 1. ist $\operatorname{grad}(g) = 0$ und daher $g(x) = a_n$. Damit ist die Existenz der Darstellung gezeigt.

Hat f die Darstellung $(*)$, so sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ die verschiedenen Nullstellen von f, und für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ ist $f(x) = (x-\alpha_i)^{e_i} f_i(x)$ mit einer Polynomfunktion $f_i \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, so dass $f_i(\alpha_i) = 0$. Nach Satz 6.1.3 folgt daher $e_i = \operatorname{ord}(f; \alpha_i)$. Damit ist auch die Eindeutigkeit der Darstellung von f (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) gezeigt.

3. (a) $\Rightarrow$ (b) Offensichtlich.

(b) $\Rightarrow$ (c) Wir nehmen zunächst an, es gebe ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $e = \operatorname{ord}(f; \alpha) > \operatorname{ord}(f; \overline{\alpha}) = \overline{e}$. Nach 2. ist dann $f(x) = (x-\alpha)^e (x-\overline{\alpha})^{\overline{e}} g(x)$ mit eine Polynomfunktion $g \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, so dass $g(\alpha)g(\overline{\alpha}) \neq 0$. Für $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$f(x) = \overline{f(x)} = (x-\overline{\alpha})^e (x-\alpha)^{\overline{e}}\, \overline{g(x)}$$

und daher

$$0 = (x-\alpha)^{\overline{e}} (x-\overline{\alpha})^{\overline{e}} \big[(x-\alpha)^{e-\overline{e}} g(x) - (x-\overline{\alpha})^{e-\overline{e}}\, \overline{g(x)}\, \big] \,.$$

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \overline{\alpha}\}$ folgt nun

$$(x-\alpha)^{e-\overline{e}} g(x) - (x-\overline{\alpha})^{e-\overline{e}}\, \overline{g(x)} = 0 \,,$$

Nach Satz 2.3.3 gilt diese Gleichung für alle $x \in \mathbb{C}$, also auch für $x = \alpha$, was einen Widerspruch darstellt.

Wegen $\operatorname{ord}(f; \alpha) = \operatorname{ord}(f; \overline{\alpha})$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ folgt nach 2.

$$(**) \qquad f(x) = a_n \prod_{i=1}^{s} (x-\beta_i)^{d_i} \prod_{i=1}^{t} \big((x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha}_i) \big)^{e_i}$$

mit $s, t \in \mathbb{N}_0$, $d_1, \ldots, d_s, e_1, \ldots, e_t \in \mathbb{N}$, verschiedenen $\beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{R}$ und verschiedenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{C}$, so dass $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\} \cap \{\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_t\} = \emptyset$. Daher ist $f(\mathbb{R}) \subset a_n \mathbb{R}$ und daher auch $a_n \in \mathbb{R}$.

(c) $\Rightarrow$ (a) f hat eine Darstellung der Form $(**)$ mit $a_n \in \mathbb{R}$. Durch Ausmultiplizieren folgt die Behauptung.

4. f hat eine nach 2. bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutige Darstellung der Form $(**)$ mit $a_n \in \mathbb{R}$. Wegen $(x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha}_i) = x^2 + b_j x + c_j$ mit $b_j = -2\Re(\alpha_j)$ und $c_j = |\alpha_j|^2)$ folgt wegen $b_j^2 - 4c_j = 4(\Re(\alpha_j)^2 - |\alpha_j|^2) < 0$ die Behauptung. $\square$

6.4. Tangens, Kotangens und Bernoulli'sche Zahlen

Satz und Definition 6.14. *Sei $t \in \mathbb{C}$. Die Funktion*

$$z \mapsto \frac{z\mathsf{e}^{tz}}{\mathsf{e}^z - 1} \quad \textit{ist analytisch in } 0, \textit{ und es sei} \quad \frac{z\mathsf{e}^{tz}}{\mathsf{e}^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} z^n \quad \textit{mit} \quad B_n(t) \in \mathbb{C}$$

ihre Potenzreihenentwicklung in 0.

Die Funktionen $t \mapsto B_n(t)$ heißen *Bernoulli'sche Polynome*, die Zahlen $B_n = B_n(0)$ heißen *Bernoulli'sche Zahlen*. Es ist also

$$\frac{z}{\mathsf{e}^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad \text{die Potenzreihenentwicklung von} \quad \frac{z}{\mathsf{e}^z - 1} \quad \text{in } 0 \,.$$

1. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist*
$$B_n(t) = t^n - \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n+1}{m}B_m(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_1 t + b_0$$
mit $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{Q}$. Insbesondere ist $B_0(t) = 1$, $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$, $B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$.
2. *Es ist $B_0 = 1$, und für $n \in \mathbb{N}$ ist*
$$B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n+1}{m}B_m \in \mathbb{Q}\,.$$
Insbesondere ist $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$ und $(\forall n \in \mathbb{N})\quad B_{2n+1} = 0$.
3. *Für alle $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist*
$$\sum_{k=1}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1}B_{n-j}\, m^{j+1}\,.$$

Beweis. Wegen $\operatorname{ord}(z\mathsf{e}^{tz}; 0) = 1 = \operatorname{ord}(\mathsf{e}^z - 1; 0)$ ist die Funktion
$$z \;\mapsto\; \frac{z\mathsf{e}^{tz}}{\mathsf{e}^z - 1}$$
analytisch in 0 nach Satz 6.1.

1. Für die Potenzreihenentwicklungen in 0 gilt
$$z\mathsf{e}^{tz} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n z^{n+1}}{n!} \;=\; \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t)}{n!}z^n\Big) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{n}\frac{B_m(t)}{m!(n-m+1)!}\Big)z^{n+1}\,,$$
und aus dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$
$$\frac{t^n}{n!} \;=\; \sum_{m=0}^{n}\frac{B_m(t)}{m!(n-m+1)!} \;=\; \frac{B_n(t)}{n!} + \sum_{m=0}^{n-1}\frac{B_m(t)}{m!(n-m+1)!}\,,$$
also
$$B_n(t) \;=\; t^n - \sum_{m=0}^{n-1}\frac{n!}{m!(n-m+1)!}B_m(t) \;=\; t^n - \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n+1}{m}B_m(t)\,.$$
Aus diesen Rekursionsformeln kann man $B_n(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ berechnen. Insbesondere folgt durch Induktion nach n, dass $B_n(t)$ eine normierte Polynomfunktion vom Grade n mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ ist.

2. Nach 1. genügt es, $B_n = 0$ für alle ungeraden $n > 1$ zu zeigen. Wegen
$$0 \;=\; \frac{x}{\mathsf{e}^x - 1} - \frac{-x}{\mathsf{e}^{-x} - 1} + x \;=\; \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\big[1 - (-1)^n\big]x^n$$
folgt $(\forall n \geq 2)\;\; B_n\big[1 + (-1)^n\big] = 0$ und daraus die Behauptung.

3. Für $m \in \mathbb{N}$ hat man in 0 die Potenzreihenentwicklungen
$$\begin{aligned}\frac{x}{\mathsf{e}^x - 1}\,\frac{\mathsf{e}^{mx} - 1}{x} \;&=\; \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^{n+1}}{(n+1)!}x^n\Big) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n}\frac{B_{n-j}}{(n-j)!}\frac{m^{j+1}}{(j+1)!}\Big)x^n \\ &=\; \sum_{k=0}^{m-1}\mathsf{e}^{kx} \;=\; \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n x^n}{n!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(\sum_{k=0}^{m-1}k^n\Big)x^n\,,\end{aligned}$$

also gilt aufgrund des Identitätssatzes für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{m-1} k^n \;=\; \sum_{j=0}^{n} \frac{B_{n-j}m^{j+1}}{(n-j)!(j+1)!} \;=\; \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1}B_{n-j}m^{j+1}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^n \;=\; \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1}B_{n-j}m^{j+1}\,. \qquad \square$$

Satz und Definition 6.15. *Die Tangensfunktion* $\tan\colon \mathbb{C}\setminus\bigl(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\bigr)\to\mathbb{C}$ *und die Kotangensfunktion* $\cot\colon \mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, *definiert durch*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \textit{und} \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,,$$

sind analytische Funktionen, und die Funktion $x \mapsto x\cot(x)$ *ist analytisch in* 0*. Die Potenzreihenentwicklungen in* 0 *sind gegeben durch*

$$\tan(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-4)^n(1-4^n)\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1} \qquad \textit{und} \qquad x\cot(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}\,.$$

Insbesondere folgt

$$x\cot(x)\Big|_{x=0} = 1 \quad \textit{und} \quad \cot(x) - \frac{1}{x}\Big|_{x=0} = \pi\cot(\pi x) - \frac{1}{x}\Big|_{x=0} = 0\,.$$

Beweis. Nach Satz 6.1 genügt es, die Potenzreihenentwicklungen in 0 zu berechnen. Es ist

$$\begin{aligned}
x\cot(x) \;&=\; \frac{\frac{x}{2}(\mathsf{e}^{ix}+\mathsf{e}^{-ix})}{\frac{1}{2i}(\mathsf{e}^{ix}-\mathsf{e}^{-ix})} \;=\; ix\,\frac{\mathsf{e}^{-ix}(\mathsf{e}^{2ix}+1)}{\mathsf{e}^{-ix}(\mathsf{e}^{2ix}-1)} \;=\; ix\,\frac{\mathsf{e}^{2ix}+1}{\mathsf{e}^{2ix}-1}\\
&=\; ix + \frac{2ix}{\mathsf{e}^{2ix}-1} \;=\; ix + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m}{m!}(2ix)^m \;=\; ix + 1 - \frac{1}{2}(2ix) + \sum_{m=2}^{\infty}\frac{B_m}{m!}(2ix)^m\\
&=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(-1)^n 2^{2n}x^{2n} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}\,,
\end{aligned}$$

und $x\cot(x) - 2x\cot(2x) = x\tan(x)$. Daher folgt

$$x\tan(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}\bigl[x^{2n}-(2x)^{2n}\bigr]\,, \quad \text{also} \quad \tan(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}(-4)^n(1-4^n)\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}\,. \;\square$$

Satz 6.16 (Partialbruchzerlegung des Kotangens)**.**

1. *Für* $x \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ *ist*

$$\pi\cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-k^2}\,,$$

und die Funktionenreihe ist in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ *lokal gleichmäßig und absolut konvergent. Für jedes* $R \in \mathbb{R}_{>0}$ *ist die Funktionenreihe in* $\overline{B}_R(0)\setminus\mathbb{Z}$ *sogar gleichmäßig konvergent.*

2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \qquad \textit{und} \qquad (-1)^{n+1} B_{2n} > 0\,,$$

also insbesondere

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \textit{und} \quad \zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

3. *Die Potenzreihenentwicklungen in 0 der Funktionen*

$$x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}\,,\ x \mapsto x\cot(x)\,,\ x \mapsto \tan(x) \quad \textit{haben die Konvergenzradien} \quad 2\pi\,,\ \pi\,,\ \frac{\pi}{2}\,.$$

Beweis. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k\geq 1} \frac{2x}{x^2 - k^2} \quad \text{als Funktionenreihe} \quad \sum_{k \geq 1} \Big(x \mapsto \frac{2x}{x^2 - k^2} \Big)\,.$$

Für $R, k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2R$ und $x \in \overline{B}_R(0) \subset \mathbb{C}$ ist

$$|x^2 - k^2| \geq k^2 - |x|^2 \geq k^2 - R^2 \geq \frac{3k^2}{4}\,, \quad \text{also} \quad \Big| \frac{2x}{x^2 - k^2} \Big| \leq \frac{8R}{3k^2}$$

und daher

$$\sum_{k=2R}^{\infty} \Big\| \frac{2x}{x^2 - k^2} \Big\|_{\overline{B}_R(0)} \ \leq \ \frac{8R}{3} \sum_{k=2R}^{\infty} \frac{1}{k^2} \ < \ \infty\,.$$

Folglich ist die Funktionenreihe

$$\sum_{k \geq 2R} \frac{2x}{x^2 - k^2}$$

normal konvergent in $\overline{B}_R(0)$, also dort absolut und gleichmäßig konvergent nach Satz 5.9.2. Daher ist die Funktionenreihe

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2x}{x^2 - k^2}$$

absolut und lokal gleichmäßig konvergent in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, und nach Satz 5.9 ist die Funktion

$$F \colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}\,, \quad \text{definiert durch} \quad F(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}\,,$$

stetig. Sei $C \colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert durch $C(x) = \pi \cot(\pi x)$, und sei $\mathcal{H}$ die Menge aller stetigen Funktionen $h \colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\text{(H1)} \quad \lim_{x \to 0} \Big[h(x) - \frac{1}{x} \Big] = 0\,; \quad \text{(H2)} \quad (\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \quad h(x+1) = h(x)\,;$$

$$\text{(H3)} \quad (\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \quad h(x) = \frac{1}{2} \Big[h\Big(\frac{x}{2}\Big) + h\Big(\frac{x+1}{2}\Big) \Big]\,.$$

Wir werden zeigen: **a)** $F \in \mathcal{H}$; **b)** $C \in \mathcal{H}$; **c)** $|\mathcal{H}| \leq 1$. Damit folgt dann 1.

a) F ist stetig und erfüllt offensichtlich (H1). Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$F_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2 - k^2} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{x-k} + \frac{1}{x+k} \Big) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}\,.$$

Dann folgt für $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$F_n(x+1) - F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k+1} - \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x-n}\,,$$

also

$$F(x+1) - F(x) = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x-n}\Big) = 0\,,$$

und

$$\begin{aligned} F_{2n}(x) - \frac{1}{2}\Big[F_n\Big(\frac{x}{2}\Big) + F_n\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big] \;&=\; \sum_{k=-2n}^{2n} \frac{1}{x+k} - \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{\frac{x}{2}+k} - \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{\frac{x+1}{2}+k} \\ &=\; \sum_{k=-2n}^{2n} \frac{1}{x+k} - \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+2k} - \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+2k+1} \;=\; -\frac{1}{x+2n+1}\,, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} F(x) - \frac{1}{2}\Big[F\Big(\frac{x}{2}\Big) + F\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big] \;&=\; \lim_{n\to\infty}\bigg(F_{2n}(x) - \frac{1}{2}\Big[F_n\Big(\frac{x}{2}\Big) + F_n\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big]\bigg) \\ &=\; \lim_{n\to\infty}\Big[-\frac{1}{x+2n+1}\Big] \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

b) Nach Satz 6.15 ist C stetig, und erfüllt (H1), da

$$C(x) \;=\; \frac{\pi x\cot(\pi x)}{x} \;=\; \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}(\pi x)^{2n} \;=\; \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(-4)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}x^{2n-1}\,.$$

Nach Satz 6.6 gilt für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$C(x+1) \;=\; \frac{\pi\cos(\pi x+\pi)}{\sin(\pi x+\pi)} \;=\; \frac{-\pi\cos\pi x}{-\sin\pi x} \;=\; C(x)\,,$$

also (H2), und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Big[C\Big(\frac{x}{2}\Big) + C\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big] \;&=\; \frac{\pi\cos\frac{\pi x}{2}}{2\sin\frac{\pi x}{2}} + \frac{\pi\cos\big(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\big)}{2\sin\big(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\big)} \;=\; \frac{\pi\cos\frac{\pi x}{2}}{2\sin\frac{\pi x}{2}} + \frac{-\pi\sin\frac{\pi x}{2}}{2\cos\frac{\pi x}{2}} \\ &=\; \frac{\pi\cos^2\frac{\pi x}{2} - \pi\sin^2\frac{\pi x}{2}}{2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}} \;=\; \frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} \;=\; C(x)\,, \end{aligned}$$

also auch (H3).

c) Seien $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$, und sei $\Phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\Phi(x) = \begin{cases} h_1(x) - h_2(x)\,, & \text{falls } x \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\,, \\ 0\,, & \text{falls } x \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Dann hat Φ die Eigenschaften (H2) und (H3), und $(\forall x \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})\ (\forall n \in \mathbb{Z})\quad \Phi(x+n) = \Phi(x)$ (das folgt für $n = 1$ aus (H2), dann für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion, und für $n = -m$ mit $m \in \mathbb{N}$ ist $\Phi(x) = \Phi\big((x+n)+m\big) = \Phi(x+n)$). Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$\lim_{x\to n}\Phi(x) = \lim_{x\to n}\Phi(x-n) = \lim_{y\to 0}\Phi(y) = \lim_{y\to 0}\Big[h_1(y) - \frac{1}{y}\Big] - \lim_{y\to 0}\Big[h_2(y) - \frac{1}{y}\Big] = 0\,.$$

Daher ist Φ stetig, und wir nehmen an, es sei $\Phi \neq 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\Phi \,|\, \overline{B}_N(0) \neq 0$, und nach Satz 4.17 gibt es ein $y \in \overline{B}_N(0)$ mit

$$|\Phi(y)| = \max\bigl(\bigl\{|\Phi(x)| \;\big|\; x \in \overline{B}_N(0)\bigr\}\bigr) > 0\,.$$

Daher ist $y \notin \mathbb{Z}$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\Bigl|\frac{2^{-n}y}{2}\Bigr| \leq N\,, \quad \Bigl|\frac{2^{-n}y+1}{2}\Bigr| \leq N\,, \quad \text{und wir zeigen (mittels Induktion} \quad |\Phi(2^{-n}y)| = |\Phi(y)|\,.$$

Wegen $(2^{-n}y)_{n\geq 0} \to 0$ und der Stetigkeit von Φ folgt daraus

$$|\Phi(y)| \;=\; \lim_{n\to\infty} |\Phi(2^{-n}y)| \;=\; |\Phi(0)| \;=\; 0\,,$$

ein Widerspruch.

Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $n \geq 0$ und $|\Phi(2^{-n}y)| = |\Phi(y)|$. Dann folgt mittels (H2)

$$\begin{aligned}|\Phi(2^{-n}y)| \;&=\; \Bigl|\frac{1}{2}\Bigl[\Phi\Bigl(\frac{2^{-n}y}{2}\Bigr) + \Phi\Bigl(\frac{2^{-n}y+1}{2}\Bigr)\Bigr]\Bigr| \;\leq\; \frac{1}{2}\Bigl[\Bigl|\Phi\Bigl(\frac{2^{-n}y}{2}\Bigr)\Bigr| + \Bigl|\Phi\Bigl(\frac{2^{-n}y+1}{2}\Bigr)\Bigr|\Bigr]\\ &\leq\; \frac{1}{2}\bigl[\,|\Phi(y)| + |\Phi(y)|\,\bigr] \;=\; |\Phi(2^{-n}y)| \quad \text{und daher} \quad |\Phi(2^{-(n+1)}y)| = |\Phi(2^{-n}y)|\,.\end{aligned}$$

2. Nach Satz 6.15 gibt es ein $\varepsilon \in (0,1)$, so dass für alle $x \in \overline{B}_\varepsilon(0) \subset \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}\pi x \cot(\pi x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2\pi)^{2n} x^{2n} \;&=\; 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - k^2}\\ =\; 1 - 2x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\bigl(1 - \frac{x^2}{k^2}\bigr)} \;&=\; 1 - 2x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\frac{x^2}{k^2}\Bigr)^n.\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\frac{|x|^2}{k^2}\Bigr)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n+2}}\Bigr)|x|^{2n} \;\leq\; \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\Bigr)|x|^{2n} \;<\; \infty$$

folgt nach Satz 5.7

$$\pi x \cot(\pi x) \;=\; 1 - 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n+2}}\Bigr) x^{2n} \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl[-2\zeta(2n)\bigr] x^{2n}\,.$$

Wegen des Identitätssatzes folgt daraus

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad -2\zeta(2n) \;=\; (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2\pi)^{2n}\,, \quad \text{also} \quad \zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!} > 0\,,$$

und daher $(-1)^{n+1} B_{2n} > 0$.

3. Nach 2. gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$1 \;\leq\; \sqrt[2n]{2\zeta(2n)} \;=\; 2\pi \sqrt[2n]{\frac{|B_{2n}|}{(2n)!}} \;\leq\; \sqrt[2n]{2\zeta(2)} \quad \text{und daher} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{|B_{2n}|}{(2n)!}} = \frac{1}{2\pi}\,.$$

Damit folgen die Behauptungen aus Satz 5.10. $\square$

X

7. Differenzialrechnung von Funktionen einer Veränderlichen

7.1. Differenzierbarkeit: Definition und einfache Rechenregeln

Definition 7.1. Sei $\emptyset \ne D \subset \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$.

1. Sei $a \in D \cap D'$. Dann heißt
$$\Delta_a f\colon D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}\,, \quad \text{definiert durch} \quad \Delta_a f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,,$$
der *Differenzenquotient* von f in a. Die Funktion f heißt *differenzierbar* in a, wenn
$$\lim_{x\to a} (\Delta_a f)(x) \quad \text{in } \mathbb{C} \text{ existiert, und dann nennt man} \quad f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x\to a} (\Delta_a f)(x)$$
die *Ableitung* oder den *Differenzialquotienten* von f in a.
2. Ist $D \subset D'$, so heißt f *differenzierbar* (in D), wenn f in jedem Punkt von D differenzierbar ist. In diesem Falle nennt man die Funktion
$$f'\colon D \to \mathbb{C}\,, \quad x \mapsto f'(x)\,,$$
die *Ableitung* von f.

Bemerkungen:

1. Sei $D_0 \subset D \subset \mathbb{C}$ und $a \in D_0 \cap D_0'$ (also auch $a \in D \cap D'$), und sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ differenzierbar in a. Dann ist auch $f \,|\, D_0$ differenzierbar in a, und $(f \,|\, D_0)'(a) = f'(a)$.
2. Sei $D \subset \mathbb{C}$, $a \in D \cap D'$, $U \in \mathcal{U}(a)$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$. Dann gilt:
$$f \quad \text{differenzierbar in } a \quad \Longleftrightarrow \quad f \,|\, D \cap U \quad \text{differenzierbar in } a$$
(„Differenzierbarkeit ist eine lokale Eigenschaft").
3. Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon D \to \mathbb{C}$, $a \in D^\circ$, $f_- = f \,|\, (-\infty, a] \cap D$ und $f_+ = f \,|\, [a, \infty) \cap D$. Dann gilt:
$$f \text{ differenzierbar in } a \iff f_- \text{ und } f_+ \text{ sind beide differenzierbar in } a, \text{ und } f_-'(a) = f_+'(a)\,.$$
4. Sei $D \subset \mathbb{C}$, $a \in D \cap D'$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$. Sei $D - a = \{x - a \mid x \in D\}$ und
$$\Delta_a^* f\colon (D-a) \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \quad \text{definiert durch} \quad \Delta_a^* f(h) = \Delta_a f(a+h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,.$$
Dann gilt:
$$f \text{ differenzierbar in } a \iff \lim_{h\to 0} (\Delta_a^* f)(h) \quad \text{existiert in } \mathbb{C}\,, \text{ und dann ist } f'(a) = \lim_{h\to 0} \Delta_a^* f(h)\,.$$

Schreibweise (wir werden die Bezeichnungen $\Delta_a f$ und $\Delta_a^* f$ im Folgenden nicht mehr verwenden):
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,.$$

Geometrische Deutung der Ableitung:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$. f heißt *linear approximierbar* in a, wenn
$$(*) \qquad (\exists\, k \in \mathbb{R}) \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x) - [f(a) + k(x-a)]}{x-a} = 0\,.$$

Für $k \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - [f(a) + k(x-a)]}{x-a} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = k$$

Daher ist f genau dann linear approximierbar in a, wenn f in a differenzierbar ist, und dann ist $f'(a)$ das einzige $k \in \mathbb{R}$ mit $(*)$. Ist f differenzierbar in a, so nennt man die Gerade

$$\mathcal{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(a) + (x-a)f'(a)\}$$

eine *Tangente* an Graph(f).

Satz 7.1. *Sei $D \subset \mathbb{C}$, $a \in D \cap D'$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ differenzierbar in a. Dann genügt f einer Lipschitzbedingung bei a (und ist insbesondere stetig in a).*

Beweis. Aus

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{C}$$

folgt:

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x \in D \cap B_\delta(a) \setminus \{a\})\ \left|\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < 1\,.$$

Daher gilt für alle $x \in D \cap B_\delta(a) \setminus \{a\}$

$$|f(x) - f(a)| \ \le\ \left|\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a)\right| |x-a| + |f'(a)|\ |x-a| \ \le\ \big[1 + |f'(a)|\big]\ |x-a|\,,$$

und diese Ungleichung gilt auch für $x = a$. □

Beispiele:

1. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_k(x) = \operatorname{sgn}(x)\, x^k$. Dann gilt:
f_1 ist stetig in 0, aber nicht differenzierbar in 0.
$(\forall k \ge 2)$ f_k ist differenzierbar in 0, und $f_k'(0) = 0$.
Für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^\times$ ist nämlich

$$(\Delta_0 f_k)(x) = \frac{f_k(x) - f_k(0)}{x - 0} = \operatorname{sgn}(x) x^{k-1}\,.$$

2. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $f_k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \exp(-1/x^2)\,, & \text{falls } \ x \ne 0\,,\\ 0\,, & \text{falls } \ x = 0\,. \end{cases}$$

Dann ist f_k unstetig in 0, aber $f_k \,|\, \mathbb{R}$ ist differenzierbar in 0, und $(f_k \,|\, \mathbb{R})'(0) = 0$.
f_k ist unstetig in 0, da

$$\left(\frac{i}{n}\right)_{n\ge 1} \to 0 \quad \text{und} \quad \left|f_k\left(\frac{i}{n}\right)\right| = \frac{1}{n^k}\mathrm{e}^{n^2} \to \infty \quad \text{nach Satz 4.14}\,.$$

Ist $(x_n)_{n\ge 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^\times$ mit $(x_n)_{n\ge 0} \to 0$ und $y_n = x_n^{-2}$, so ist $(y_n)_{n\ge 0} \to \infty$, und

$$|(\Delta_0 f_k)(x_n)| = \left|\frac{f_k(x_n) - f_k(0)}{x_n - 0}\right| = \left|x_n^{k-1} \exp\Big(-\frac{1}{x_n^2}\Big)\right| = \left(\frac{\mathrm{e}^{y_n}}{y_n^{(1-k)/2}}\right)^{-1} \to\ 0 \quad (k \to \infty)$$

(wieder nach Satz 4.14), und daher $(f_k \,|\, \mathbb{R})'(0) = 0$.

Satz 7.2. *Sei* $(a_n)_{n\ge 0}$ *eine Folge in* $\mathbb{C}$*. Dann haben die Potenzreihen*

$$\sum_{n\ge 0} a_n z^n \quad \textit{und} \quad \sum_{n\ge 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\ge 0} (n+1) a_{n+1} z^n$$

denselben Konvergenradius ρ*. Ist* $\rho > 0$ *und* $z_0 \in \mathbb{C}$*, so ist die Funktion* $f\colon B_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$*, definiert durch*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\,, \quad \textit{differenzierbar, und} \quad (\forall\, z \in B_\rho(z_0))\;\; f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}\,.$$

Beweis. Sei ρ' der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\ge 1} n a_n z^{n-1}$. Für $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{n\ge 1} n a_n z^{n-1} \;\; \text{konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n\ge 1} n a_n z^n \;\; \text{konvergent}\,,$$

und daher folgt mit Satz 5.10

$$\rho' = \bigl(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}\bigr)^{-1} \le \bigl(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\bigr)^{-1} = \rho\,.$$

Sei nun $\rho > 0$ und $z \in B_\rho(z_0)$. Nach Satz 6.1.5 gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_\varepsilon(z) \subset B_\rho(z_0)$ und für alle $x \in B_\varepsilon(z)$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; \sum_{m=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n (z-z_0)^{n-m}\Bigr)(x-z)^m \\ &=\; f(z) + (x-z) \sum_{m=1}^{\infty} \Bigl(\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n (z-z_0)^{n-m}\Bigr)(x-z)^{m-1}\,; \end{aligned}$$

wobei alle auftretenden Reihen absolut konvergieren. Daraus folgt mit Satz 5.11

$$\lim_{x\to z} \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}\,, \quad \text{also} \quad f'(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}\,.$$

Da diese Potenzreihe für alle $z \in B_\rho(z_0)$ konvergiert, folgt $\rho' \ge \rho$, also $\rho' = \rho$. □

Satz 7.3.

1. *Sei* $\emptyset \ne D \subset \mathbb{C}$*,* $D \subset D'$*, und sei* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *analytisch. Dann ist* f *differenzierbar in* D*, und* $f'\colon D \to \mathbb{C}$ *ist ebenfalls analytisch.*
2. *Die Funktionen* $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\sinh$ *und* $\cosh$ *sind differenzierbar in* $\mathbb{C}$*, und es ist* $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\sinh' = \cosh$ *und* $\cosh' = \sinh$.
3. *Ist* $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$*, so ist* f *differenzierbar,* $f' \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$*, und*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu x^{\nu-1}\,.$$

Ist $\operatorname{grad}(f) = n \in \mathbb{N}$*, so ist* $\operatorname{grad}(f') = n-1$*. Ist* f *konstant, so ist* $f' = 0$.

Beweis. Ist $z_0 \in D$, so gibt es eine Potenzreihe $P[z] = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$, so dass

$$(\forall x \in D \cap B_\rho(z_0))\;\; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-z_0)^n\,.$$

Nach Satz 7.2 ist f differenzierbar in $D \cap B_\rho(z_0)$, und

$$(\forall x \in D \cap B_\rho(z_0)) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - z_0)^{n-1} .$$

Daher ist auch f' analytisch in z_0. Die Differenziationsformeln folgen aus Satz 7.2. Wir rechnen exemplarisch die Formel für die Ableitung des Kosinus vor. Aus

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{folgt} \quad \cos' x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2n x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -\sin x . \quad \square$$

Bemerkung: Die Funktion $f = \operatorname{sgn} | \mathbb{R}^\times : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, $f' = 0$, aber f ist nicht konstant.

Satz 7.4 (Differenziationsregeln)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$, $a \in D \cap D'$, seien $f, g \colon D \to \mathbb{C}$ differenzierbar in a und $\lambda \in \mathbb{C}$.*

1. *Die Funktionen λf, $f + g$ und fg sind differenzierbar in a, und es gilt*
$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a) , \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad \text{und} \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) .$$
2. *Sei $f(a) \neq 0$ und $D_0 = \{x \in D \mid f(x) \neq 0\}$. Dann ist $a \in D_0 \cap D_0'$, $\frac{g}{f} \colon D_0 \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar in a, und*
$$\Big(\frac{g}{f}\Big)'(a) = \frac{g'(a)f(a) - g(a)f'(a)}{f(a)^2} , \quad \Big(\frac{1}{f}\Big)'(a) = \frac{-f'(a)}{f(a)^2} .$$

Insbesondere gilt:

(a) *Für $m \in \mathbb{Z}$ ist die Funktion $P_m \colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, definiert durch $P_m(x) = x^m$, differenzierbar, und $P_m' = m P_{m-1}$.*
(b) *Jede rationale Funktion ist differenzierbar.*
(c) tan *und* cot *sind differenzierbar,*
$$\Big(\forall x \in \mathbb{C} \setminus \big(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\big)\Big) \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan(x)^2$$
und
$$\big(\forall x \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}\big) \quad \cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot(x)^2 .$$

Beweis. 1. Es ist

$$\lim_{x \to a} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x - a} = \lambda \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda f'(a) ,$$

$$\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a)$$

und (wegen der Stetigkeit von g in a)

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \Big[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} f(a) \Big] = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) .$$

Daher sind λf, $f+g$ und fg differenzierbar in a,

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)\,, \quad (f+g)'(a) = f'(a)+g'(a) \quad \text{und} \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\,.$$

2. Für jede Folge $(x_n)_{n\ge 0}$ in $D\setminus\{a\}$ mit $(x_n)_{n\ge 0}\to a$ ist $(f(x_n))_{n\ge 0}\to f(a)\ne 0$, also $(\exists n_0\ge 0)$ $(\forall n\ge n_0)$ $f(x_n)\ne 0$. Daher ist $(\forall n\ge n_0)$ $x_n\in D_0$, $a\in D_0\cap D_0'$, und es folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\frac{g}{f}(x)-\frac{g}{f}(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{g(x)f(a)-g(a)f(x)}{(x-a)f(x)f(a)}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)f(a)}\Big[\frac{g(x)-g(a)}{x-a}f(a)-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)\Big]\\ &= \frac{1}{f(a)^2}\Big[g'(a)f(a)-f'(a)g(a)\Big]\,.\end{aligned}$$

Also ist $\frac{g}{f}$ differenzierbar in a, und

$$\Big(\frac{g}{f}\Big)'(a) = \frac{g'(a)f(a)-g(a)f'(a)}{f(a)^2}\,.$$

(a) Für $m\in\mathbb{N}_0$ ist $P_m' = mP_{m-1}$ nach Satz 7.3, und daher folgt für $x\in\mathbb{C}^\times$

$$P_{-m}'(x) = \Big(\frac{1}{P_m}\Big)'(x) = \frac{-P_m'(x)}{P_m(x)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mP_{-m-1}(x)\,.$$

(b) Jede rationale Funktion ist Quotient zweier Polynomfunktionen.

(c) Für $x\in\mathbb{C}\setminus\Big(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Big)$ ist

$$\tan'(x) = \Big(\frac{\sin}{\cos}\Big)'(x) = \frac{\sin'(x)\cos x-\cos'(x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2(x)\,.$$

Die Formel für $\cot'(x)$ beweist man analog. □

Satz 7.5 (Kettenregel)**.** *Seien $D, E\subset\mathbb{C}$, $a\in D\cap D'$, $f\colon D\to\mathbb{C}$ differenzierbar in a, $f(D)\subset E$, $f(a)\in E'$ und $g\colon E\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $f(a)$. Dann ist $g\circ f\colon D\to\mathbb{C}$ differenzierbar in a, und*

$$(g\circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a)\,.$$

Beweis. Definiere $\psi\colon E\to\mathbb{C}$ durch

$$\psi(y) = \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}\,, \quad \text{falls } y\ne f(a)\,, \quad \text{und} \quad \psi(f(a)) = g'(f(a))\,.$$

Dann ist ψ stetig in $f(a)$, und $(\forall x\in D)$ $(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a) = [f(x)-f(a)]\psi(f(x))$. Mit Satz 4.6 folgt

$$\lim_{x\to a}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{x-a} = \Big[\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Big]\Big[\lim_{x\to a}\psi(f(x))\Big] = f'(a)g'(f(a))\,.$$ □

Beispiel: Sei $D\subset\mathbb{C}$, $a\in D\cap D'$, $m\in\mathbb{N}$ und $f\colon D\to\mathbb{C}$ differenzierbar in a. Dann ist auch die Funktion $f^m\colon D\to\mathbb{C}$, definiert durch $f^m(x) = f(x)^m$, differenzierbar in a, und $(f^m)'(a) = mf(a)^{m-1}f'(a)$.

Satz 7.6 (Differenziation der Umkehrfunktion)**.** *Sei* $D \subset \mathbb{C}$, $a \in D \cap D'$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ *sei injektiv, differenzierbar in* a, $f'(a) \neq 0$, *und* $f^{-1}\colon f(D) \to \mathbb{C}$ *sei stetig in* $f(a)$. *Dann ist* $f(a) \in f(D)'$, f^{-1} *ist differenzierbar in* $f(a)$, *und*

$$(f^{-1})'\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Beweis. Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $(x_n)_{n\geq 0} \to a$. Dann ist $(f(x_n))_{n\geq 0}$ eine Folge in $f(D) \setminus \{f(a)\}$ (da f injektiv ist), und $(f(x_n))_{n\geq 0} \to f(a)$ (da f in a stetig ist). Daher ist $f(a) \in f(D) \cap f(D)'$.

Sei nun $(y_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $f(D) \setminus \{f(a)\}$ mit $(y_n)_{n\geq 0} \to f(a)$. Dann ist $(f^{-1}(y_n))_{n\geq 0} \to a$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - f(a)}{f^{-1}(y_n) - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(f^{-1}(y_n)) - f(a)}{f^{-1}(y_n) - a} = f'(a) \neq 0$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(a))}{y_n - f(a)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}\,.$$ □

Satz 7.7.

1. $\mathrm{Log}\,|\,\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ *ist differenzierbar, und*

   $(\forall\, x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0})\ \ \mathrm{Log}'(x) = \dfrac{1}{x}$. *Insbesondere folgt* $(\forall x \in \mathbb{R}_{>0})\ \ \log'(x) = \dfrac{1}{x}$.

2. *Sei* $\alpha \in \mathbb{C}$ *und* $P_\alpha\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ *definiert durch* $P_\alpha(z) = z^\alpha$. *Dann ist* P_α *differenzierbar, und*

   $$P'_\alpha = \alpha P_{\alpha-1}\,, \quad \textit{also} \quad (\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0})\ \ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\,.$$

Beweis. 1. Sei $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \in (-\pi, \pi)\}$. Dann ist $\exp\,|\,D\colon D \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ bijektiv, $(\forall x \in D)\ \ \exp'(x) = \exp(x) \neq 0$, und $(\exp\,|\,D)^{-1} = \mathrm{Log}\,|\,\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$ ist stetig (siehe Satz 6.10 und Satz 7.3). Also ist $\mathrm{Log}\,|\,\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ differenzierbar nach Satz 7.6, und für $x = \exp(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ (mit $z \in D$) folgt

$$\mathrm{Log}'(x) = \mathrm{Log}'\big(\exp(z)\big) = \frac{1}{\exp'(z)} = \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{x}\,.$$

2. Wegen $P_\alpha(z) = z^\alpha = \exp\big(z\mathrm{Log}(\alpha)\big)$ folgt die Behauptung aus Satz 7.5. □

7.2. Schrankensatz und Stammfunktionen

Definition 7.2. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D \cap D'$, X ein normierter Raum und $f\colon D \to X$. f heißt *differenzierbar* in a, wenn

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}\big[f(x) - f(a)\big] \quad \text{in } X \text{ existiert.}$$

Dann heißt $f'(a)$ die *Ableitung* von f in a.

Ist $D \subset D'$, so heißt f *differenzierbar* (in D), wenn f in jedem Punkt von D differenzierbar ist, und dann nennt man die Funktion $f'\colon D \to X$ die *Ableitung* von f.

Im Falle $X = \mathbb{C}$ ist diese Definition mit Definition 7.1 konsistent.

Bemerkungen: Sei $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D \cap D'$ und X ein normierter Raum.

1. Ist $f\colon D \to X$ differenzierbar in a, so ist f stetig in a.
2. Ist $D \subset D'$ und $f\colon D \to X$ konstant, so ist f differenzierbar, und $f' = 0$.
3. Seien $f, g\colon D \to X$ und $h\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $\lambda f\colon D \to X$, $f+g\colon D \to X$ und $hf\colon D \to X$ differenzierbar in a,
$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)\,, \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad \text{und} \quad (hf)'(a) = h'(a)f(a) + h(a)f'(a)\,.$$
4. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a, $f(D) \subset E \subset \mathbb{R}$, $f(a) \in E'$ und sei $g\colon E \to X$ differenzierbar in $f(a)$. Dann ist $g\circ f\colon D \to X$ differenzierbar in a, und
$$(g\circ f)'(a) = f'(a)\, g'(f(a))\,.$$
5. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon D \to \mathbb{K}^n$. Genau dann ist f differenzierbar in a, wenn die Funktionen $f_1, \ldots, f_n\colon D \to \mathbb{K}$ alle in a differenzierbar sind, und dann ist
$$f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_n'(a)) \in \mathbb{K}^n\,.$$
6. Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$. Genau dann ist f differenzierbar in a, wenn die Funktionen $\Re f\colon D \to \mathbb{R}$ und $\Im f\colon D \to \mathbb{R}$ beide in a differenzierbar sind, und dann ist
$$f'(a) = (\Re f)'(a) + i(\Im f)'(a)\,.$$
Vorsicht! Die Voraussetzung $D \subset \mathbb{R}$ ist wesentlich. Die Funktionen $\Re\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und $\Im\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sind in keinem Punkte $a \in \mathbb{C}$ differenzierbar, denn für jede Folge $(x_n)_{n\ge0}$ in $\mathbb{R}^\times$ mit $(x_n)_{n\ge0} \to 0$ gilt:
$$\Big(\frac{\Re(a+ix_n) - \Re(a)}{ix_n}\Big)_{n\ge0} \to 0 \quad \text{und} \quad \Big(\frac{\Re(a+x_n) - \Re(a)}{x_n}\Big)_{n\ge0} \to 1\,,$$
und analog für $\Im$. Aber die Funktion $\mathrm{id}_\mathbb{C} = \Re + i\Im\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist natürlich differenzierbar.
Man beachte den Unterschied zwischen ,,reeller Differenzierbarkeit” und ,,komplexer Differenzierbarkeit”!

Geometrische Deutung der Differenzierbarkeit.

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in D$ und $f\colon D \to X$ stetig (also eine parametrisierte Kurve in X mit Parameterintervall D und Spur $f(D) \subset X$). Sei $u \in X \setminus \{0\}$ und $\varphi\colon D \to X$ definiert durch $\varphi(t) = f(a) + (t-a)u$ ($\varphi(D)$ ist eine Gerade durch $f(a)$ mit Richtungsvektor u). φ heißt *Tangente* an f im Punkte $f(a)$, wenn
$$\lim_{t\to a} \frac{1}{t-a}\big[f(t) - \varphi(t)\big] = 0\,.$$
Genau dann ist φ eine Tangente an f in $f(a)$, wenn f in a differenzierbar und $u = f'(a)$ ist. Man nennt $f'(a)$ den *Tangentialvektor* von f in a.

Graph einer Funktion.

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig und $G\colon D \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $G(x) = \big(x, g(x)\big)$ (G ist eine parametrisierte Kurve mit Spur $G(D) = \mathrm{Graph}(g)$). Ist $a \in D$, so ist G genau dann in a differenzierbar, wenn g in a differenzierbar ist. In diesem Falle ist $g'(a)$ die Steigung und $G'(a) = \big(1, g'(a)\big)$ der Richtungsvektor der Tangente an $\mathrm{Graph}(f)$ im Punke $(a, f(a))$.

Beispiel Kreislinie: Sei $f\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(t) = (\cos t, \sin t)$. f ist differenzierbar, und $\big(\forall t \in [0, 2\pi)\big)$ $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$. Bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^2$, so folgt $(\forall t \in [0, 2\pi])\ \langle f(t),\, f'(t)\rangle = 0$ (der Tangentialvektor steht in jedem Punkt normal auf dem Ortsvektor).

Satz 7.8 (Schrankensatz)**.** *Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $\Omega \subset [a,b]$ eine höchstens abzählbare Menge. Sei X ein normierter Raum, $f\colon [a,b] \to X$ stetig, f differenzierbar in $[a,b] \setminus \Omega$, und $M = \sup\bigl\{\|f'(x)\| \bigm| x \in [a,b]\setminus\Omega\bigr\}$. Dann ist*

$$\|f(b) - f(a)\| \le M(b-a)\,.$$

Beweis. 1. Durch Widerspruch. Sei $\|f(b) - f(a)\| > M(b-a)$, und sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\|f(b) - f(a)\| > (M+\varepsilon)(b-a)$., Sei $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \|f(x) - f(a)\| - (M+\varepsilon)(x-a)\,.$$

Dann ist F stetig, $F(a) = 0$ und $F(b) > 0$. Da $F(\Omega)$ höchstens abzählbar ist, $\bigl(0, F(b)\bigr)$ aber überabzählbar (Satz 3.22), folgt $\bigl(0, F(b)\bigr) \setminus F(\Omega) \ne \emptyset$. Sei $\gamma \in \bigl(0, F(b)\bigr) \setminus F(\Omega)$. Nach dem Zwischenwertsatz ist $T = \{y \in [a,b] \mid F(y) = \gamma\} \ne \emptyset$, und es sei $c = \sup(T) \in [a,b]$. Dann gibt es eine Folge $(y_n)_{n\ge0}$ in T mit $(y_n)_{n\ge0} \to c$, und wegen der Stetigkeit von F ist dann auch $F(c) = \gamma$, also $c < b$ und $c \notin \Omega$. Für $x \in (c,b]$ ist $F(x) \ne \gamma$ nach Definition und daher $F(x) > \gamma$ (denn aus $F(x) < \gamma < F(b)$ folgte $F(x') = \gamma$ für ein $x' \in (x,b)$ nach dem Zwischenwertsatz). Insbesondere folgt für alle $h \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $c + h \le b$

$$\begin{aligned} 0 \ &< \ F(c+h) - \gamma = F(c+h) - F(c) \\ &= \ \|f(c+h) - f(a)\| - (M+\varepsilon)\bigl(c+h-a\bigr) - \bigl[\|f(c) - f(a)\| - (M+\varepsilon)(c-a)\bigr] \\ &\le \ \|f(c+h) - f(c)\| - h(M+\varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Wegen $c \notin \Omega$ folgt

$$0 \ \le\ \lim_{h\to0} \frac{\|f(c+h) - f(c)\|}{h} - (M+\varepsilon) \ = \ \|f'(c)\| - (M+\varepsilon) \ < \ 0\,, \quad \text{ein Widerspruch.} \qquad \square$$

Definition 7.3. Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $D \subset X$ heißt

- *konvex*, wenn $(\forall\, a,\, b \in D)\ \ [a,b] \subset D$.
- *polygonzusammenhängend*, wenn für alle $a,\, b \in D$ gilt: Es gibt $a_0, a_1, \ldots, a_n \in D$ mit $a_0 = a$, $a_n = b$ und $(\forall\, j \in \{1, \ldots, n\})\ \ [a_{j-1},\, a_j] \subset D$.
- *lokal konvex*, wenn $(\forall z \in D)\ (\exists \rho \in \mathbb{R}_{>0})\ \ D \cap B_\rho(z)$ ist konvex.

Bemerkungen:

1. Jede konvexe Teilmenge eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes ist polygonzusammenhängend.
2. Ist X eine normierter Raum, $D \subset X$ polygonzusammenhängend und $|D| \ge 2$, so ist $D \subset D'$.
3. Für $I \subset \mathbb{R}$ gilt: I ist ein Intervall $\iff$ I ist konvex $\iff$ I ist polygonzusammenhängend.
4. Ist X ein normierter Raum, $a \in X$ und $\rho \in (0,\infty]$, so sind $B_\rho(a)$ und $\overline{B}_\rho(a)$ in X konvex.
5. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\le0}$ ist polygonzusammenhängend, aber nicht konvex.
6. Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist lokal konvex.
7. Ist X ein normierter Raum, so ist jede offene Teilmenge von X lokal konvex.
8. Der Durchschnitt einer beliebigen Familie [lokal] konvexer Mengen ist [lokal] konvex.

Definition 7.4. Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$, $D \subset D'$, und sei

$$\text{entweder} \qquad D \subset \mathbb{R} \text{ und } X \text{ ein normierter Raum} \qquad \text{oder} \qquad X = \mathbb{C}\,.$$

Seien F, $f\colon D \to X$. Man nennt F eine *Stammfunktion* oder ein *unbestimmtes Integral* von f und schreibt

$$F = \int f \quad \text{oder} \quad F(x) = \int f(x)\,dx\,,$$

wenn gilt: F ist stetig, und es gibt eine höchstens abzählbare Menge $\Omega \subset D$, so dass

$$(\forall x \in D \setminus \Omega) \quad F \text{ ist differenzierbar in } x, \text{ und } F'(x) = f(x)\,.$$

Bemerkungen:
Seien die Voraussetzungen von Definition 7.4 erfüllt, und sei $F\colon D \to X$ eine Stammfunktion von $f\colon D \to X$.

1. Ist $\emptyset \neq D_0 \subset D$ und $D_0 \subset D_0'$, so ist auch $F \,|\, D_0$ eine Stammfunktion von $f \,|\, D_0$.
2. Ist $c \in X$, so ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von f. Daher schreibt man auch
$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\,.$$
Vorsicht, die Integralschreibweise ist nicht unproblematisch!
$$\text{Aus} \quad F(x) = \int f(x)\,dx \quad \text{und} \quad F_1(x) = \int f(x)\,dx \quad \text{folgt nicht} \quad F = F_1\,.$$

Satz 7.9. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ polygonzusammenhängend, $|D| \geq 2$, sei*

$$\textit{entweder} \quad D \subset \mathbb{R} \textit{ und } X \textit{ ein normierter Raum} \quad \textit{oder} \quad X = \mathbb{C}\,,$$

und sei $f\colon D \to X$.

1. *Sei f stetig, $\Omega \subset D$ höchstens abzählbar, und*
$$(\forall x \in D \setminus \Omega) \quad f \textit{ differenzierbar in } x, \textit{ und } f'(x) = 0\,.$$
Dann ist f konstant.
2. *Seien F_1, $F_2\colon D \to X$ Stammfunktionen von f. Dann ist $F_1 - F_2$ konstant.*
3. *Ist $a \in D$, $c \in X$, und habe f eine Stammfunktion. Dann hat f genau eine Stammfunktion $F\colon D \to X$ mit $F(a) = c$.*
4. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und für alle a, $b \in D$ mit $a < b$ habe $f \,|\, [a,b]$ eine Stammfunktion. Dann hat auch f eine Stammfunktion.*

Beweis. 1. Seien $a, b \in D$, $a \neq b$, und seien $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b \in D$ verschieden, so dass $(\forall j \in \{1, \ldots, n\})$ $[a_{j-1}, a_n] \subset D$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\varphi_j\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\varphi_j(x) = a_{j-1} + x(a_j - a_{j-1})$. Dann ist $f \circ \varphi_j\colon [0,1] \to X$ stetig, für $z \in [0,1] \setminus \varphi_j^{-1}(\Omega)$ ist $f \circ \varphi_j$ differenzierbar in z, und $(f \circ \varphi_j)'(z) = f'(\varphi_j(z))\varphi_j'(z) = 0$. Wegen der Injektivität von $\varphi_j \,|\, \varphi_j^{-1}(\Omega)\colon \varphi_j^{-1}(\Omega) \to \Omega$ ist auch $\varphi_j^{-1}(\Omega)$ höchstens abzählbar. Aus Satz 7.8 folgt $f(a_{j-1}) = f \circ \varphi_j(0) = f \circ \varphi_j(1) = f(a_j)$, also $f(a) = f(a_0) = f(a_1) = \ldots = f(a_n) = f(b)$.

2. Für $j \in \{1, 2\}$ gilt: F_j ist stetig, und es gibt eine höchstens abzählbare Teilmenge $\Omega_j \subset D$, so dass $(\forall x \in D \setminus \Omega_j)$ F_j ist differenzierbar in x, und $F_j'(x) = f(x)$. Dann ist auch $F_1 - F_2\colon D \to X$ stetig, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ höchstens abzählbar und

$$(\forall x \in D \setminus \Omega) \quad F_1 - F_2 \quad \text{ist differenzierbar in } x, \text{ und} \quad (F_1 - F_2)'(x) = 0\,.$$

Daher ist $F_1 - F_2$ konstant nach 1.

3. Sei $F_1\colon D \to X$ eine Stammfunktion von f. Dann ist $F = F_1 + (c - F_1(a))$ eine Stammfunktion von f mit $F(a) = c$. Die Eindeutigkeit folgt aus 2.

4. Sei $a = \inf(D)$, $b = \sup(D)$ und $c \in D^\circ$. Nach Satz 3.15 gibt es eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in $D \cap (-\infty, c)$ und eine monoton wachsende Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ in $D \cap (c, \infty)$, so dass $(\forall n \geq 0)$ $a_n = a$, falls $a \in D$, $(\forall n \geq 0)$ $b_n = b$, falls $b \in D$, und

$$D = \bigcup_{n\geq 0} [a_n, b_n]\,.$$

Für jedes $n \geq 0$ gibt es nach 3. genau eine Stammfunktion $F_n\colon [a_n, b_n] \to X$ von $f \,|\, [a_n, b_n]$ mit $F_n(c) = 0$. Nach 2. ist dann $F_{n+1} \,|\, [a_n, b_n] = F_n$ für alle $n \geq 0$, und daher gibt es eine Funktion $F\colon D \to X$, so dass $(\forall n \geq 0)$ $F \,|\, [a_n, b_n] = F_n$. Für alle $n \geq 0$ ist F_n stetig, und es gibt eine höchstens abzählbare Menge $\Omega_n \subset [a_n, b_n]$, so dass F_n in allen Punktion $x \in [a_n, b_n] \setminus \Omega_n$ differenzierbar ist mit $F_n'(x) = f(x)$. Daher ist auch F stetig, und mit

$$\Omega = \bigcup_{n\geq 0} \big(\Omega_n \cup \{a_n, b_n\}\big)$$

gilt: F ist in allen Punktion $x \in D \setminus \Omega$ differenzierbar mit Ableitung $F'(x) = f(x)$. Ω ist aber höchstens abzählbar, und daher ist F eine Stammfunktion von f. □

Satz 7.10 (Stammfunktionen analytischer Funktionen)**.**

1. *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $\rho \in (0, \infty]$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $f\colon B_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ definiert durch*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z_0)^n$$

und $c \in \mathbb{C}$. Dann hat f genau eine Stammfunktion $F\colon B_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $F(z_0) = c$, und diese ist gegeben durch

$$(\forall x \in B_\rho(z_0)) \quad F(x) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - z_0)^{n+1}\,.$$

2. *Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ lokal konvex, $f\colon D \to \mathbb{C}$ analytisch und $F\colon D \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f. Dann ist auch F analytisch.*

Beweis. 1. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 7.9. Nach Satz 7.2 hat die Potenzreihe

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

ebenfalls den Konvergenzreadius ρ, und F ist eine Stammfunktion von f.

2. Sei $z_0 \in D$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho \geq \varepsilon$, so dass $D \cap B_\varepsilon(z_0)$ konvex ist und

$$\big(\forall x \in D \cap B_\varepsilon(z_0)\big) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z_0)^n\,.$$

Sei $F_1 \colon D \cap B_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$F_1(x) = F(z_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-z_0)^{n+1}\,.$$

Nach 1. ist F_1 eine Stammfunktion von $f \,|\, D \cap B_\varepsilon(z_0)$ mit $F_1(z_0) = F(z_0)$, und aus Satz 7.9.3 folgt $F_1 = F \,|\, D \cap B_\varepsilon(z_0)$. Daher ist F analytisch in z_0. □

Satz 7.11 (Differenzialgleichung der Exponentialfunktion)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ polygonzusammenhängend, $|D| \geq 2$, und seien $f, g \colon D \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f' = fg'$. Dann*

$$(\exists c \in \mathbb{C})\ (\forall x \in D) \quad f(x) = c\,\mathsf{e}^{g(x)}\,.$$

Insbesondere: Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ und $f' = \alpha f$, so $(\exists c \in \mathbb{C})\ (\forall x \in D) \quad f(x) = c\,\mathsf{e}^{\alpha x}$.

Beweis. Sei $F \colon D \to \mathbb{C}$ definiert durch $F(x) = f(x)\mathsf{e}^{-g(x)}$. Dann ist F differenzierbar, und für $x \in D$ ist

$$F'(x) = f'(x)\mathsf{e}^{-g(x)} + f(x)\big[-g'(x)\mathsf{e}^{-g(x)}\big] = (f' - fg')(x)\mathsf{e}^{-g(x)} = 0\,.$$

Daher ist F konstant, $F = c \in \mathbb{C}$, und $(\forall x \in D)\ \ f(x) = c\mathsf{e}^{g(x)}$. □

Satz 7.12.

1. $\operatorname{Log} | \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ *ist analytisch,*

$$(\forall x \in B_1(0))\ \ \operatorname{Log}(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\,, \quad \textit{und} \quad \log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\,.$$

2. *Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Die Funktion $P_\alpha \colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$, definiert durch $P_\alpha(z) = z^\alpha$, ist analytisch, und*

$$(\forall x \in B_1(0))\ \ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n\,.$$

Beweis. 1. $\operatorname{Log} | \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist differenzierbar und $(\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0})\ \operatorname{Log}'(x) = x^{-1}$. Daher ist $(\operatorname{Log} | \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0})'$ analytisch, und nach Satz 7.10 ist auch $\operatorname{Log} | \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ analytisch.

Seien $L, l \colon B_1(0) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$L(x) \ = \ \operatorname{Log}(1+x) \quad \text{und} \quad l(x) \ = \ \frac{1}{1+x} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\,.$$

Dann ist L eine Stammfunktion von l, und $L(0) = 0$. Daher folgt aus Satz 7.10

$$\operatorname{Log}(1+x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\,,$$

und nach Satz 5.12 ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \ = \ \lim_{t \to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n \ = \ \lim_{t \to 1-} \log(1+t) \ = \ \log 2\,,$$

da die alternierende Reihe nach Satz 5.3 konvergiert.

2. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist $P_\alpha(z) = \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$, also P_α als Hintereinanderausführung analytischer Funktionen wieder analytisch. Die Binomialreihe hat den Konvergenzradius 1, und daher ist

$$f : B_1(0) \to \mathbb{C}\,, \quad \text{definiert durch} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n\,,$$

analytisch. Für $x \in B_1(0) \subset \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= (1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} n x^{n} \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\binom{\alpha}{n} x^n = \alpha f(x)\,,\end{aligned}$$

da

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \binom{\alpha}{n+1}(n+1) + \binom{\alpha}{n} n = \alpha\binom{\alpha}{n}$$

Sei $g\colon B_1(0) \to \mathbb{C}$ definiert durch $g(x) = \alpha \operatorname{Log}(1+x)$. Dann folgt

$$(\forall x \in B_1(0)) \quad f'(x) = f(x)\frac{\alpha}{1+x} = f(x)g'(x)\,,$$

und daher nach Satz 7.11

$$(\forall x \in B_1(0)) \quad f(x) = c\mathrm{e}^{g(x)} = c(1+x)^\alpha$$

mit $c \in \mathbb{C}$. Wegen $f(0) = 1 = c$ folgt die Behauptung. □

Satz 7.13. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ konvex und beschränkt, $|D| \geq 2$, und sei*

entweder $D \subset \mathbb{R}$ und X ein Banachraum oder $X = \mathbb{C}$.

Sei $(f_n\colon D \to X)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen, $f\colon D \to X$ und $(f_n)_{n\geq 0} \rightrightarrows f$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $F_n\colon D \to X$ eine Stammfunktion von f_n, und es sei $z_0 \in D$, so dass die Folge $(F_n(z_0))_{n\geq 0}$ konvergiert.

Dann konvergiert $(F_n)_{n\geq 0}$ gleichmäßig gegen eine Stammfunktion $F\colon D \to X$ von f. Sind alle F_n differenzierbar in D, so ist auch F differenzierbar in D.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist F_n stetig, und es gibt eine höchstens abzählbare Menge $\Omega_n \subset D$, so dass für alle $x \in D \setminus \Omega_n$ gilt: F_n ist differenzierbar in x, und $F_n'(x) = f_n(x)$. Dann ist auch

$$\Omega = \bigcup_{n\geq 0} \Omega_n \subset D$$

höchstens abzählbar. Wir zeigen nun die folgenden drei Behauptungen:

A. $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \geq 0)\ (\forall m,\, n \geq n_0)\ (\forall x,\, y \in D)\ \|(F_m - F_n)(x) - (F_m - F_n)(y)\| \leq \varepsilon|x-y|$.

B. Es gibt eine stetige Funktion $F\colon D \to \mathbb{C}$ mit $(F_n)_{n\geq 0} \rightrightarrows F$.

C. $F \,|\, D \setminus \Omega$ ist differenzierbar, und $(\forall x \in D \setminus \Omega) \quad F'(x) = f(x)$.

Beweis von **A.** Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $(f_n)_{n\geq 0} \rightrightarrows f$ gibt es ein $n_0 \geq 0$, so dass

$$(\forall m,\, n \geq n_0) \quad \big\|f_m - f_n\big\|_D < \varepsilon\,.$$

Seien $m, n \geq n_0$ und $x, y \in D$. Sei $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\varphi(t) = y + t(x-y)$ (also $\varphi\big([0,1]\big) = [y,x] \subset D$), und sei $g = (F_m - F_n)\circ\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Dann ist g stetig,

$\varphi^{-1}(\Omega) \subset [0,1]$ ist höchstens abzählbar, für alle $t \in [0,1] \setminus \varphi^{-1}(\Omega)$ ist g differenzierbar in t, $g'(t) = (F_m - F_n)'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = (f_m - f_n)\big(\varphi(t)\big)(x-y)$ und daher

$$\|g'(t)\| \;\le\; \|f_m - f_n\|_D\,|x-y| \;\le\; \varepsilon|x-y|\,.$$

Aus Satz 7.8 folgt nun $\|(F_m - F_n)(x) - (F_m - F_n)(y)\| \;=\; \|g(1) - g(0)\| \;\le\; \varepsilon|x-y|$.

Beweis von **B.** Nach Satz 4.20 und Satz 4.19 ist zu zeigen:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \ge 0)\ (\forall m,\, n \ge n_0) \quad \|F_m - F_n\|_D < \varepsilon\,.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $B = \sup\big\{|x - z_0| \;\big|\; x \in D\big\}$. Da D beschränkt ist, folgt $B < \infty$. Wegen $(F_n(z_0))_{n\ge 0} \to F(z_0)$ und **A** gibt es ein $n_0 \ge 0$, so dass für alle $m,\, n \ge n_0$ und alle $x \in D$

$$\|F_m(z_0) - F_n(z_0)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \|(F_m - F_n)(x) - (F_m - F_n)(z_0)\| \;\le\; \frac{\varepsilon}{2B}\,|x - z_0| \;\le \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

also

$$\|(F_m - F_n)(x)\| \le \|(F_m - F_n)(x) - (F_m - F_n)(z_0)\| + \|(F_m - F_n)(z_0)\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \|F_m(z_0) - F_n(z_0)\|\,.$$

Damit folgt

$$\big\|F_m - F_n\big\|_D \le \frac{\varepsilon}{2} + \|F_m(z_0) - F_n(z_0)\| < \varepsilon\,.$$

Beweis von **C.** Sei $x \in D \setminus \Omega$. Wir müssen zeigen: Für jede Folge $(x_k)_{k\ge 0}$ in $D \setminus \{x\}$ mit $(x_k)_{k\ge 0} \to x$ ist

$$\Big(\frac{1}{x_k - x}\big[F(x_k) - F(x)\big]\Big)_{k\ge 0} \;\to\; f(x)\,,$$

also

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists k_0 \ge 0)\ (\forall k \ge k_0) \quad \Big\|\frac{1}{x_k - x}\big[F(x_k) - F(x)\big] - f(x)\Big\| < \varepsilon\,.$$

Sei $(x_k)_{k\ge 0}$ eine Folge in $D \setminus \{x\}$ mit $(x_k)_{k\ge 0} \to x$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach **A** gibt es ein $n_0 \ge 0$, so dass für alle $m \ge n \ge n_0$ und alle $k \ge 0$

$$\big\|\big[F_m(x_k) - F_m(x)\big] - \big[F_n(x_k) - F_n(x)\big]\big\| \;\le\; \frac{\varepsilon}{3}\,|x_k - x|\,.$$

Damit folgt (für $m \to \infty$): Für alle $n \ge n_0$ und $k \ge 0$ ist

$$\Big\|\frac{1}{x_k - x}\big[F(x_k) - F(x)\big] \;-\; \frac{1}{x_k - x}\big[F_n(x_k) - F_n(x)\big]\Big\| \;\le\; \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Wegen $(f_n(x))_{n\ge 0} \to f(x)$ gibt es ein $n \ge n_0$ mit

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Wegen $f_n(x) = F_n'(x)$ gibt es ein $k_0 \ge 0$, so dass

$$(\forall k \ge k_0) \quad \Big|\frac{1}{x_k - x}\big[F_n(x_k) - F_n(x)\big] - f_n(x)\Big\| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Für $k \ge k_0$ ist dann

$$\Big\|\frac{1}{x_k - x}\big[F(x_k) - F(x)\big] - f(x)\Big\| \le \Big\|\frac{1}{x_k - x}\big[F(x_k) - F(x)\big] - \frac{1}{x_k - x}\big[F_n(x_k) - F_n(x)\big]\Big\|$$
$$+ \Big\|\frac{1}{x_k - x}\big[F_n(x_k) - F_n(x)\big] - f_n(x)\Big\| + \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon\,.$$

Sind alle F_n differenzierbar in D, so ist $\Omega = \emptyset$ und F ist differenzierbar in D. $\square$

Satz 7.14. *Sei entweder* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ *offen und* X *ein Banachraum oder* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ *offen und* $X = \mathbb{C}$. *Seien* $f, F \colon D \to X$, *und sei* $(F_n \colon D \to X)_{n\geq 0}$ *eine Folge differenzierbarer Funktionen.*

1. *Sei* $(F_n)_{n\geq 0} \to F$ *und* $(F_n')_{n\geq 0} \rightrightarrows_{\mathrm{lok}} f$. *Dann ist* $(F_n)_{n\geq 0} \rightrightarrows_{\mathrm{lok}} F$, F *ist differenzierbar, und* $F' = f$.
2. *Sei*
$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \quad \textit{und} \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} F_n' \quad \textit{lokal gleichmäßig}.$$
Dann ist
$$\sum_{n\geq 0} F_n \ \ \textit{lokal gleichmäßig konvergent}, \ F \ \ \textit{ist differenzierbar, und} \ \ F' = f\,.$$

Beweis. Es genügt, 1. zu zeigen. Sei $a \in D$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_r(a) \subset D$ und $(F_n' \,|\, B_r(a))_{n\geq 0} \Rightarrow f \,|\, B_r(a)$. $B_r(a)$ ist beschränkt und konvex, und wegen $(F_n(a))_{n\geq 0} \to F(a)$ folgt die Behauptung aus Satz 7.13. □

Ist $(F_n)_{n\geq 0}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen und $(F_n)_{n\geq 0} \Rightarrow F$, so braucht F nicht differenzierbar zu sein.
Beispiel: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $F_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$F_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\,. \quad \text{Dann ist} \quad (F_n)_{n\geq 1} \Rightarrow F = (x \mapsto |x|)\,.$$

Satz 7.15 (Produktzerlegung der Sinusfunktion)**.** *Für* $x \in \mathbb{C}$ *ist*
$$\sin(\pi x) = \pi x \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big) = \pi \lim_{N\to\infty} \frac{(-1)^N}{N!^2} \prod_{n=-N}^{N} (x+n)\,,$$
und
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \lim_{N\to\infty} \frac{2^{4N} N!^4}{(2N)!\,(2N+1)!}\,.$$
Man schreibt diese Gleichungen auch in der Form
$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big) \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} \quad \text{(Wallis'sches Produkt)}.$$

Beweis. Die beiden Formeln für $\sin(\pi x)$ sind gleichwertig, denn für $N \in \mathbb{N}$ ist
$$x \prod_{n=1}^{N} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big) = x \prod_{n=1}^{N} \frac{(n-x)(n+x)}{n^2} = \frac{(-1)^N}{N!^2}\, x \prod_{n=1}^{N} (x-n)(x+n) = \frac{(-1)^N}{N!^2} \prod_{n=-N}^{N} (x+n)\,.$$
Sei nun $D = \mathbb{C}^\times \setminus \big((-\infty,-1] \cup [1,\infty)\big)$. $D \subset \mathbb{C}$ ist offen. Für $x \in D$ und $n \in \mathbb{N}$ ist
$$1 - \frac{x^2}{n^2} \notin \mathbb{R}_{\leq 0}\,, \quad \text{und wir definieren} \quad F_n \colon D \to \mathbb{C} \quad \text{durch} \quad F_n(x) = \operatorname{Log}\Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)\,.$$
$F_n \colon D \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar, für alle $x \in D$ ist
$$F_n'(x) = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2}} \, \frac{-2x}{n^2} = \frac{2x}{x^2 - n^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2} = \pi \cot(\pi x) - \frac{1}{x}$$

nach Satz 6.16, wobei die Reihe in D lokal gleichmäßig konvergiert.
Sei nun $R \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2R$ und $x \in \overline{B}_R(0)$. Dann ist

$$x^2 \leq \frac{n^2}{4}\,, \quad \text{also} \quad n^2 - x^2 \geq \frac{3n^2}{4}$$

und daher

$$\begin{aligned}\sum_{n=2R}^{\infty} \Big|\operatorname{Log}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)\Big| &= \sum_{n=2R}^{\infty}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big(\frac{x^2}{n^2}\Big)^k\Big| \leq \sum_{n=2R}^{\infty}\frac{x^2}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{x^2}{n^2}\Big)^k = \sum_{n=2R}^{\infty}\frac{x^2}{n^2}\,\frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2}} \\ &= \sum_{n=2R}^{\infty}\frac{x^2}{n^2-x^2} \leq \sum_{n=2R}^{\infty}\frac{4x^2}{3n^2} < \frac{4R}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty\,.\end{aligned}$$

Also konvergiert die Funktionenreihe

$$\sum_{n\geq 1}\operatorname{Log}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big) \quad \text{gleichmäßig in } D\cap\overline{B}_R(0) \text{ und lokal gleichmäßig konvergent in } D\,,$$

nach Satz 7.14 und Satz 4.19 ist die Funktion $F\colon D \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big), \text{ differenzierbar, es ist } F'(x) = \pi\cot(\pi x) - \frac{1}{x}\,, \text{ und } \lim_{x\to 0}F(x) = 0\,.$$

Sei nun $G\colon D \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$G(x) = \frac{x\mathrm{e}^{F(x)}}{\sin(\pi x)}\,, \quad \text{also} \quad \lim_{x\to 0}G(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\Big)^{-1}\mathrm{e}^{F(x)} = \frac{1}{\pi}\,.$$

Es ist $G' = 0$, also $G = \pi^{-1}$ konstant und daher für alle $x \in D$

$$\begin{aligned}\sin(\pi x) &= \pi x\exp\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)\Big\} = \pi x\exp\Big\{\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\operatorname{Log}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)\Big\} \\ &= \pi x \lim_{N\to\infty}\exp\Big\{\sum_{n=1}^{N}\operatorname{Log}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)\Big\} = \pi x\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)\,.\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt diese Gleichung auch für $x = 0$.
Sei nun $x \in \mathbb{R}_{>1}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $z = x - k \in (-1, 1)$. Dann folgt

$$\sin(\pi x) = (-1)^k\sin(\pi z) = (-1)^k\pi\lim_{N\to\infty}\frac{(-1)^N}{N!^2}\prod_{n=-N}^{N}(z+n)\,.$$

Für $N > k$ ist

$$\begin{aligned}\prod_{n=-N}^{N}(x+n) &= \prod_{n=-N}^{N}(z+k+n) = \prod_{n=-N+k}^{N+k}(z+n) = \prod_{n=-N}^{N}(z+n)\prod_{n=N+1}^{N+k}(z+n)\prod_{n=-N}^{-N+k-1}(z+n)^{-1} \\ &= \prod_{n=-N}^{N}(z+n)\prod_{n=1}^{k}\frac{z+N+n}{z-N-1+n}\,, \quad \text{und} \quad \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{k}\frac{z+N+n}{z-N-1+n} = (-1)^k\end{aligned}$$

und daher

$$\sin(\pi x) = \pi\lim_{N\to\infty}\frac{(-1)^N}{N!^2}\prod_{n=-N}^{N}(x+n)\,.$$

Sei schließlich $x \in \mathbb{R}$ und $x < -1$. Dann ist

$$\sin(\pi x) = -\sin(-\pi x) = -(-x)\pi \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big) = \pi x \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big).$$

Für $x = \frac{1}{2}$ folgt $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \Big(1 - \frac{1}{4n^2}\Big)$, also $\frac{\pi}{2} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$.

Für $N \in \mathbb{N}$ ist aber

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \prod_{n=1}^{N} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2^{2N} N!^2 \big[2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2N)\big]^2}{(2N)!\,(2N+1)!} = \frac{2^{4N} N!^4}{(2N)!\,(2N+1)!}. \qquad \square$$

Satz 7.16 (Stirling'sche Formel)**.** *Für $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$0 \le \log n! - \Big[\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\log n - n + \log\sqrt{2\pi}\Big] \le \frac{1}{12n} \quad \textit{und daher} \quad 1 \le \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}} \le \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}.$$

Beweis. Für $x \in (-1, 1)$ ist nach Satz 7.12

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n = 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1}.$$

Daher gilt für alle $\mu \in \mathbb{N}$

$$\Big(\mu + \frac{1}{2}\Big)\log\frac{\mu+1}{\mu} = \frac{2\mu+1}{2}\log\frac{1 + \frac{1}{2\mu+1}}{1 - \frac{1}{2\mu+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)(2\mu+1)^{2m}},$$

und wir erhalten die Abschätzung

$$0 < \Big(\mu + \frac{1}{2}\Big)\log\frac{\mu+1}{\mu} - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)(2\mu+1)^{2m}} < \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2\mu+1)^{2m}} = \frac{1}{12}\Big(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+1}\Big).$$

Damit folgt für alle $k, n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 < \sum_{\mu=n}^{n+k-1} \Big(\mu + \frac{1}{2}\Big)\log\frac{\mu+1}{\mu} - k < \frac{1}{12}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\Big).$

Wir setzen $\quad \gamma_n = \log n! + n - \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\log n \quad$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=n}^{n+k-1} \Big(\mu + \frac{1}{2}\Big)\log\frac{\mu+1}{\mu} - k &= \sum_{\mu=n}^{n+k-1} \Big(\mu + \frac{1}{2}\Big)\log(\mu+1) - \sum_{\mu=n}^{n+k-1} \Big(\mu + \frac{1}{2}\Big)\log\mu - k \\
&= \sum_{\mu=n+1}^{n+k} \Big(\mu - \frac{1}{2}\Big)\log\mu - \sum_{\mu=n}^{n+k-1} \Big(\mu + \frac{1}{2}\Big)\log\mu - k \\
&= \Big(n + k - \frac{1}{2}\Big)\log(n+k) - \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\log n - \sum_{\mu=n+1}^{n+k-1} \log\mu - k \\
&= \Big(n + k + \frac{1}{2}\Big)\log(n+k) - \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\log n - \log(n+k)! + \log n! + n - (n+k) \\
&= \gamma_n - \gamma_{n+k}, \quad \text{also} \quad 0 < \gamma_n - \gamma_{n+k} < \frac{1}{12}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\Big).
\end{aligned}$$

Daher ist die Folge $(\gamma_\nu)_{\nu\ge1}$ eine monoton fallende Cauchyfolge, und mit

$$\gamma=\lim_{\nu\to\infty}\gamma_\nu \quad\text{folgt}\quad 0\le\lim_{k\to\infty}(\gamma_n-\gamma_{n+k})=\gamma_n-\gamma\le\frac{1}{12n}\,.$$

Daher folgt

$$0\le\log n!+n-\Big(n+\frac12\Big)\log n-\gamma\le\frac{1}{12n}\,,\quad\text{und es bleibt}\quad\gamma=\log\sqrt{2\pi}\quad\text{zu zeigen}\,.$$

Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}4\gamma_n-2\gamma_{2n}&=\big[\,4\log n!+4n-(4n+2)\log n\,\big]-\big[\,2\log(2n)!+4n-(4n+1)\log 2n\,\big]\\&=\log\frac{n!^4(2n)^{4n+1}}{n^{4n+2}(2n)!^2}=\log\Big(\frac{2^{4n}n!^4}{(2n)!(2n+1)!}\,\frac{2(2n+1)}{n}\Big)\,,\end{aligned}$$

und nach Satz 7.15 folgt

$$\gamma\;=\;\frac12\lim_{n\to\infty}(4\gamma_n-2\gamma_{2n})\;=\;\frac12\log\Big(\frac{\pi}{2}\cdot4\Big)\;=\;\log\sqrt{2\pi}\,.\qquad\square$$

Beispiel: Eine überall stetige und nirgends differenzierbare Funktion.
Sei $n\in\mathbb N$. Dann hat jedes $x\in\mathbb R$ eine eindeutige Darstellung $x=x_n+2^{-2n}g$ mit $x_n\in\mathbb R$, $|x_n|\le2^{-2n-1}$ und $g\in\mathbb Z$, und man definiert $f_n\colon\mathbb R\to\mathbb R$ durch $f_n(x)=|x_n|$. Dann ist wegen $\|f_n\|_{\mathbb R}=2^{-2n-1}$ die Reihe $\sum_{n\ge1}f_n$ normal konvergent und daher die Funktion

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\colon\mathbb R\to\mathbb R$$

stetig. Aber f ist nirgends differenzierbar.
Beweisskizze:
Sei $x\in\mathbb R$. Für $g\in\mathbb Z$ ist f_n auf $[2^{-2n}g-2^{-2n-1},\,2^{-2n}g]$ linear mit Steigung 1 und auf $[2^{-2n}g,\,2^{-2n}g-2^{-2n-1}]$ linear mit Steigung -1. Daher ist f_n auf dem Intervall $[x-2^{-2n-2},x]$ oder auf dem Intervall $[x,\,x+2^{-2n-2}]$ linear mit Steigung $\varepsilon_n\in\{\pm1\}$, und wir setzen $h_n=-2^{-2n-2}$ im ersten Fall und $h_n=2^{-2n-2}$ im zweiten Fall. Für alle $k\in\{0,n\}$ ist dann auch f_k linear zwischen x und $x+h_n$ mit einer Steigung $\varepsilon_{n,k}\in\{\pm1\}$ und daher

$$\frac{f_k(x+h_n)-f_k(x)}{h_n}=\varepsilon_{n,k}\,.$$

Für $k>n$ ist $f_k(x)=f_k(x+h_n)$, also

$$\frac{f_k(x+h_n)-f_k(x)}{h_n}=0\,,\quad\text{und daher}\quad\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{k,n}\,,$$

aber diese Folge konvergiert nicht.

7.3. Höhere Ableitungen, Taylor'scher Satz und lokale Extrema

Definition 7.5. Sei $I\subset\mathbb R$ ein Intervall, $a\in I$ und $f\colon I\to\mathbb R$.

1. Man sagt, f hat in a ein *lokales Maximum* [ein *lokales Minimum*], wenn

$$(\exists\varepsilon\in\mathbb R_{>0})\ \big(\forall x\in I\cap(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\big)\quad f(x)\le f(a)\quad[\,f(x)\ge f(a)\,]\,.$$

2. Man sagt, f hat in a ein *strenges lokales Maximum* [ein *strenges lokales Minimum*], wenn $(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ \big(\forall x \in I \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\big)\quad f(x) < f(a) \quad [\,f(x) > f(a)\,]$.
3. Man sagt, f hat in a ein [*strenges*] *lokales Extremum*, wenn f in a ein [strenges] lokales Maximum oder ein [strenges] lokales Minimum hat.

Satz 7.17. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I^\circ$. $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in a und habe in a ein lokales Extremum. Dann ist $f'(a) = 0$.*

Beweis. FALL 1: f habe in a ein lokales Maximum. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset I$ und $(\forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon))\ \ f(x) \le f(a)$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$

$$\frac{f(a+\frac{1}{n}) - f(a)}{\frac{1}{n}} \le 0 \quad \text{und} \quad \frac{f(a-\frac{1}{n}) - f(a)}{-\frac{1}{n}} \le 0\,,$$

also

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a+\frac{1}{n}) - f(a)}{\frac{1}{n}} \le 0 \quad \text{und} \quad f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a-\frac{1}{n}) - f(a)}{-\frac{1}{n}} \ge 0\,,$$

woraus $f'(a) = 0$ folgt.

FALL 2: f habe in a ein lokales Minimum. Dann hat $-f$ in a ein lokales Maximum, und nach Fall 1 ist $0 = (-f)'(a) = -f'(a)$. □

Satz 7.18 (Satz von Rolle)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig, $f(a) = f(b)$, und sei $f\,|\,(a,b)$ differenzierbar. Dann gibt es ein $z \in (a,b)$ mit $f'(z) = 0$.*

Beweis. $[a,b]$ ist kompakt. Nach Satz 4.17 gibt es $x_0,\, x_1 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = \min f\big([a,b]\big)$ und $f(x_1) = \max f\big([a,b]\big)$. Ist f konstant, so ist $f' = 0$. Ist f nicht konstant, so gibt es ein $\nu \in \{0,1\}$ mit $x_\nu \in (a,b)$, und nach Satz 7.17 ist dann $f'(x_\nu) = 0$. □

Definition 7.6. Sei $\emptyset \ne D \subset \mathbb{C}$, $D \subset D'$, und sei entweder $D \subset \mathbb{R}$ und X ein normierter Raum, oder $X = \mathbb{C}$. Sei $f\colon D \to X$ und $p \in \mathbb{N}$.

1. f heißt *p-mal differenzierbar* (in D), wenn es eine Folge von Funktionen
$$f = f^{(0)},\, f^{(1)},\, f^{(2)}, \dots, f^{(p)}\colon D \to \mathbb{C}$$
gibt, so dass $(\forall j \in \{1,\dots p\})\ \ f^{(j-1)}$ ist differenzierbar, und $(f^{(j-1)})' = f^{(j)}$.
Die Funktion $f^{(p)}$ heißt *p-te Ableitung* von f, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$ etc.
2. f heißt *p-mal stetig differenzierbar* oder eine *C^p-Funktion*, wenn f p-mal differenzierbar und $f^{(p)}$ stetig ist. f heißt *stetig differenzierbar*, wenn f eine C^1-Funktion ist.
Man nennt f eine *C^0-Funktion*, wenn f stetig ist.
3. f heißt eine *beliebig oft differenzierbare Funktion* oder eine *C^∞-Funktion*, wenn $(\forall n \in \mathbb{N})\ f$ ist n-mal differenzierbar [dann ist f auch für alle $n \in \mathbb{N}$ eine C^n-Funktion].

Definition 7.7. Sei $D \subset \mathbb{C}$, $D \subset D'$, $a \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$.

1. Sei $p \in \mathbb{N}$ und f p-mal differenzierbar und a. Dann heißt die Polynomfunktion $T_a^p f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch
$$(T_a^p f)(x) = \sum_{\nu=0}^{p} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu\,,$$

das *p-te Taylorpolynom* von f in a, und die Funktion $R_a^p f\colon D \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(R_a^p f)(x) = f(x) - (T_a^p f)(x)\,,$$

heißt *p-tes Taylor'sches Restglied* von f in a.

2. Sei f eine C^∞-Funktion. Die Funktionenreihe

$$(T_a f)(x) = \sum_{n\ge 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

heißt *Taylor'sche Reihe* von f in a. Man sagt, f *wird durch die Taylor'sche Reihe in a dargestellt*, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass für alle $x \in D \cap B_\varepsilon(a)$ gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \Big[\iff \lim_{p\to\infty} R_a^p f)(x) = 0 \Big]\,.$$

Es ist $(T_a^0 f)(x) = f(a)$, $(T_a^1 f)(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$, und $(\forall p \in \mathbb{N}_0)$ $T_a^p f$ ist eine Polynomfunktion vom Grade $\operatorname{grad}(T_a^p f) \le p$. Wird f durch die Taylor'sche Reihe in a dargestellt, so ist f in a analytisch.

Satz 7.19.

1. *Sei $(a_n)_{n\ge 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, die Potenzreihe $P[z] = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$ habe den Konvergenzradius $\rho > 0$, es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f\colon B_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ definiert durch*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-z_0)^n\,.$$

Dann ist f eine C^∞-Funktion,

$$(\forall p \in \mathbb{N}_0)\ (\forall x \in B_\rho(z_0))\quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)\,a_n(x-z_0)^{n-p}\,,$$

und $(T_{z_0} f)(x) = P(x-z_0)$. Insbesondere wird f durch die Taylor'sche Reihe in z_0 dargestellt.

2. *Sei $\emptyset \ne D \subset \mathbb{C}$, $D \subset D'$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f eine C^∞-Funktion.*

Beweis. Nach Satz 7.3 gilt für alle $p \in \mathbb{N}_0$: Ist

$$(\forall x \in B_\rho(z_0))\quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)\,a_n(x-z_0)^{n-p}\,,$$

so ist $f^{(p)}$ differenzierbar in $B_\rho(z_0)$, und

$$\big(\forall x \in B_\rho(z_0)\big)\quad f^{(p+1)}(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p)\,a_n(x-z_0)^{n-p-1}\,.$$

Daher ist f eine C^∞-Funktion. Die übrigen Aussagen folgen unmittelbar aus den entsprechenden Definitionen. □

Hässliche Beispiele:

1. Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = P_+\Big(\frac{1}{x}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \ \text{ für } \ x > 0\,, \quad f(x) = P_-\Big(\frac{1}{x}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \ \text{ für } \ x < 0\,, \quad f(0) = 0$$

mit (beliebigen) Polynomfunktionen $P_+,\ P_- \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Auf Grund von Beispiel 2 nach Satz 7.1 sind für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Funktionen

$$f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\quad \text{definiert durch}\quad f_k(x) = x^{-k}\exp(-1/x^2)\ \text{ für }\ x \neq 0\,,\ \text{ und }\ f_k(0) = 0$$

differenzierbar in 0 mit Ableitung $f_k'(0) = 0$, und daher gilt dasselbe für alle $f \in \mathcal{L}$. Die Funktionen f_k sind differenzierbar in $\mathbb{R}^\times$, und für $x \in \mathbb{R}^\times$ ist

$$f_k'(x) = (-kx^{-k-1} + 2x^{-k-3})\exp(-1/x^2)\,.$$

Daher ist $f_k' \in \mathcal{L}$, und es folgt:

Die Funktionen $f \in \mathcal{L}$ sind C^∞-Funktion, $(\forall p \in \mathbb{N}_0)\ \ f^{(p)}(0) = 0$, also auch $T_0 f = 0$ (die Taylor'sche Reihe konvergiert, aber stellt die Funktion nicht dar).

Im Falle $P_+ = P_- = 1$ hat f in 0 ein strenges lokales Minimum, im Falle $P_+ = P_- = -1$ hat f in 0 ein strenges lokales Maximum, und im Falle $P_+ = 1,\ P_- = -1$ hat f in 0 kein lokales Extremum. Es gibt daher kein notwendiges Kriterium für lokale Extrema allein mittels der höheren Ableitungen in einem Punkt.

2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(1 + 4^k x^2)}\,.$$

f ist eine C^∞-Funktion, und die Taylor'sche Reihe

$$T_0 f = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \exp(4^n) x^n \quad \text{hat den Konvergenzradius } 0\,.$$

Hauptsatz der Cauchy'schen Funktionentheorie (ohne Beweis). *Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Dann ist f analytisch (und daher auch eine C^∞-Funktion).*

Satz 7.20 (Taylor'scher Satz)**.** *Seien $c,\, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $p \in \mathbb{N}_0$, $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ eine C^p-Funktion und $f^{(p)}\,|\,(c,d)$ differenzierbar. Seien $a,\, z \in [c,d]$ und entweder $a < z$, $Z = (a,z)$, oder $a > z$, $Z = (z,a)$.*

1. (Restglied von Schlömilch) *Sei $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, $g\,|\,(c,d)$ differenzierbar, und $(\forall x \in Z)\ \ g'(x) \neq 0$. Dann*

$$(\exists\, \xi \in Z) \quad (R_a^p f)(z) = \frac{g(z) - g(a)}{g'(\xi)}\,(z - \xi)^p\,\frac{f^{(p+1)}(\xi)}{p!}\,.$$

2. (Restglied von Cauchy)

$$(\exists\, \xi \in Z) \quad (R_a^p f)(z) = (z - a)(z - \xi)^p\,\frac{f^{(p+1)}(\xi)}{p!}\,.$$

3. (Restglied von Lagrange)

$$(\exists\, \xi \in Z) \quad (R_a^p f)(z) = (z - a)^{p+1}\,\frac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}\,.$$

Beweis. 1. Sei $\Phi\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(x) = \sum_{j=0}^{p} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(z-x)^j \,.$$

Dann ist Φ stetig, $\Phi(z) = f(z)$, $\Phi(a) = (T_a^p f)(z)$, Φ ist differenzierbar in (c,d), und es ist

$$\begin{aligned} \Phi'(x) \;&=\; \sum_{j=0}^{p} \Big\{ \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(z-x)^j \;-\; \frac{f^{(j)}(x)}{j!}\, j(z-x)^{j-1} \Big\} \\ &=\; \sum_{j=1}^{p+1} \frac{f^{(j)}(x)}{(j-1)!}(z-x)^{j-1} \;-\; \sum_{j=1}^{p} \frac{f^{(j)}(x)}{(j-1)!}\,(z-x)^{j-1} \;=\; \frac{f^{(p+1)}(x)}{p!}\,(z-x)^p \,. \end{aligned}$$

Für alle $x \in (c,d)$ ist $g'(x) \ne 0$, und daher ist $g(z) \ne g(a)$ nach Satz 7.18. Sei nun

$$F\colon [c,d] \to \mathbb{R} \quad \text{definiert durch} \quad F(x) \;=\; \Phi(x) \;-\; \frac{\Phi(z)-\Phi(a)}{g(z)-g(a)}\, g(x) \,.$$

Dann ist F stetig, $F(z) = F(a)$, F ist differenzierbar in (c,d), also insbesondere in Z, und nach Satz 7.18 gibt es ein $\xi \in Z$ mit

$$0 \;=\; F'(\xi) \;=\; \Phi'(\xi) \;-\; \frac{\Phi(z)-\Phi(a)}{g(z)-g(a)}\, g'(\xi) \,.$$

Damit folgt

$$(R_a^p f)(z) \;=\; \Phi(z)-\Phi(a) \;=\; \frac{g(z)-g(a)}{g'(\xi)}\,\Phi'(\xi) \;=\; \frac{g(z)-g(a)}{g'(\xi)}\,\frac{f^{(p+1)}(\xi)}{p!}\,(z-\xi)^p \,.$$

2. Nach 1. mit $g(x) = x$.
3. Nach 1. mit $g(x) = (z-x)^{p+1}$. □

Satz 7.21 (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)**.** *Seien* $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f,\, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *seien stetig,* $f\,|\,(a,b)$, $g\,|\,(a,b)$ *seien differenzierbar, und* $(\forall x \in (a,b)\,)\;\; g'(x) \ne 0$. *Dann*

$$(\exists\, \xi \in (a,b)\,)\;\; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad \textit{und} \qquad (\exists\, \xi \in (a,b)\,)\;\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)\,.$$

Beweis. 1. Nach Satz 7.20 mit $p = 0$, $a = c$ und $z = b = d$ ist

$$f(b)-f(a) \;=\; (R_a^0 f)(b) \;=\; \frac{g(b)-g(a)}{g'(\xi)}\, f'(\xi)\,,$$

und daraus folgt die Behauptung.
2. Nach 1. mit $g(x) = x$. □

Satz 7.22. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall,* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig,* $a \in I$, f *sei differenzierbar in* $I \setminus \{a\}$, *und es existiere*

$$c = \lim_{x \to a} f'(x) \;\in \mathbb{R}\,.$$

Dann ist f differenzierbar in a, *und* $f'(a) = c$.

Beweis. Wir müssen zeigen: Für jede Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ in $I\setminus\{a\}$ mit $(x_n)_{n\geq 0}\to a$ ist

$$\Big(\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\Big)_{n\geq 0} \;\to\; c\,.$$

Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $I\setminus\{a\}$ mit $(x_n)_{n\geq 0}\to a$. Für $n\in\mathbb{N}_0$ betrachten wir $f\,|\,[a,x_n]$, falls $x_n>a$, und $f\,|\,[x_n,a]$, falls $x_n<a$. Nach Satz 7.21 gibt es ein z_n (echt) zwischen x_n und a, so dass

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}=f'(z_n)\,.$$

Nach Satz 3.7 ist $(z_n)_{n\geq 0}\to a$ und daher

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}=\lim_{n\to\infty}f'(z_n=c\,.$$ □

Satz 7.23 (Hinreichende Kriterien für lokale Extrema)**.** *Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, $a\in I^\circ$ und $f\colon I\to\mathbb{R}$.*

1. *Sei f stetig, $f\,|\,I\setminus\{a\}$ differenzierbar, $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ mit $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset I$ und*
$$(\forall x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\setminus\{a\})\quad f'(x)(x-a)>0\quad[<0\,]\,.$$
Dann ist
$$(\forall z\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\setminus\{a\})\quad f(z)>f(a)\quad[\,f(z)<f(a)\,]\,.$$
Insbesondere hat f in a ein strenges lokales Minimum [Maximum].
2. *Sei $p\in\mathbb{N}$, f p-mal differenzierbar, $(\forall j\in\{1,\dots,p-1\})$ $f^{(j)}(a)=0$ und $f^{(p)}(a)\neq 0$.*
   (a) *Ist p ungerade, so hat f in a kein lokales Extremum.*
   (b) *Ist p gerade und $f^{(p)}(a)>0$ $[\,f^{(p)}(a)<0\,]$, so hat f in a ein strenges lokales Minimum [Maximum].*

Beweis. 1. Sei $z\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\setminus\{a\}$. Nach Satz 7.21 gibt es ein x zwischen a und z, so dass

$$f(z)-f(a)=f'(x)(z-a)=f'(x)(x-a)\frac{z-a}{x-a}\,,\quad\text{also}\quad f(z)>f(a)\quad[\,f(z)<f(a)\,]\,.$$

2. Im Falle $p=1$ folgt die Aussage aus Satz 7.17. Sei also $p\geq 2$ und sei $f^{(p)}(a)<0$ (im Falle $f^{(p)}(a)>0$ betrachten wir $-f$ an Stelle von f). Wegen

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(p-1)}(x)}{x-a}\;=\;\lim_{x\to a}\frac{f^{(p-1)}(x)-f^{(p-1)}(a)}{x-a}\;=\;f^{(p)}(a)<0$$

gibt es ein $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$, so dass $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset I$ und

$$(\forall\,x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\setminus\{a\})\quad\frac{f^{(p-1)}(x)}{x-a}<0\,.$$

Sei nun $z\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\setminus\{a\}$. Nach Satz 7.20 gibt es ein ξ zwischen z und a, so dass

$$\begin{aligned}f(z)&=(T_a^{p-2}f)(z)+(R_a^{p-2}f)(z)=f(a)+\frac{(z-a)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(\xi)\\&=\;f(a)+(z-a)^p\,\frac{\xi-a}{z-a}\,\frac{f^{(p-1)}(\xi)}{\xi-a}\,\frac{1}{(p-1)!}\,,\end{aligned}$$

und es ist
$$\frac{\xi-a}{z-a}\,\frac{f^{(p-1)}(\xi)}{\xi-a} \;<\; 0\,.$$
Ist p ungerade, so folgt $f(z) > f(a)$, falls $z < a$, und $f(z) < f(a)$, falls $z > a$, also hat in diesem Falle f in a kein lokales Extremum. Ist p gerade, so folgt $f(z) < f(a)$, und daher hat in diesem Falle f in a ein strenges lokales Maximum. □

Satz 7.24 (Regel von de l'Hospital)**.** *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $a \in \overline{\mathbb{R}}$*, seien* $f,\, g\colon I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $I \setminus \{a\}$*, und* $(\forall x \in I \setminus \{a\})\quad g(x)g'(x) \neq 0$*. Sei*
$$\textit{entweder}\qquad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \textit{oder} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty\,.$$
Dann gilt ür $c \in \overline{\mathbb{R}}$*:*
$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = c \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = c\,.$$

Beweis. Wir zeigen
$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)} = c \qquad \Big[\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = c \quad \text{zeigt man in gleicher Weise}\Big]\,.$$
Im Falle $a = \inf(I)$ ist nichts zu zeigen. Ist $a \in I^\circ$ und $b \in I \cap (-\infty, a)$, so ist
$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\to a-}\frac{\big(f\,|\,[b,a)\big)(x)}{\big(g\,|\,[b,a)\big)(x)}\,,$$
Daher können wir ohne Einschränkung $I = [b, a)$ mit $b \in (-\infty, a)$ annehmen. Ferner sei ohne Einschränkung $c \neq -\infty$ [sonst betrachten wir $-f$ an Stelle von f]. Sei nun $(x_n)_{n\ge0}$ eine Folge in (b, a) mit $(x_n)_{n\ge0} \to a$. Wir müssen zeigen:
$$\Big(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\Big)_{n\ge0} \;\to\; c\,.$$

FALL 1: $a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Seien $\widetilde{f},\, \widetilde{g}\colon [b, a] \to \mathbb{R}$ definiert durch $\widetilde{f}\,|\,[b, a) = f$, $\widetilde{g}\,|\,[b, a) = g$, und $\widetilde{f}(a) = \widetilde{g}(a) = 0$. Dann sind $\widetilde{f}$ und $\widetilde{g}$ stetig auf $[b, a]$, differenzierbar auf (b, a), und $(\forall x \in (b, a)\,)\;\; g'(x) \neq 0$. Nach Satz 7.21 folgt
$$(\forall n \ge 0)\ (\exists \xi_n \in (x_n, a)\,)\ \ \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \;=\; \frac{\widetilde{f}(x_n) - \widetilde{f}(a)}{\widetilde{g}(x_n) - \widetilde{g}(a)} \;=\; \frac{\widetilde{f}'(\xi_n)}{\widetilde{g}'(\xi_n)} \;=\; \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}\,.$$
Aus $(x_n)_{n\ge0} \to a$ folgt $(\xi_n)_{n\ge0} \to a$ und daher
$$\Big(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\Big)_{n\ge0} \;=\; \Big(\frac{f(\xi_n)}{g(\xi_n)}\Big)_{n\ge0} \;\to\; c\,.$$

FALL 2: $a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Wir zeigen:
$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \ge 0)\ (\forall n \ge n_0)\quad \Big[\ \Big|\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - c\Big| < \varepsilon\,,\ \ \text{falls}\ \ c \in \mathbb{R}\,,$$
$$\text{und}\quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} > \varepsilon\,,\ \ \text{falls}\ \ c = \infty\ \Big]\,.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach Satz 4.7 gibt es ein $z \in (b,a)$, so dass

$$\big(\forall y \in [z,a)\big) \quad \left[\ \left|\frac{f'(y)}{g'(y)} - c\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{falls} \quad c \in \mathbb{R}\,, \quad \text{und} \quad \frac{f'(y)}{g'(y)} > 2\varepsilon\,, \quad \text{falls} \quad c = \infty\ \right].$$

Wegen $(x_n)_{n\geq 0} \to a$ gibt es ein $n_1 \geq 0$, so dass $(\forall n \geq n_1)\ x_n \in (z,a)$. Sei nun $n \geq n_1$. Nach Satz 7.21 gibt es ein $\xi_n \in (z, x_n)$, so dass

$$\frac{f(x_n)-f(z)}{g(x_n)-g(z)} \;=\; \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}\,, \quad \text{und daher} \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \;=\; \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}\left[1-\frac{g(z)}{g(x_n)}\right]+\frac{f(z)}{g(x_n)}\,.$$

FALL 2a: $c \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - c\right| \;\leq\; \left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}\right| + \left|\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} - c\right| \;<\; \left|\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}\right|\left|\frac{g(z)}{g(x_n)}\right| + \left|\frac{f(z)}{g(x_n)}\right| + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Nun ist

$$\left(\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}\right)_{n\geq n_1} \ \text{beschränkt}\,, \quad \left(\frac{g(z)}{g(x_n)}\right)_{n\geq n_1} \to\ 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{f(z)}{g(x_n)}\right)_{n\geq n_1} \to\ 0\,.$$

Daher gibt es ein $n_0 \geq n_1$, so dass

$$(\forall n \geq n_0) \quad \left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - c\right| \;<\; \varepsilon\,.$$

FALL 2b: $c = \infty$. Es folgt

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \;\geq\; \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}\left[1-\frac{g(z)}{g(x_n)}\right] \;-\; \left|\frac{f(z)}{g(x_n)}\right| \;>\; 2\varepsilon\left[1-\frac{g(z)}{g(x_n)}\right] \;-\; \left|\frac{f(z)}{g(x_n)}\right|.$$

Wegen $\left(\frac{g(z)}{g(x_n)}\right)_{n\geq n_1} \to 0$ und $\left(\frac{f(z)}{g(x_n)}\right)_{n\geq n_1} \to 0$ gibt es ein $n_0 \geq n_1$, so dass

$$(\forall n \geq n_0) \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \;>\; \varepsilon\,.$$

FALL 3: $a = \infty$. Wir können ohne Einschränkung $b > 0$ annehmen und definieren

$$J = \Big(-\frac{1}{b}, 0\Big) \quad \text{und} \quad F, G\colon J \to \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad F(x) = f\Big(-\frac{1}{x}\Big) \quad \text{und} \quad G(x) = g\Big(-\frac{1}{x}\Big)\,.$$

Dann sind F und G differenzierbar,

$$(\forall x \in J) \quad G(x)G'(x) = g\Big(-\frac{1}{x}\Big)\,\frac{1}{x^2}\,g'\Big(-\frac{1}{x}\Big) \;\neq\; 0\,,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; \lim_{z\to 0} F(z)\,, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) \;=\; \lim_{z\to 0} G(z)\,, \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \;=\; \lim_{z\to 0}\frac{F'(z)}{G'(z)}\,.$$

Mit FALL 1 und FALL 2 folgt die Behauptung. □

Beispiele:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1+x^2}} = 1\,, \quad \text{und} \quad (\forall\,\alpha,\,\beta \in \mathbb{R}_{>0}) \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = \infty\,.$$

7.4. Monotonie und Konvexität

Satz 7.25. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und $f\,|\,I^\circ$ differenzierbar.*

1. $(\forall x \in I^\circ)\;\; f'(x) > 0 \;\; [\, f'(x) < 0\,] \implies f$ *ist streng monoton wachsend* [*fallend*].
2. $\bigl(\forall x \in \mathring{I}\bigr)\; f'(x) \ge 0 \; [\, f'(x) \le 0\,] \iff f$ *ist monoton wachsend* [*fallend*].

Beweis. Wir zeigen die Aussagen für "monoton wachsend" (die entsprechenden Aussagen für "monoton fallend" folgen durch Betrachtung von $-f$).

Sei zuerst $(\forall x \in I^\circ)\;\; f'(x) > 0 \;\; [\, f'(x) \ge 0\,]$, und seien $a,\, b \in I$ mit $a < b$. Dann ist $f \,|\, [a,b]$ stetig und $f \,|\, (a,b)$ differenzierbar. Nach Satz 7.21 gibt es ein $x \in (a,b) \subset I^\circ$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(x)\,, \quad \text{und daher} \quad f(b) > f(a) \quad [\, f(b) \ge f(a)\,].$$

Sei nun f monoton wachsend und $x \in I^\circ$. Für $h \in \mathbb{R}^\times$ mit $x+h \in I$ ist dann

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ge 0\,, \quad \text{und daher} \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge 0\,. \qquad \square$$

Definition 7.8. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* oder *nach oben gekrümmt*, wenn

$$(\forall a,\, b,\, x \in I)\;\; \Bigl[a < x < b \implies f(x) \;\le\; \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \Bigr]\,.$$

f heißt *konkav* oder *nach unten gekrümmt*, wenn $-f$ konvex ist.

Satz 7.26. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f\colon I \to \mathbb{R}$.

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent*:
   (a) f *ist konvex.*
   (b) *Für alle* $a,\, b,\, x \in I$ *mit* $a < x < b$ *ist*
   $$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \le \frac{f(b) - f(x)}{b-x}\,.$$
   (c) (Jensen'sche Ungleichung) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in I$ *und* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ *mit* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ *ist*
   $$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)\,.$$
   (d) *Die Menge* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\,,\; y \ge f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$ *ist konvex.*
2. *Sei* f *stetig und* $f \,|\, I^\circ$ *differenzierbar. Dann sind äquivalent*:
   (a) f *ist konvex.*
   (b) $(f \,|\, I^\circ)'$ *ist monoton wachsend.*
   (c) $(\forall x \in I^\circ)\; (\forall z \in I)\;\; f(z) \ge f(x) + (z-x) f'(x)$.

Beweis. 1. (a) $\Rightarrow$ (b) Seien $a,\, b,\, x \in I$ mit $a < x < b$. Dann folgt

$$(b-x)f(x) + (x-a)f(x) \;=\; (b-a)f(x) \;\le\; (b-x)f(a) + (x-a)f(b)$$

also

$$(b-x)\bigl[f(x) - f(a)\bigr] \;\le\; (x-a)\bigl[f(b) - f(x)\bigr]\,, \quad \text{und damit (b)}\,.$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Sind $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, so folgt

$$\min(x_1, \ldots, x_n) \le \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \le \max(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad \text{also} \quad \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in I\,.$$

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.

$n=2$: Seien x_1, $x_2 \in I$ und λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\lambda_1+\lambda_2=1$. Ist $x_1=x_2$ oder $\lambda_1=0$ oder $\lambda_2=0$, so ist die Behauptung trivial. Sei also $x_1<x_2$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ und $x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$. Dann ist $x_1<x<x_2$, $x-x_1=\lambda_2(x_2-x_1)$ und $x_2-x=\lambda_1(x_2-x_1)$. Mit $a=x_1$ und $b=x_2$ folgt aus (b)

$$\big[f(x)-f(x_1)\big]\lambda_1(x_2-x_1) \leq \big[f(x_2)-f(x)\big]\lambda_2(x_2-x_1) \quad \text{und daher} \quad f(x)\leq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)\,.$$

$n\geq 1$, $n\to n+1$: Seien $x_1,\ldots,x_{n+1}\in I$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}=1$, und sei $\lambda=\lambda_1+\ldots+\lambda_n$. Im Falle $\lambda=0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\lambda\neq 0$. Dann ist $x=\lambda^{-1}\lambda_1x_1+\ldots+\lambda^{-1}\lambda_nx_n\in I$, und nach Induktionsvoraussetzung und dem bereits Gezeigten folgt

$$\begin{aligned}f(\lambda_1x_1+&\ldots+\lambda_nx_n+\lambda_{n+1}x_{n+1})=f(\lambda x+\lambda_{n+1}x_{n+1})\leq\lambda f(x)+\lambda_{n+1}f(x_{n+1})\\&\leq\lambda\big[\lambda^{-1}\lambda_1f(x_1)+\ldots+\lambda^{-1}\lambda_nf(x_n)\big]+\lambda_{n+1}x_{n+1})=\lambda_1f(x_1)+\ldots+\lambda_{n+1}f(x_{n+1})\,.\end{aligned}$$

(c) $\Rightarrow$ (d) Seien $\boldsymbol{z}_1=(x_1,y_1)$, $\boldsymbol{z}_2=(x_2,y_2)\in D$ und $\boldsymbol{z}=(x,y)\in[\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2]$. Dann gibt es ein $\lambda\in[0,1]$ mit $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_1+\lambda(\boldsymbol{z}_2-\boldsymbol{z}_1$, also $x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$ und $y=(1-\lambda)y_1+\lambda y_2$. Daher folgt $f(x)\leq(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)\leq(1-\lambda)y_1+\lambda y_2=y$, also $\boldsymbol{z}\in D$.

(d) $\Rightarrow$ (a) Seien a, b, $x\in I$ und $a<x<b$. Dann ist

$$\Big(x,\,\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\Big)\in\big[(a,f(a)),\,(b,f(b)\big]\quad\text{und daher}\quad\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\geq f(x)\,.$$

2. (a) $\Rightarrow$ (b) Seien a, $b\in I^\circ$. Für $a<x<b$ ist nach 1.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\,,$$

also

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq\lim_{x\to a+}\frac{f(b)-f(x)}{b-x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,,\\f'(b)&=\lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\geq\lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,,\end{aligned}$$

und daher folgt $f'(a)\leq f'(b)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sei $x\in I^\circ$, $z\in I$ und $z\neq x$. Nach Satz 7.21 gibt es ein ξ zwischen x und z mit $f(z)-f(x)=(z-x)f'(\xi)$. Im Falle $z>x$ ist $f'(\xi)\geq f'(x)$, und im Falle $z<x$ ist $f'(\xi)\leq f'(x)$. In jedem Falle ist $(z-x)f'(\xi)\geq(z-x)f'(x)$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Seien a, b, $x\in I$ und $a<x<b$. Dann ist $f(a)\geq f(x)+(a-x)f'(x)$ und $f(b)\geq f(x)+(b-x)f'(x)$, also

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x}\leq f'(x)\leq\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

und daher f konvex nach 1.(b). □

Satz 7.27. *Sei $n\in\mathbb{N}$.*

1. (Gewichtete Mittelungleichung). *Seien $x_1,\ldots,x_n$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}_{>0}$, $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1$. Dann ist*

$$x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}\leq\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n\,.$$

2. *Sei* $p \in \mathbb{R}_{>1}$. *Für* $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ *sei*

$$\|\boldsymbol{a}\|_p = \Big(\sum_{\nu=1}^n |a_\nu|^p\Big)^{1/p}.$$

Dann gilt für alle $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{\nu=1}^n |a_\nu b_\nu| \le \|\boldsymbol{a}\|_p \|\boldsymbol{b}\|_q \quad \textit{mit} \quad q = \frac{p}{p-1} \qquad \text{(Hölder'sche Ungleichung)}$$

und

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|_p \le \|\boldsymbol{a}\|_p + \|\boldsymbol{b}\|_p \qquad \text{(Minkowski'sche Ungleichung).}$$

Die gewichtete Mittelungleichung reduziert sich im Falle $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ auf die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel (Satz 1.13). Für $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ ist $\|\boldsymbol{a}\|_2$ die euklidische Norm. Aus der Hölder'schen Ungleichung für $p = 2$ folgt die Schwarz'sche Ungleichung (Satz 2.9), und aus der Minkowski'schen Ungleichung für $p = 2$ folgt die Dreiecksungleichung für die euklidische Norm. Trivialerweise gilt die Minkowski'sche Ungleichung auch für $p = 1$.

Beweis. 1. Wir betrachten die Funktion $f = -\log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $f'(x) = -x^{-1}$ und $f''(x) = x^{-2} > 0$. Nach Satz 7.25 ist f' monoton wachsend, und nach Satz 7.26 folgt

$$-\log(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \le -\lambda_1 \log x_1 - \ldots - \lambda_n x_n\,,$$

also

$$x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} = \mathsf{e}^{\lambda_1 \log x_1 + \ldots + \lambda_n x_n} \le \mathsf{e}^{\log(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)} = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\,.$$

2. Wir können $\boldsymbol{a} \ne \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{b} \ne \boldsymbol{0}$ annehmen. Nach 1. gilt dann für alle $\nu \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{|a_\nu b_\nu|}{\|\boldsymbol{a}\|_p \, \|\boldsymbol{b}\|_q} = \Big(\frac{|a_\nu|^p}{\|\boldsymbol{a}\|_p^p}\Big)^{1/p} \Big(\frac{|b_\nu|^q}{\|\boldsymbol{b}\|_q^q}\Big)^{1/q} \le \frac{1}{p}\frac{|a_\nu|^p}{\|\boldsymbol{a}\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|b_\nu|^q}{\|\boldsymbol{b}\|_p^q}\,.$$

Durch Summation dieser Ungleichungen folgt

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|_p \, \|\boldsymbol{b}\|_q} \sum_{\nu=1}^n |a_\nu b_\nu| \le \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^n \frac{|a_\nu|^p}{\|\boldsymbol{a}\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{\nu=1}^n \frac{|b_\nu|^q}{\|\boldsymbol{b}\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und damit die Hölder'sche Ungleichung.

Für den Beweis der Minkowski'schen Ungleichung setzen wir $s_\nu = |a_\nu + b_\nu|^{p-1}$ und erhalten $|a_\nu + b_\nu|^p \le \big(|a_\nu| + |b_\nu|\big)\, |a_\nu + b_\nu|^{p-1} = |a_\nu| s_\nu + |b_\nu| s_\nu$, also mit $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ auf Grund der Hölder'schen Ungleichung

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|_p^p = \sum_{\nu=1}^n |a_\nu + b_\nu|^p \le \sum_{\nu=1}^n |a_\nu| s_\nu + \sum_{\nu=1}^n |b_\nu| s_\nu \le \|\boldsymbol{a}\|_p \, \|\boldsymbol{s}\|_q + \|\boldsymbol{b}\|_p \, \|\boldsymbol{s}\|_q\,.$$

Wegen

$$\|\boldsymbol{s}\|_q = \Big(\sum_{\nu=1}^n |s_\nu|^q\Big)^{1/q} = \Big(\sum_{\nu=1}^n |a_\nu + b_\nu|^p\Big)^{1/q} = \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|_p^{p/q} = \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|_p^{p-1}$$

folgt

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|_p^p \le \|\boldsymbol{a}\|_p \, \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|_p^{p-1} + \|\boldsymbol{b}\|_p \, \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|_p^{p-1} = \big(\|\boldsymbol{a}\|_p + \|\boldsymbol{b}\|_p\big) \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|_p^{p-1}\,,$$

und die Minkowski'sche Ungleichung folgt nach Division durch $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|_p^{p-1}$. $\square$

Definition 7.9. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $a \in I^\circ$. a heißt *Wendepunkt* von f, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} &\textit{entweder } f \text{ konvex in } (a-\varepsilon, a], \text{ konkav in } [a, a+\varepsilon),\\ &\textit{oder } f \text{ konkav in } (a-\varepsilon, a], \text{ konvex in } [a, a+\varepsilon). \end{aligned}$$

Satz 7.28. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I^\circ$, und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar.*

1. *Ist a ein Wendepunkt von f, so ist $f''(a) = 0$.*
2. *Ist f'' differenzierbar in a, $f''(a) = 0$ und $(f'')'(a) \neq 0$, so ist a ein Wendepunkt von f.*

Beweis. 1. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, f konvex in $(a-\varepsilon, a]$ und konkav in $[a, a+\varepsilon)$ [im anderen Falle betrachte man $-f$ an Stelle von f]. Nach Satz 7.26 ist dann f' monoton wachsend in $(a-\varepsilon, a)$ und monoton fallend in $(a, a+\varepsilon)$. Ist $z \in (a-\varepsilon, a)$, so folgt $\big(\forall x \in (z, a)\big)\ f'(z) \leq f'(x)$, und daher auch $f'(z) \leq \lim_{x\to a-} f'(x) = f'(a)$. Ist $z \in (a, a+\varepsilon)$, so folgt in gleicher Weise $f'(z) \leq f'(a)$, und daher hat f' in a ein lokales Maximum. Nach Satz 7.17 folgt $f''(a) = 0$.

2. Sei $f''(a) = 0$ und ohne Einschränkung

$$(f'')'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f''(x) - f''(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{x-a} > 0\,.$$

Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset I$ und

$$(\forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\})\ \frac{f''(x)}{x-a} > 0\,.$$

Daher ist $(\forall x \in (a-\varepsilon, a)\ \ f''(x) < 0$ und $(\forall x \in (a, a+\varepsilon, a)\ \ f''(x) > 0$. Nach Satz 7.25 ist $f' \,|\, (a-\varepsilon, a]$ monoton fallend und $f' \,|\, [a, a+\varepsilon)$ monoton wachsend. Nach Satz 7.26 ist $f \,|\, (a-\varepsilon, a]$ konkav und $f \,|\, [a, a+\varepsilon)$ konvex, also a ein Wendepunkt von f. □

7.5 Die Winkelfunktionen und ihre Umkehrungen

Satz und Definition 7.29.

1. *Es ist*

$$\cos x \begin{cases} > 0\,, & \textit{falls} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ < 0\,, & \textit{falls} \quad x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} \qquad \textit{und} \qquad \sin x \begin{cases} > 0\,, & \textit{falls} \quad x \in (0, \pi)\,, \\ < 0\,, & \textit{falls} \quad x \in (-\pi, 0)\,. \end{cases}$$

2. $\cos([0,\pi]) = \cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, $\cos \,|\, [-\pi, 0]$ *ist streng monoton wachsend,* $\cos \,|\, [0, \pi]$ *ist streng monoton fallend,* $\cos \,|\, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *ist konkav,* $\cos \,|\, [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ *und* $\cos \,|\, [\frac{\pi}{2}, \pi]$ *sind konvex.*

   Die Funktion $\arccos = (\cos \,|\, [0, \pi])^{-1}\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ heißt *Arcuscosinus-Funktion.*

3. $\sin\big(\big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]\big) = \sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, $\sin \,|\, [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ *und* $\sin \,|\, [\frac{\pi}{2}, \pi]$ *sind streng monoton fallend,* $\sin \,|\, \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$ *ist streng monoton wachsend,* $\sin \,|\, [-\pi, 0]$ *ist konvex, und* $\sin \,|\, [0, \pi]$ *ist konkav.*

   Die Funktion $\arcsin = \big(\sin \,|\, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\big)^{-1}\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ heißt *Arcussinus-Funktion.*

4. $\arccos\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton fallend,* $\arcsin\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend,* $\arccos\big([-1,1]\big) = [0,\pi]$, $\arcsin([-1,1]) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *und*
$$(\forall y \in [-1,1]) \quad \arcsin(y) + \arccos(y) = \frac{\pi}{2}\,.$$

5. $\arcsin \mid (-1,1)$ *und* $\arccos \mid (-1,1)$ *sind analytisch,*
$$(\forall y \in (-1,1)\,)\quad \arcsin(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(2n+1)}\binom{2n}{n} y^{2n+1} \quad\wedge\quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

Beweis. 1. Nach Satz 6.5, Satz 6.4 und Satz 6.6 .

2. und 3. Nach 1., Satz 6.6, Satz 7.25 und Satz 7.26.

4. Die Monotonieaussagen folgen aus Satz 1.2. Nach Definitition ist $\arccos([-1,1]) = [0,\pi]$ und $\arcsin([-1,1]) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Für $y \in [-1,1]$ ist (nach Definition und Satz 6.6)
$$\frac{\pi}{2} - \arcsin y \in [0,\pi] \quad\text{und}\quad \cos\Big(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\Big) = \cos\Big(\arcsin y - \frac{\pi}{2}\Big) = \sin(\arcsin y) = y\,,$$
also
$$\arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin y\,.$$

5. Für $x \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ ist $\sin'(x) = \cos x > 0$, also arcsin differenzierbar in $y = \sin x$ nach Satz 7.6, und wegen $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2}$ folgt
$$\arcsin'(y) \;=\; \frac{1}{\sin'(x)} \;=\; \frac{1}{\cos x} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$
Nach Satz 7.12 gilt für $y \in (-1,1)$
$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac12}{n}(-y^2)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}y^{2n}\,,$$
da
$$\binom{-\frac12}{n} = \frac{-\frac12\big(-\frac32\big)\cdot\ldots\cdot\big(-\frac12-n+1\big)}{n!} \;=\; \frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^n\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)\,n!} \;=\; \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$
Nun folgt die Behauptung aus Satz 7.10. □

Satz und Definition 7.30.

1. $\big(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\big(-\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\big)\,\big)$ $\tan(-x) = \tan x\,,\quad \tan(x+\pi) = \tan x\,,$
$$\tan x < 0\,,\ \ \textit{falls}\ \ x \in \Big(-\frac{\pi}{2}, 0\Big)\,, \quad \textit{und} \quad \tan x > 0\,,\ \ \textit{falls}\ \ x \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big)\,.$$

2. $\tan \mid \big(-\frac{\pi}{2}, 0\big)$ *ist konkav,* $\tan \mid \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ *ist konvex,*
$$\tan \mid \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \quad \textit{ist streng monoton wachsend, und} \quad \tan\Big(\Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \mathbb{R}\,.$$

Die Funktion $\arctan = \big(\tan \mid \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)\big)^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Arcustangensfunktion.*

3. $\arctan\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend und analytisch,* $\arctan(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

$$(\forall y\in\mathbb{R})\quad \arctan'(y) = \frac{1}{y^2+1} \quad\wedge\quad \arctan(y) = \frac{1}{2i}\big[\operatorname{Log}(y-i) - \operatorname{Log}(y+i)\big] + \frac{\pi}{2}\,,$$

$$(\forall y\in(-1,1)\,)\quad \arctan y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}y^{2n+1}\,,\quad \textit{und}\quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,.$$

Proof. 1. Nach Satz 7.29.

2. Für $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ist $\tan'(x) = 1+\tan^2(x) > 0$ und $\tan''(x) = (2\tan x)(1+\tan^2 x)$. Daher folgen die Behauptungen bezüglich Monotonie und Konvexität aus 1., Satz 7.25 und Satz 7.26. Wegen

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}\tan x = -\infty \quad\text{und}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x = \infty \quad\text{folgt}\quad \tan\Big(\big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big)\Big) = \mathbb{R}\,.$$

3. Nach Satz 1.2 ist $\arctan$ streng monoton wachsend, und es ist $\arctan(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Nach Satz 7.6 ist $\arctan$ differenzierbar in allen Punkten $y = \tan x\in\mathbb{R}$ (mit $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$), und es ist

$$\arctan'(y) \;=\; \frac{1}{\tan' x} \;=\; \frac{1}{1+\tan^2 x} \;=\; \frac{1}{1+y^2}\,.$$

Für $y\in(-1,1)$ ist

$$\frac{1}{1+y^2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-y^2)^n\,,\quad\text{also}\quad \arctan y \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}y^{2n+1}$$

nach Satz 7.10. Die Formel für $\frac{\pi}{4}$ folgt aus Satz 5.12. Sei nun $A\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$A(y) \;=\; \frac{1}{2i}\big[\operatorname{Log}(y-i) - \operatorname{Log}(y+i)\big] + \frac{\pi}{2}\,.$$

Dann ist A differenzierbar,

$$A'(y) = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{y-i} - \frac{1}{y+i}\Big) = \frac{1}{y^2+1} \quad\text{und}\quad A(0) = \frac{1}{2i}\Big(-\frac{i\pi}{2} - \frac{i\pi}{2}\Big) + \frac{\pi}{2} = 0 = \arctan(0)\,.$$

Nach Satz 7.9 folgt $A = \arctan$. □

8. Elementare Integralrechnung

8.1. Regelfunktionen und das Cauchy-Integral

Definition 8.1. Sei X ein normierter Raum.

1. Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f\colon [a,\, b] \to X$ heisst *Treppenfunktion*, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ und Zahlen $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$ gibt, so dass
$$(\forall j \in \{1, \ldots, m\}) \quad f \,|\, (a_{j-1}, a_j) \quad \text{ist konstant}\,.$$
2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to X$ heißt *Regelfunktion*, wenn für alle $z \in I$ die Grenzwerte
$$\lim_{x \to z-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to z+} f(x) \quad (\text{in } X) \quad \text{existieren.}$$
Ist $z = \min(I)$, so ist $\lim_{x \to z-} = c$ für alle $c \in X$ (da es keine gegen z konvergierende Folge in $I \cap (-\infty,\, z)$ gibt), und daher ist die erste Bedingung stets erfüllt. Ebenso ist für $z = \max(I)$ die zweite Bedingung stets erfüllt.

Bemerkungen: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und X ein normierter Raum.

1. Sind $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so ist jede Treppenfunktion $f\colon [a, b] \to X$ eine Regelfunktion.
2. Ist $f\colon I \to X$ eine Regelfunktion, und $J \subset I$ ein Teilintervall, so ist auch $f \,|\, J$ eine Regelfunktion.
3. Jede stetig Funktion $f\colon I \to X$ ist eine Regelfunktion.
4. Sind $f,\, g\colon I \to X$ Regelfunktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch die Funktionen $\lambda f\colon I \to X$, $\|f\|\colon I \to \mathbb{R}$ und $f + g\colon I \to X$ Regelfunktionen. Ist X eine normierte Algebra, so ist auch $fg\colon I \to X$ eine Regelfunktion.
5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt:
$$f \ \text{ ist Regelfunktion} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \ \ f_i \ \text{ ist Regelfunktion}\,.$$
6. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$ ist genau dann eine Regelfunktion, wenn $\Re f\colon I \to \mathbb{R}$ und $\Im f\colon I \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen sind.
7. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ monoton und beschränkt. Dann ist f eine Regelfunktion (nach Satz 4.8).

Satz 8.1 (Kennzeichnungssatz für Regelfunktionen)**.** *Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, X ein Banachraum und $f\colon [a, b] \to X$.*

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent*:
   (a) f *ist eine Regelfunktion.*
   (b) *Es gibt eine Folge von Treppenfunktionen* $(f_n\colon [a, b] \to X)_{n \ge 1}$ *mit* $(f_n)_{n \ge 1} \rightrightarrows f$.
   (c) *Es gibt eine Folge von Regelfunktionen* $(f_n\colon [a, b] \to X)_{n \ge 1}$ *mit* $(f_n)_{n \ge 1} \rightrightarrows f$.
2. *Ist f eine Regelfunktion, so ist f beschränkt.*

Beweis. 1. (a) $\Rightarrow$ (b) Es genügt, zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es eine Treppenfunktion $h\colon [a, b] \to X$ mit $\|f - h\|_{[a,b]} \le \varepsilon$ [denn dann gibt es eine Folge von Treppenfunktionen $(h_n\colon [a, b] \to X)_{n \ge 1}$, so dass
$$(\forall n \ge 1) \quad \|f - h_n\|_{[a,b]} < \frac{1}{n}\,, \quad \text{und dann ist} \quad (h_n)_{n \ge 1} \rightrightarrows f\,\Big]\,.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Für $z \in [a,b]$ seien $f_-(z),\ f_+(z) \in X$ mit

$$f_-(z) \;=\; \lim_{x\to z-} f(x) \quad \text{und} \quad f_+(z) \;=\; \lim_{x\to z+} f(x)\,.$$

Nach Satz 4.1 gibt es zu jedem $z \in [a,b]$ ein $\delta_z \in \mathbb{R}_{>0}$ so dass

$$(\forall x\in(z-\delta_z,z)\cap[a,b])\ \ \|f(x)-f_-(z)\| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \wedge\ \ (\forall x\in(z,z+\delta_z)\cap[a,b])\ \ \|f(x)-f_+(z)\| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dann ist $\mathfrak{U} = \{(z-\delta_z, z+\delta_z) \mid z \in [a,b]\}$ eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[a,b]$ und besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Seien $z_1,\dots,z_k \in [a,b]$, so dass

$$[a,b] \subset \bigcup_{\nu=1}^{k} (z_\nu - \delta_{z_\nu}, z_\nu + \delta_{z_\nu})\,,$$

und sei

$$[a,b] \cap \bigl\{a,\ b,\ z_\nu,\ z_\nu-\delta_{z_\nu},\ z_\nu+\delta_{z_\nu} \mid \nu \in \{1,\dots,k\}\bigr\} \;=\; \{x_0,\dots,x_N\}$$

mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Für $j \in \{1,\dots,N\}$ sei $y_j \in (x_{j-1},x_j)$, und sei $h\colon [a,b] \to X$ definiert durch

$$h(x_j) = f(x_j)\,, \quad \text{und} \quad h(x) = f(y_j)\,, \quad \text{falls} \ \ x \in (x_{j-1},x_j) \quad \text{für alle} \ \ j \in \{1,\dots,N\}\,.$$

Dann ist h eine Treppenfunktion, und wir zeigen:

$$(\forall x \in [a,b])\ \ \|f(x)-h(x)\| < \varepsilon \quad [\,\text{dann folgt}\ \ \|f-h\|_{[a,b]} \le \varepsilon\,].$$

Sei $x \in [a,b]$. Im Falle $x \in \{x_0,\dots,x_N\}$ ist nichts zu zeigen. Sei also $j \in \{1,\dots,N\}$ und $x \in (x_{j-1},x_j)$. Dann gibt es ein $\nu \in \{1,\dots,k\}$, so dass

$$(x_{j-1},x_j) \subset (z_\nu-\delta_{z_\nu}, z_\nu) \quad \text{oder} \quad (x_{j-1},x_j) \subset (z_\nu, z_\nu+\delta_{z_\nu})\,.$$

Im ersten Falle folgt

$$\|f(x)-h(x)\| \;=\; \|f(x)-f(y_j)\| \le \|f(x)-f_-(z_\nu)\| + \Bigl\|f_-(z_\nu)-f(y_j)\Bigr\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

und im zweiten Falle schließt man analog.

(b) $\Rightarrow$ (c) Jede Treppenfunktion ist eine Regelfunktion.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sei $(f_n\colon [a,b] \to X)_{n\ge1}$ eine Folge von Regelfunktionen mit $(f_n)_{n\ge1} \rightrightarrows f$ und $z \in [a,b]$. Wir zeigen die Existenz von $\lim_{x\to z-} f(x)$ (die von $\lim_{x\to z+} f(x)$ folgt analog). Für $z = a$ ist nichts zu zeigen. Sei also $z \in (a,b]$ und

$$c_n \;=\; \lim_{x\to z-} f_n(x) \;=\; \lim_{x\to z}\bigl(f_n \,|\, [a,z]\bigr)(x) \in X$$

Nach Satz 4.19 ist $(c_n)_{n\ge0}$ konvergent, und aus $(c_n)_{n\ge0} \to c$ folgt

$$c = \lim_{x\to z}\bigl(f \,|\, [a,z]\bigr)(x) \;=\; \lim_{x\to z-} f(x)\,.$$

2. Nach 1. und Satz 4.19, da jede Treppenfunktion beschränkt ist. □

Satz 8.2. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, X ein Banachraum und $f\colon I \to X$ eine Regelfunktion. Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f höchstens abzählbar.*

Beweis. Sei zuerst $I = [a, b]$ mit $a,\, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, und sei $(f_n \colon [a, b] \to X)_{n \geq 0}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $(f_n)_{n\geq 0} \rightrightarrows f$. Für $n \geq 0$ sei Ω_n die Menge der Unstetigkeitsstellen von f_n und $\Omega = \bigcup_{n\geq 0} \Omega_n$. Nach Satz 4.19 ist f stetig in $[a, b] \setminus \Omega$, und daher ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Teilmenge von Ω. Als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen höchstens abzählbaren Mengen ist Ω höchstens abzählbar, und daher ist auch die Menge der Unstetigkeitsstellen von f höchstens abzählbar.

Sei nun I beliebig. Nach Satz 3.15 gibt es eine Folge $(I_n)_{n\geq 0}$ kompakter Intervalle mit

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} I_n \,,$$

und für jedes $n \geq 0$ ist die Menge Ω_n der Unstetigkeitsstellen von $f \,|\, I_n$ höchstens abzählbar. Die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist die Vereinigungsmenge der Mengen Ω_n und daher als Vereinigungsmenge abzählbar vieler höchstens abzählbarer Mengen wieder höchstens abzählbar. $\square$

Satz 8.3 (Existenz der Stammfunktionen)**.** *Sei X ein Banachraum.*

1. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \colon [a, b] \to X$ eine Treppenfunktion. Seien $m \in \mathbb{N}$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$ und $c_1, \ldots, c_m \in X$, so dass*
$$(\forall j \in \{1, \ldots, m\})\ (\forall x \in (a_{j-1}, a_j)\,)\ \ f(x) = c_j \,.$$
Sei $F \colon [a, b] \to X$ definiert durch $F(a) = 0$ und
$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{j-1} (a_\nu - a_{\nu-1})c_\nu + (x - a_{j-1})c_j \,, \quad \textit{falls} \quad j \in \{1, \ldots, m\} \quad \textit{und} \quad x \in (a_{j-1}, a_j] \,.$$
Dann ist F eine Stammfunktion von f.
2. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann besitzt jede Regelfunktion $f \colon I \to X$ eine Stammfunktion.*

Beweis. 1. Für $j \in \{1, \ldots, m\}$ ist $F \,|\, (a_{j-1}, a_j]$ konstant, und $\lim_{x\to a_{j-1}+} F(x) = F(a_{j-1})$. Daher ist F stetig. Für $x \in (a_{j-1}, a_j)$ ist F differenzierbar in x, und $F'(x) = c_j = f(x)$. Daher ist F eine Stammfunktion von f.

2. Nach Satz 7.9.4 genügt es, zu zeigen: Für alle $a,\, b \in I$ mit $a < b$ besitzt $f \,|\, [a, b]$ eine Stammfunktion. Seien also $a,\, b \in I$ mit $a < b$, und sei $\big(f_n \colon [a, b] \to X\big)_{n\geq 0}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $(f_n)_{n\geq 0} \rightrightarrows f \,|\, [a, b]$ (nach Satz 8.1). Für $n \geq 0$ sei $F_n \colon [a, b] \to X$ eine Stammfunktion von f_n mit $F_n(a) = 0$. Nach Satz 7.13 konvergiert $(F_n)_{n\geq 0}$ gleichmäßig gegen eine Stammfunktion von $f \,|\, [a, b]$. $\square$

Definition 8.2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, X ein Banachraum, $f \colon I \to X$ eine Regelfunktion und $F \colon I \to X$ eine Stammfunktion von f. Für $a,\, b \in I$ heißt

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx \ = \ [F]_a^b \ = \ F(b) - F(a) \ \in X$$

das (*Cauchy-*)*Integral* von f von a bis b (nach Satz 7.9 ist diese Definition von der Wahl der Stammfunktion F von f unabhängig).

Satz 8.4 (Eigenschaften des Cauchy-Integrals)**.** *Sei X ein Banachraum.*

1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, seien $f, g\colon I \to X$ Regelfunktionen, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $a, b, c \in I$. Dann ist*
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,, \quad \int_a^a f = 0\,, \quad \int_a^b f = -\int_b^a f\,, \quad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$
und
$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g)\,.$$
2. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$, und sei $f\colon [a,b] \to X$ eine Treppenfunktion, so dass $(\forall j \in \{1, \ldots, m\})\ \ f\,|\,(a_{j-1}, a_j) = c_j \in X$ (konstant). Dann ist*
$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^m (a_j - a_{j-1})c_j\,. \quad \textit{Insbesondere:}\ \ f = c \in X\ (\textit{konstant}):\ \int_a^b c = (b-a)c\,.$$
3. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g\colon [a,b] \to X$. Sei f eine Regelfunktion und sei $\{x \in [a,b] \mid f(x) \neq g(x)\}$ endlich. Dann ist auch g eine Regelfunktion, und*
$$\int_a^b f = \int_a^b g\,.$$
4. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $(f_n\colon [a,b] \to X)_{n \ge 0}$ eine Folge von Regelfunktionen mit $(f_n)_{n\ge 0} \rightrightarrows f$. Dann folgt*
$$\Big(\int_a^b f_n\Big)_{n \ge 0} \to \int_a^b f\,.$$
5. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f\colon [a,b] \to X$ eine Regelfunktion. Dann folgt*
$$\Big\|\int_a^b f\Big\| \ \le\ \int_a^b \|f\| \ \le\ (b-a)\,\|f\|_{[a,b]}\,.$$
6. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen mit $f \le g$. Dann ist*
$$\int_a^b f \ \le\ \int_a^b g\,. \qquad \textit{Insbesondere gilt:}\ \ (\forall x \in [a,b])\ \ f(x) \ge 0 \implies \int_a^b f \ge 0\,.$$
7. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann folgt*
$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g\,.$$

Beweis. 1. Sei $F\colon I \to X$ eine Stammfunktion von f und $G\colon I \to X$ eine Stammfunktion von g. Es ist
$$\int_a^c f + \int_c^b f = \big[F(c) - F(a)\big] + \big[F(b) - F(c)\big] = F(b) - F(a) = \int_a^b f\,,$$
und daraus folgt unmittelbar
$$\int_a^a f = 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b f = -\int_b^a f\,.$$

λF ist eine Stammfunktion von λf, und $F+G$ ist eine Stammfunktion von $f+g$, also

$$\int_a^b \lambda f = (\lambda F)(b) - (\lambda F)(a) = \lambda \big[F(b) - F(a)\big] = \lambda \int_a^b f$$

und

$$\int_a^b (f+g) = (F+G)(b) - (F+G)(a) = \big[F(b)-F(a)\big] + \big[G(b)-G(a)\big] = \int_a^b f + \int_a^b g\,.$$

2. Nach Satz 8.3.1.

3. Sei $\{x \in [a,b] \mid f(x) \ne g(x)\} \subset \{x_0, \ldots, x_k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$. Dann ist $(\forall j \in \{1,\ldots,k\})$ $(g-f)\,|\,[x_{j-1}, x_j] = 0$ und daher $g-f$ eine Regelfunktion mit

$$\int_a^b (g-f) = 0\,.$$

Wegen $g = (g-f)+f$ folgt die Behauptung.

4. Nach Satz 8.1 ist f eine Regelfunktion. Sei $F\colon [a,b] \to X$ eine Stammfunktion von f, und für jedes $n \ge 0$ sei $F_n\colon [a,b] \to X$ eine Stammfunktion von f_n mit $F_n(a) = F(a)$. Dann folgt $(F_n)_{n\ge 0} \Rightarrow F$ nach Satz 7.13 und daher

$$\Big(\int_a^b f_n\Big)_{n\ge 0} \;=\; \big(F_n(b) - F_n(a)\big)_{n\ge 0} \;\to\; F(b) - F(a) \;=\; \int_a^b f\,.$$

5. Sei zuerst f eine Treppenfunktion, und sei $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$, so dass $(\forall j \in \{1,\ldots,m\})$ $f\,|\,(a_{j-1}, a_j) = c_j \in X$ (konstant). Dann ist auch $\|f\|\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ eine Treppenfunktion, und $(\forall j \in \{1,\ldots,m\})$ $\|f\|\,|\,(a_{j-1}, a_j) = \|c_j\|$. Nach 2. folgt

$$\begin{aligned}\Big\|\int_a^b f\Big\| \;&=\; \Big\|\sum_{j=1}^m (a_j - a_{j-1})c_j\Big\| \;\le\; \sum_{j=1}^m (a_j - a_{j-1})\|c_j\| \\ &=\; \int_a^b \|f\| \;\le\; (b-a)\max\big(\|c_1\|, \ldots, \|c_m\|\big) \;\le\; (b-a)\,\|f\|_{[a,b]}\,.\end{aligned}$$

Sei nun f beliebig und $(f_n\colon [a,b] \to X)_{n\ge 0}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $(f_n)_{n\ge 0} \Rightarrow f$. Für $x \in [a,b]$ ist $\big|\|f(x)\| - \|f_n(x)\|\big| \le \|f(x) - f_n(x)\| \le \|f - f_n\|_{[a,b]}$, also

$$\big\|\|f\| - \|f_n\|\big\|_{[a,b]} \;\le\; \|f - f_n\|_{[a,b]}\,, \quad \text{und daher} \quad \big(\|f_n\|\big)_{n\ge 0} \;\Rightarrow\; \|f\|\,.$$

Damit folgt

$$\Big(\int_a^b \|f_n\|\Big)_{n\ge 0} \;\to\; \int_a^b \|f\|\,, \quad \Big(\Big\|\int_a^b f_n\Big\|\Big)_{n\ge 0} \;\to\; \Big\|\int_a^b f\Big\|, \quad (\forall n \ge 0)\;\Big\|\int_a^b f_n\Big\| \le \int_a^b \|f_n\|\,,$$

und daher

$$\Big\|\int_a^b f\Big\| \;\le\; \int_a^b \|f\|\,.$$

Für $n \ge 0$ ist

$$\int_a^b \|f_n\| \;\le\; (b-a)\|f_n\|_{[a,b]} \;\le\; (b-a)\Big[\|f_n - f\|_{[a,b]} + \|f\|_{[a,b]}\Big]$$

und für $n \to \infty$ folgt

$$\int_a^b \|f\| \;\le\; (b-a)\|f\|_{[a,b]}\,.$$

6. Aus $g - f \geq 0$ folgt mit Hilfe von 1. und 5.

$$\int_a^b g - \int_a^b f \;=\; \int_a^b (g-f) \;=\; \int_a^b |g-f| \;\geq\; \left|\int_a^b (g-f)\right| \;\geq\; 0\,.$$

7. Mit f und g ist auch fg stetig differenzierbar, und aus $(fg)' = f'g + fg'$ folgt

$$[fg]_a^b \;=\; \int_a^b (fg)' \;=\; \int_a^b f'g + \int_a^b fg'\,.$$

□

Satz und Definition 8.5 (Integralkriterium für unendliche Reihen)**.** *Sei* $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *monoton fallend und* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$*. Dann ist*

$$\left(\left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx\,,\; \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n} f(x)\,dx\right]\right)_{n\geq 1}$$

eine Intervallschachtelung und

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx < \infty\,.$$

Insbesondere existiert

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \;-\; \log n\right) \;=\; 0.57722\ldots\,.$$

C heißt *Euler-Mascheroni'sche Konstante*.

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [k,\, k+1]$ ist $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ und daher

$$f(k) \;=\; \int_k^{k+1} f(k)\,dx \;\geq\; \int_k^{k+1} f(x)\,dx \;\geq\; \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \;\geq\; f(k+1)\,.$$

Sei nun

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx \qquad\text{und}\qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n} f(x)\,dx\,.$$

Dann folgt

$$0 \;\leq b_n - a_n \;=\; \int_n^{n+1} f(x)\,dx \;\leq\; f(n)\,, \quad\text{also}\quad (b_n - a_n)_{n\geq 0} \;\to\; 0\,,$$

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,dx \;\geq\; 0 \quad\text{und}\quad b_{n+1} - b_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx \;\leq\; 0\,.$$

Damit sind die Bedingungen für eine Intervallschachtelung erfüllt. Ist $c \in \mathbb{R}$ die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl, so folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(k) \;=\; c + \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx\,.$$

Der Spezialfall $f(x) = \frac{1}{x}$ liefert die Aussage über die Euler-Mascheroni'sche Konstante, da log eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist. □

Satz 8.6 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)**.** *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $a \in I$, X *ein Banachraum und* $f\colon I \to X$ *eine Regelfunktion. Dann ist die Funktion*

$$F\colon I \to X\,, \quad \textit{definiert durch} \quad F(x) = \int_a^x f\,,$$

eine Stammfunktion von f*, und es gilt:*

$$(\forall z \in I) \ \big[f \ \textit{ stetig in } \ z \implies F \ \textit{ differenzierbar in } \ z, \textit{ und } \ F'(z) = f(z) \big]\,.$$

Insbesondere folgt: Ist $f(I) \subset \mathbb{R}_{\ge 0}$ *und besitzt* I *ein Minimum, so besitzt* f *eine Stammfunktion* F *mit* $F(I) \subset \mathbb{R}_{\ge 0}$.

Beweis. Nach Satz 8.3 hat f eine Stammfunktion $F_1\colon I \to X$. Für $x \in I$ ist dann

$$F(x) \;=\; \int_a^x f \;=\; F_1(x) - F_1(a)\,,$$

also $F - F_1$ konstant und daher F eine Stammfunktion von f nach Satz 7.9. Ist $f(I) \subset \mathbb{R}_{\ge 0}$, so folgt $F(I) \subset \mathbb{R}_{\ge 0}$ nach Satz 8.4.5.

Sei nun $z \in I$ und f stetig in z. Wir müssen zeigen:

$$\lim_{x \to z} \frac{1}{x-z}\big[F(x) - F(z)\big] \;=\; f(z)\,,$$

das heißt,

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x \in I)\ \ \Big[0 < |x-z| < \delta \implies \Big\| \frac{1}{x-z}\big[F(x) - F(z)\big] - f(z) \Big\| < \varepsilon \Big]\,.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$(\forall x \in I) \quad \Big[|x-z| < \delta \implies \|f(x) - f(z)\| < \frac{\varepsilon}{2} \Big]\,.$$

Sei $x \in I$ mit $0 < |x-z| < \delta$. Dann folgt

$$\Big\| \frac{1}{x-z}\big[F(x) - F(z)\big] - f(z) \Big\| \;=\; \frac{1}{|x-z|}\Big\| \int_z^x f - \int_z^x f(z) \Big\| \;=\; \frac{1}{|x-z|}\Big\| \int_z^x \big[f(t) - f(z)\big]\,dt \Big\|\,.$$

Ist $t \in I$ zwischen z und x, so ist $|t-z| < \delta$, also

$$\big\|f(t) - f(z)\big\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und daher} \quad \Big\| \int_z^x \big[f(t) - f(z)\big]\,dt \Big\| \;\le\; \frac{\varepsilon}{2}|x-z|\,.$$

Damit folgt

$$\Big\| \frac{1}{|x-z|}\big[F(x) - F(z)\big] - f(z) \Big\| \;\le\; \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon\,. \qquad \square$$

Satz 8.7 (Substitutionsregel)**.** *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $\varphi\colon [a,b] \to I \subset \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar,* X *ein Banachraum und* $f\colon I \to X$ *eine Regelfunktion. Ist dann noch entweder* f *stetig oder* φ *injektiv, so ist*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \;=\; \int_a^b \varphi'(t)(f \circ \varphi)(t)\,dt\,.$$

Beweis. Nach Satz 8.3 besitzt f eine Stammfunktion $F\colon I \to X$. F ist stetig, und es gibt eine höchstens abzählbare Menge $\Omega \subset I$, so dass $(\forall x \in I \setminus \Omega)$ F ist differenzierbar in x, und $F'(x) = f(x)$. Die Funktion $F\circ\varphi\colon [a,b] \to X$ ist stetig,

$$\big(\forall t \in [a,b] \setminus \varphi^{-1}(\Omega)\big) \quad [F\circ\varphi \quad \text{ist differenzierbar in } t, \text{ und } (F\circ\varphi)'(t) = \varphi'(t)(f\circ\varphi)(t)]\,.$$

Ist f stetig, so ist $\Omega = \emptyset$ nach Satz 8.6. Ist φ injektiv, so ist $\varphi^{-1}(\Omega)$ höchstens abzählbar. In jedem Falle ist daher $F\circ\varphi$ eine Stammfunktion der Regelfunktion $\varphi'(f\circ\varphi)\colon [a,b] \to X$ und daher

$$\int_a^b \varphi'(f\circ\varphi) \;=\; (F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a) \;=\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\,. \qquad \square$$

8.2. Berechnung von Stammfunktionen

Ist $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $D \subset D'$, und ist $F\colon D \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $f\colon D \to \mathbb{C}$, so schreiben wir

$$F = \int f \qquad \text{oder} \qquad F(x) = \int f(x)\,dx \qquad (\text{für } x \in D\,)$$

Bemerkung:

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$, $f\colon I \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion und $F\colon I \to \mathbb{C}$, so gilt nach Satz 8.6:

$$F(x) = \int f(x)\,dx \quad (\text{für } x \in I) \quad \iff \quad (\forall x \in I) \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \;+\; F(a)\,.$$

Elementare Eigenschaften des unbestimmten Integrals:

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $D \subset D'$, seien f, g, F, $G\colon D \to \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Ist F eine Stammfunktion von f, so ist λF eine Stammfunktion von λf; Kurzschreibweise: $\int \lambda f = \lambda \int f$.
2. Ist F eine Stammfunktion von f und G eine Stammfunktion von g, so ist $F + G$ eine Stammfunktion von $f + g$; Kurzschreibweise: $\int (f+g) = \int f + \int g$.
3. Genau dann ist F eine Stammfunktion von f, wenn $\Re F$ eine Stammfunktion von $\Re f$ und $\Im F$ eine Stammfunktion von $\Im f$ ist; Kurzschreibweise: $\int f = \int \Re f + i \int \Im f$.
4. Partielle Integration: Seien f, g differenzierbar, und sei G eine Stammfunktion von $f'g$. Dann ist $fg - G$ eine Stammfunktion von fg'. Kurzschreibweise: $\int fg' = fg - \int f'g$.
5. Substitution: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $\varphi(I) = D$ und F eine Stammfunktion von f. Sei $\Omega \subset D$, so dass F in allen Punkten $x \in D\backslash\Omega$ differenzierbar ist mit $F'(x) = f(x)$. Ist dann $\varphi^{-1}(\Omega)$ höchstens abzählbar, so ist $F\circ\varphi$ eine Stammfunktion von $(f\circ\varphi)\varphi'$. Kurzschreibweise:

   $$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \Big(\int f(u)\,du\Big)_{u=\varphi(x)}\,.$$

   Ist außerdem φ injektiv und besitzt f eine Stammfunktion, so gilt: Ist $\Phi\colon I \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $(f\circ\varphi)\varphi'$, so ist $\Phi\circ\varphi^{-1}$ eine Stammfunktion von f [denn: Ist F eine Stammfunktion von f, so ist $F\circ\varphi$ eine Stammfunktion von $(f\circ\varphi)\varphi'$ und daher

$\Phi = F\circ\varphi + c$ mit $c \in \mathbb{C}$, also $\Phi\circ\varphi^{-1} = F + c$ ebenfalls eine Stammfunktion von f].
Kurzschreibweise:

$$\int f = \Bigl(\int (f\circ\varphi)\varphi'\Bigr)\circ\varphi^{-1}\,.$$

Technik der Anwendung der Substitution für injektives φ:
Mit Hilfe der Substitution $x = \varphi(t)$ und $dx = \varphi'(t)\,dt$ folgt

$$\int f(x)\,dx = \Bigl[\int f\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\,dt\Bigr]_{t=\varphi^{-1}(x)}\,.$$

Beispiele (Grundintegrale):

$$\int (x+c)^\alpha\,dx = \frac{(x+c)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (\text{für } c\in\mathbb{C},\ x\in\mathbb{R} \text{ und } x+c\notin\mathbb{R}_{\le 0}\,,\ \alpha\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}.$$

$$\int \frac{dx}{x+c} = \operatorname{Log}(x+c) \quad (\text{für } c\in\mathbb{C},\ x\in\mathbb{R} \text{ und } x+c\notin\mathbb{R}_{\le 0})\,, \qquad \int\frac{dx}{x} = \log|x| \quad (\text{für } x\in\mathbb{R}^\times)\,.$$

Ist $g\colon D\to\mathbb{R}$ differenzierbar und $(\forall x\in D)\ g(x)\ne 0$, so folgt $\displaystyle\int\frac{g'(x)}{g(x)} = \log|g(x)|\,.$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\operatorname{Log}(a)} \qquad (\text{für } x\in\mathbb{R}\,,\ a\in\mathbb{C}^\times\setminus\{1\}).$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) \qquad (\text{für } x\in(-1,1)\,), \qquad \int\frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) \qquad (\text{für } x\in\mathbb{R}\,).$$

$$\int\sin x\,dx = -\cos x\,, \qquad \int\cos x\,dx = \sin x \quad \text{und} \quad \int\cot x\,dx = \int\frac{\sin'(x)}{\sin(x)}\,dx = \log|\sin x|$$

(für $x\in\mathbb{R}$).

Beispiele (partielle Integration):

1. $\displaystyle\int\operatorname{Log}(x+c)\,dx = (x+c)\operatorname{Log}(x+c) - x$ (für $c\in\mathbb{C}$, $x\in\mathbb{R}$ und $x+c\notin\mathbb{R}_{\le 0}$) .

2. Für $n\in\mathbb{N}_0$, $c = a+bi\in\mathbb{C}^\times$ mit $a,\,b\in\mathbb{R}$ und $x\in\mathbb{R}$ sei

$$I_n = \int x^n\mathsf{e}^{cx}\,dx\,, \quad \text{also} \quad \Re I_n = \int x^n\mathsf{e}^{ax}\cos bx\,dx \quad \text{und} \quad \Im I_n = \int x^n\mathsf{e}^{ax}\sin bx\,dx\,.$$

Rekursionsformel für $n\in\mathbb{N}$: $\quad I_0 = \dfrac{1}{c}\mathsf{e}^{cx}\,,\quad I_n = \dfrac{1}{c}x^n\mathsf{e}^{cx} - \dfrac{n}{c}I_{n-1}\,.$ Damit folgt

$$\int x^n\mathsf{e}^{cx}\,dx \;=\; \frac{\mathsf{e}^{cx}}{c}\sum_{j=0}^{n}\Bigl(\frac{-1}{c}\Bigr)^{n-j}\frac{n!}{j!}\,x^j \qquad (\text{Beweis durch Induktion nach } n\,)$$

3. Für $n\in\mathbb{N}_0$ und $x\in\mathbb{R}$ sei $\displaystyle I_n = \int\sin^n x\,dx$ und $\displaystyle J_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx\,.$

$$I_0 = x\,,\quad I_1 = -\cos x \quad \text{und} \quad (\forall n\ge 2)\quad nI_n = -\sin^{n-1}x\,\cos x + (n-1)I_{n-2}\,,$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\bigl(x - \sin x\cos x\bigr)\,,\quad J_0 = \frac{\pi}{2}\,,\quad J_1 = 1 \quad \text{und} \quad (\forall n\ge 2)\quad J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}\,.$$

Mittels Induktion folgt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$J_{2k} = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} = \frac{\pi}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k} \quad \text{und} \quad J_{2k+1} = \prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1} = \frac{2^{2k}}{2k+1} \binom{2k}{k}^{-1}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ ist $J_{2k+1} \le J_{2k} \le J_{2k-1}$ und daher

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{4j^2}{4j^2-1} \le \frac{\pi}{2} \le \prod_{j=1}^{k-1} \frac{4j^2}{4j^2-1} \cdot \frac{2k}{2k-1}, \quad \text{also} \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k} \frac{4j^2}{4j^2-1} \quad (\textit{Wallis'sches Produkt}).$$

Beispiele (Substitution):

1. Mit $f(u) = \mathsf{e}^u$ und $\varphi(x) = x^2$ folgt

$$\int x\mathsf{e}^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x)\mathsf{e}^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\mathsf{e}^{x^2} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Substitution $x = r\cos t$ für $t \in [0,\pi]$ liefert

$$\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{r^2}{2}\left[\frac{x}{r}\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}} \;-\; \arccos\frac{x}{r}\right] \qquad (\text{für } \; x \in [-r,r]\,)$$

Beispiel (Integration rationaler Funktionen):
Auf Grund von Satz 2.8 und des Fundamentalsatzes der Algebra hat jede rationale Funktion $h\colon D \to \mathbb{C}$ mit maximalem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$ eine Darstellung

$$(\forall x \in D) \quad h(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_\nu} \frac{c_{\nu,j}}{(x-z_\nu)^j} \; + f_1(x)$$

mit verschiedenen $z_1,\dots,z_n \in \mathbb{C}$, einer Polynomfunktion $f_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, $c_{\nu,j} \in \mathbb{C}$ und $k_\nu \in \mathbb{N}$, und es ist

$$\int \frac{dx}{x-c} = \operatorname{Log}(x-c) \quad \text{für} \;\; x-c \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\le 0}\,, \qquad \int \frac{dx}{x-c} = -\log(c-x) \quad \text{für} \;\; x-c \in \mathbb{R}_{<0}$$

$$\int \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-c)^{n-1}} \qquad \text{für} \;\; n \in \mathbb{N}_{\ge 2}\,,\; x \in \mathbb{C}\setminus\{c\}\,.$$

Beispiel:
Berechnung des Integrals

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+2bx+c)^n}dx \quad \text{für} \quad B,\,C,\,b,\,c \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N}$$

ohne Übergang zum Komplexen. Sei $Q(x) = x^2+2bx+c$

1. Es ist

$$\int \frac{Bx+C}{Q(x)^n}\,dx \;=\; B\int \frac{x}{Q(x)^n}\,dx \;+\; C\int \frac{dx}{Q(x)^n}\,.$$

2. Aus

$$\left(\frac{1}{Q^n}\right)' = \frac{-nQ'}{Q^{n+1}} = -2n\frac{x+b}{Q(x)^{n+1}} \qquad \text{folgt} \qquad \frac{1}{Q(x)^n} \;=\; -2n\int \frac{x}{Q(x)^{n+1}}\,dx + b\int \frac{dx}{Q(x)^{n+1}}\,,$$

und wir erhalten die Rekursionsformel

$$\int \frac{x}{Q(x)^{n+1}}\,dx \;=\; -\frac{1}{2nQ(x)^n} - b\int \frac{dx}{Q(x)^{n+1}}\,.$$

3. Aus

$$\Big(\frac{Q'}{Q^n}\Big)' \;=\; \frac{Q''Q^n - nQ'Q^{n-1}Q'}{Q^{2n}} \;=\; \frac{2}{Q^n} - \frac{1}{Q^n}\frac{nQ'^2}{Q}$$

und

$$\frac{Q'(x)^2}{Q(x)} \;=\; \frac{(2x+2b)^2}{x^2+2bx+c} \;=\; \frac{4(x^2+2bx+c)+4(b^2-c)}{x^2+2bx+c} \;=\; 4+\frac{4(b^2-c)}{Q(x)}$$

folgt

$$\Big(\frac{Q'}{Q^n}\Big)' \;=\; \frac{2}{Q^n} \;-\; \frac{n}{Q^n}\Big(4+\frac{4(b^2-c)}{Q}\Big) \;=\; \frac{2(1-2n)}{Q^n} \;-\; \frac{4n(b^2-c)}{Q^{n+1}}\,,$$

also

$$\frac{2(x+b)}{Q(x)^n} \;=\; 2(1-2n)\int\frac{dx}{Q(x)^n} \;-\; 4n(b^2-c)\int\frac{dx}{Q(x)^{n+1}}\,.$$

Im Falle $b^2=c$ folgt daraus

$$\int\frac{dx}{Q(x)^n} \;=\; \frac{x+b}{(1-2n)Q(x)^n}\,,$$

und im Falle $b^2\neq c$ erhalten wir die Rekursionsformel

$$\int\frac{dx}{Q(x)^{n+1}} \;=\; \frac{1-2n}{2n(b^2-c)}\int\frac{dx}{Q(x)^n} \;-\; \frac{x+b}{2n(b^2-c)}\frac{1}{Q(x)^n}\,.$$

Wegen

$$\int\frac{x}{Q(x)}\,dx \;=\; \int\frac{-b+\frac{Q'(x)}{2}}{Q(x)}\,dx \;=\; -b\int\frac{dx}{Q(x)} \;+\; \frac{1}{2}\log|Q(x)|$$

genügt es nun, das Integral

$$\int\frac{dx}{Q(x)}$$

zu berechnen.

4. Es ist $Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ mit $\alpha=-b+\delta$, $\beta=-b-\delta$, wobei $\delta\in\mathbb{C}$ und $\delta^2=b^2-c$. Im Falle $b^2=c$ ist $Q(x)=(x+b)^2$ und

$$\int\frac{dx}{(x+b)^2} \;=\; \frac{-1}{x+b}\,.$$

Im Falle $b^2\neq c$ ist $\alpha\neq\beta$ und

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\Big[\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\Big]\,.$$

a) Sei $b^2-c>0$. Dann ist $\delta=\sqrt{b^2-c}$, $\alpha-\beta=2\delta$, und daher

$$\int\frac{dx}{Q(x)} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{b^2-c}}\Big[\log|x+b-\delta| - \log|x+b+\delta|\Big] \;=\; \frac{1}{2\sqrt{b^2-c}}\log\Big|\frac{x+b-\delta}{x+b+\delta}\Big|$$

b) Sei $b^2-c<0$. Dann ist $\delta=i\sqrt{c-b^2}$, also

$$\int\frac{dx}{Q(x)} \;=\; \frac{1}{2i\sqrt{c-b^2}}\Big[\mathrm{Log}(x+b-\delta) - \mathrm{Log}(x+b+\delta)\Big]\,.$$

Wegen

$$\mathrm{Log}\big(x+b\pm i\sqrt{c-b^2}\big) \;=\; \log\sqrt{c-b^2} \;+\; \mathrm{Log}\Big(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\pm i\Big)$$

und

$$\mathrm{Log}\Big(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}-i\Big)-\mathrm{Log}\Big(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}+i\Big) \;=\; 2i\left[\arctan\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}-\frac{\pi}{2}\right]$$

folgt

$$\int\frac{dx}{Q(x)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\arctan\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\,.$$

Zwei Beispiele nicht "elementar" integrierbarer Funktionen:

Die auf $\mathbb{R}$ stetigen Funktionen

$$x \;\mapsto\; \frac{\sin x}{x} \qquad \text{und} \qquad x\;\mapsto\;\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)$$

besitzen Stammfunktionen nach Satz 8.3. Diese sind jedoch nicht als rationale Funktion der bisher studierten Funktionen ausdrückbar (ohne Beweis!). Nach Satz 7.10 haben aber die Stammfuntionen Reihendarstellungen:

$$\text{Aus}\quad \frac{\sin x}{x} \;=\; \sum_{n_0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n} \qquad \text{folgt}\qquad \int\frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \sum_{n_0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}\,x^{2n+1}\,.$$

$$\text{Aus}\quad \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}\,x^{2n} \qquad \text{folgt}\qquad \int\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1}\,x^{2n+1}\,.$$

8.3. Berechnung von Weglängen

Definition 8.3. Sei X ein Banachraum, $a,\,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ und $\varphi\colon[a,b]\to X$.
Für $a\le t_0<t_1<\ldots<t_m=b$ sei

$$P_\varphi(t_0,\ldots,t_m)=\sum_{j=1}^{m}\|\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})\|\,.$$

Dann heißt

$$\mathsf{L}(\varphi)=\sup\{P_\varphi(t_0,\ldots,t_m)\mid a\le t_0<t_1<\ldots<t_m=b\}\;\in[0,\infty]$$

die *Totalvariation* oder *Bogenlänge* von φ (siehe auch Definition 6.3).

Satz 8.8. *Sei X ein Banachraum, $a,\,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ und $\varphi\colon[a,b]\to X$.*

1. *Sei $a\le t_0<t_1<\ldots<t_m\le b$ und $a\le t_0'<t_1'<\ldots<t_n'\le b$. Ist dann $\{t_0,\ldots,t_m\}\subset\{t_0',\ldots,t_n'\}$, so folgt $P_\varphi(t_0,\ldots,t_m)\le P_\varphi(t_0',\ldots,t_n')$.*
2. *Sei $a<c<b$. Dann ist $\mathsf{L}(\varphi)=\mathsf{L}(\varphi\,|\,[a,c])+\mathsf{L}(\varphi\,|\,[c,b])$.*
3. *Seien $\varphi_1,\,\varphi_2\colon[a,b]\to X$. Dann ist $\mathsf{L}(\varphi_1+\varphi_2)\le\mathsf{L}(\varphi_1)+\mathsf{L}(\varphi_2)$. Ist $\mathsf{L}(\varphi_1)+\mathsf{L}(\varphi_2)<\infty$, so folgt auch $|\mathsf{L}(\varphi_1)-\mathsf{L}(\varphi_2)|\le\mathsf{L}(\varphi_1+\varphi_2)$.*
4. *Sei φ Stammfunktion einer Funktion $\phi\colon[a,b]\to X$. Dann ist $\mathsf{L}(\varphi)\le(b-a)\,\|\phi\|_{[a,b]}$.*

5. *Sei* φ *Stammfunktion einer Regelfunktion* $\phi\colon [a,b] \to X$. *Dann ist*

$$\mathsf{L}(\varphi) = \int_a^b \|\phi\|\,.$$

Beweis. 1. Es genügt, den Fall $\{t'_0,\ldots,t'_n\} = \{t_0,\ldots,t_m\} \cup \{t\}$ mit $t \notin \{t_0,\ldots,t_m\}$ zu betrachten. Ist $t < t_0$ oder $t > t_m$, so ist nichts zu zeigen. Ist $j \in \{1,\ldots,m\}$ mit $t_{j-1} < t < t_j$, so folgt $\|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\| \le \|\varphi(t_j) - \varphi(t)\| + \|\varphi(t) - \varphi(t_{j-1})\|$ und damit die Behauptung.

2. Sei Σ die Menge aller endlichen Folgen $(t_0,\ldots,t_m)$ mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ und $c \in \{t_1,\ldots,t_{m-1}\}$. Nach 1. ist $\mathsf{L}(\varphi) = \sup\{P_\varphi(t_0,\ldots,t_m) \mid (t_0,\ldots,t_m) \in \Sigma\}$, und für $(t_0,\ldots,t_m) \in \Sigma$ mit $c = t_j$ ist

$$P_\varphi(t_0,\ldots,t_m) = P_\varphi(t_0,\ldots,t_j) + P_\varphi(t_j,\ldots,t_m) \le \mathsf{L}(\varphi \,|\, [a,c]) + \mathsf{L}(\varphi \,|\, [c,b])\,.$$

Daher folgt $\mathsf{L}(\varphi) \le \mathsf{L}(\varphi \,|\, [a,c]) + \mathsf{L}(\varphi \,|\, [c,b])$.

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung können wir $\mathsf{L}(\varphi) < \infty$ annehmen und werden zeigen: Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $\mathsf{L}(\varphi \,|\, [a,c]) + \mathsf{L}(\varphi \,|\, [c,b]) \le \mathsf{L}(\varphi) + \varepsilon$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach 1. gibt es $a \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m = c$ und $c = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_n = b$, so dass

$$\mathsf{L}(\varphi \,|\, [a,c]) \le P_\varphi(t_0,\ldots,t_m) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad \mathsf{L}(\varphi \,|\, [c,b]) \le P_\varphi(t'_0,\ldots,t'_n) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} \mathsf{L}(\varphi \,|\, [a,c]) + \mathsf{L}(\varphi \,|\, [c,b] \;&\le\; P_\varphi(t_0,\ldots,t_m) \;+\; P_\varphi(t'_0,\ldots,t'_n) \;+\; \varepsilon \\ &=\; P_\varphi(t_0,\ldots,t_{m-1},c,t'_1,\ldots,t'_n) \;+\; \varepsilon \;\le\; \mathsf{L}(\varphi) + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

3. Sei $a \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m \le b$. Dann ist

$$\begin{aligned} P_{\varphi_1+\varphi_2}(t_0,\ldots,t_m) &= \sum_{j=1}^m \|(\varphi_1+\varphi_2)(t_j) - (\varphi_1+\varphi_2)(t_{j-1})\| \\ &\le \sum_{j=1}^m \|\varphi_1(t_j) - \varphi_1(t_{j-1})\| + \sum_{j=1}^m \|\varphi_2(t_j) - \varphi_2(t_{j-1})\| \\ &= P_{\varphi_1}(t_0,\ldots,t_m) + P_{\varphi_2}(t_0,\ldots,t_m) \le \mathsf{L}(\varphi_1) + \mathsf{L}(\varphi_2) \end{aligned}$$

und daher $\mathsf{L}(\varphi_1+\varphi_2) \le \mathsf{L}(\varphi_1) + \mathsf{L}(\varphi_2)$. Sei nun $\mathsf{L}(\varphi_1) + \mathsf{L}(\varphi_2) < \infty$. Dann ist

$$\mathsf{L}(\varphi_2) = \mathsf{L}\big((\varphi_1+\varphi_2) + (-\varphi_1)\big) \le \mathsf{L}(\varphi_1+\varphi_2) + \mathsf{L}(-\varphi_1) = \mathsf{L}(\varphi_1+\varphi_2) + \mathsf{L}(\varphi_1)$$

und daher $\mathsf{L}(\varphi_2) - \mathsf{L}(\varphi_1) \le \mathsf{L}(\varphi_1+\varphi_2)$. In gleicher Weise folgt $\mathsf{L}(\varphi_1) - \mathsf{L}(\varphi_2) \le \mathsf{L}(\varphi_1+\varphi_2)$ und daher $|\mathsf{L}(\varphi_1) - \mathsf{L}(\varphi_2)| \le \mathsf{L}(\varphi_1+\varphi_2)$.

4. Sei $a \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m \le b$. Dann folgt nach Satz 7.8

$$\begin{aligned} P_\varphi(t_0,\ldots,t_m) \;=\; \sum_{j=1}^m \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\| \;&\le\; \sum_{j=1}^m (t_j - t_{j-1})\|\phi\|_{[t_{j-1},t_j]} \\ &\le\; (t_m - t_0)\|\phi\|_{[a,b]} \;\le\; (b-a)\|\phi\|_{[a,b]} \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung.

5. Wir definieren $s\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$s(a) = 0\,, \quad \text{und} \quad s(t) = \mathsf{L}(\varphi \,|\, [a,t]) \quad \text{für} \quad t \in (a,b]$$

und zeigen: s ist eine Stammfunktion von $\|\phi\|$. Dann folgt

$$\mathsf{L}(\varphi) = s(b) = s(b) - s(a) = \int_a^b \|\phi\|\,.$$

Ist $a \le t_1 < t_2 \le b$, so folgt (mit 2. und 4.)

$$s(t_2) - s(t_1) = L(\varphi \bigm| [t_1, t_2]) \le (t_2 - t_1)\|\varphi\|_{[a,b]}\,,$$

und daher ist s stetig nach Satz 4.4. Nach Voraussetzung gibt es eine höchstens abzählbare Menge $\Omega_1 \subset [a,b]$, so dass φ in allen Punkten $t \in [a,b] \setminus \Omega_1$ differenzierbar ist mit $\varphi'(t) = \phi(t)$. Nach Satz 8.2 gibt es eine höchstens abzählbare Teilmenge $\Omega_2 \subset [a,b]$, so dass ϕ in allen Punkten $x \in [a,b] \setminus \Omega_2$ stetig ist. Dann ist auch $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ höchstens abzählbar, und wir zeigen, dass s in allen Punkten $t \in [a,b] \setminus \Omega$ differenzierbar ist mit $s'(t) = \|\phi(t)\|$. Sei $t \in [a,b] \setminus \Omega$. Wir müssen zeigen:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall t' \in [a,b]) \quad \left[0 < |t - t'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{s(t') - s(t)}{t' - t} - \|\phi(t)\| \right| < \varepsilon \right].$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen der Stetigkeit von ϕ in t gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$(\forall t' \in [a,b]) \quad \left[0 < |t - t'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\phi(t) - \phi(t')\| < \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

Sei nun $t' \in [a,b]$ mit $0 < |t' - t| < \delta$. Wir betrachten nur den Fall $t' > t$ (der Fall $t' < t$ ist analog zu behandeln).

Seien $\chi, \psi\colon [t,t'] \to X$ definiert durch $\chi(x) = \varphi(t) + (x - t)\phi(t)$ und $\psi = \varphi \,|\, [t,t'] - \chi$. Dann ist $\mathsf{L}(\chi) = (t' - t)\|\phi(t)\|$, ψ Stammfunktion der Regelfunktion $\omega\colon [t,t'] \to X$, definiert durch $\omega(x) = \phi(x) - \phi(t)$, und aus 4. folgt

$$\mathsf{L}(\psi) \ \le\ (t' - t)\, \|\omega\|_{[t,t']} \ \le\ (t' - t)\, \frac{\varepsilon}{2} \ <\ (t' - t)\, \varepsilon\,.$$

Nach 3. ist $\mathsf{L}(\chi) - \mathsf{L}(\psi) \le \mathsf{L}(\varphi \,|\, [t,t']) \le \mathsf{L}(\chi) + \mathsf{L}(\psi)$ und daher nach 2.

$$\bigl| s(t') - s(t) - (t' - t)\|\phi(t)\| \bigr| = \bigl| \mathsf{L}(\varphi \,|\, [t,t']) - \mathsf{L}(\chi) \bigr| \le \mathsf{L}(\psi) < (t' - t)\varepsilon\,,$$

also

$$\left| \frac{s(t') - s(t)}{t' - t} - \|\phi(t)\| \right| < \varepsilon\,. \qquad \square$$

Beispiele:

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p \in \mathbb{N}$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^p$, und seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (dann nennt man φ eine *glatte Kurve*). Es ist

$$\mathsf{L}(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \ldots + \varphi_p'(t)^2}\, dt\,.$$

2. Funktionsgraphen: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und sei

$$\Gamma_f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \text{definiert durch} \quad \Gamma_f(x) = \bigl(x, f(x)\bigr)\,, \quad \text{der Graphenweg von } f\,.$$

Dann ist

$$\mathsf{L}(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,.$$

3. Ellipsenbogen: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ge b > 0$, und sei

$$\varphi_{a,b}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \text{definiert durch} \quad \varphi_{a,b}(t) = (a\cos t, b\sin t)\,.$$

$\varphi_{a,b}\big([0,2\pi]\big) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2\}$ ist die *Ellipse* mit den Halbachsen a und b. Insbesondere ist $\varphi_a = \varphi_{a,a}$ die *Kreislinie* mit Radius a. Es ist

$$\mathsf{L}(\varphi_{a,b}) = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\, dt \quad \text{mit} \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}\,.$$

Diese Integral ist ein nicht elementar auswertbares sogenanntes *elliptisches Integral 2. Art.* Im Falle $a = b$ folgt $\mathsf{L}(\varphi_a) = 2\pi a$ (Länge der Kreislinie).

9. Differenzialrechnung in normierten Räumen (elementarer Teil)

9.1. Stetige multilineare Abbildungen

Definition 9.1. Sei $n \in \mathbb{N}$, für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $(X_i, \|\cdot\|_i)$ ein normier Raum und $X = X_1 \times \ldots \times X_n$. Für $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{und} \quad \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\,.$$

Damit wird X zum $\mathbb{R}$-Vektorraum (nachrechnen!). Sei $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max\{\|x_1\|_1, \ldots, \|x_n\|_n\}\,.$$

Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X (nachrechnen!). Man nennt $(X, \|\cdot\|)$ den *Produktraum* von $(X_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (X_n, \|\cdot\|_n)$.

Im Folgenden werden wir alle Normen mit $\|\cdot\|$ bezeichnen. Durch das Argument wird klar, um die Norm welchen Raumes es sich handelt.

Sind $X_1, \ldots, X_n$ $\mathbb{C}$-Vektorraäume, so wird auch X zum $\mathbb{C}$-Vektorraum, wenn man die Skalarmultiplikation mit komplexen Zahlen komponentenweise definiert.

Bemerkungen:
Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $X_1, \ldots, X_n$ normierte Räume und $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ ihr Produktraum.

1. Sei $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ eine Folge in X, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$.
   (a) $(x^{(k)})_{k\geq 0} \to x \iff (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ (x_i^{(k)})_{k\geq 0} \to x_i$.
   (b) $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ ist Cauchyfolge $\iff (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ (x_i^{(k)})_{k\geq 0}$ ist Cauchyfolge.
2. X ist ein Banachraum $\iff (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ X_i$ ist ein Banachraum.
3. Sei V ein normierter Raum, $D \subset V$ offen, $a \in D$, $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to X = X_1 \times \ldots \times X_n$ und $c = (c_1, \ldots, c_n) \in X$.
   (a) $\lim_{x\to a} f(x) = c \iff (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ \lim_{x\to a} f_i(x) = c_i$.
   (b) f ist stetig in $a \iff (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ f_i$ ist stetig in a.

Beweis. Die im Spezialfall $X_1 = \ldots = X_n = \mathbb{R}$ geführten Beweise (siehe Satz 3.20 und Satz 4.5) übertragen sich wörtlich.

Definition 9.2. Sei $p \in \mathbb{N}$, und seien $X_1, \ldots, X_p, Y$ normierte Räume. Eine Abbildung $\varphi : X_1 \times \ldots \times X_p \to Y$ heißt *p-fach multilinear* oder *p-linear* [im Falle $p = 1$ *linear*, im Falle $p = 2$ *bilinear*], wenn für alle $(x_1, \ldots, x_p) \in X_1 \times \ldots \times X_p$, alle $i \in \{1, \ldots, p\}$, $y_i \in X_i$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

L1. $\varphi(x_1, \ldots, x_i + y_i, \ldots, x_p) = \varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) + \varphi(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_p)$.
L2. $\varphi(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_p) = \lambda\, \varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$.

Im Falle $p = 1$ stimmt diese Definition mit der in der Linearen Algebra üblichen überein (siehe Definition 2.4).

Für eine p-lineare Abbildung $\varphi : X_1 \times \ldots \times X_p \to Y$ definiert man ihre *Operatornorm* durch

$$\|\varphi\| = \inf\big\{c \in \mathbb{R} \;\big|\; \big(\forall (x_1, \ldots, x_p) \in X_1 \times \ldots \times X_p\big)\ \ \|\varphi(x_1, \ldots, x_p)\| \leq c\,\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_p\|\,\big\}\,,$$

und

$$\mathsf{L}^p(X_1, \ldots, X_p; Y) = \{\varphi : X_1 \times \ldots \times X_p \to Y \mid \varphi \text{ ist } p\text{-linear, und } \|\varphi\| < \infty\}\,.$$

Offensichtlich gilt für jede p-lineare Abbildung $\varphi\colon X_1\times\ldots\times X_p \to Y$:

$\|\varphi\| < \infty \iff (\exists c \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall (x_1,\ldots,x_p \in X_1\times\ldots\times X_p)\ \ \|\varphi(x_1,\ldots,x_p)\| \le c\,\|x_1\|\cdot\ldots\cdot\|x_p\|$.

Sei nun X ein normierter Raum. Für $p \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\mathsf{L}^p(X,Y) = \mathsf{L}^p(X,\ldots,X;Y)\,,\quad \mathsf{L}(X,Y) = \mathsf{L}^1(X,Y)\,,\quad \mathsf{L}(X) = \mathsf{L}(X,X)\,,\quad \mathsf{L}^0(X,Y) = Y\,.$$

Für $x \in X$ und $p \in \mathbb{N}$ sei $x^{[p]} = (x,\ldots,x) \in X^p$.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *homogene Polynomfunktion vom Grade* p, wenn

$$\exists \varphi \in \mathsf{L}^p(X,Y)\,)\ (\forall x \in X)\ \ f(x) = \varphi(x^{[p]})\,.$$

Insbesondere ist eine homogene Polynomfunktion vom Grade 1 ein Element von $\mathsf{L}(X,Y)$.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Polynomfunktion vom Grade* $p \in \mathbb{N}_0$ wenn

$$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_p\,,$$

wobei für alle $d \in \{1,\ldots,p\}$ die Funktion $f_d\colon X \to Y$ eine homogene Polynomfunktion vom Grade d, $f_0\colon X \to Y$ eine konstante Funktion und $f_p \ne 0$ ist.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *affin-linear*, wenn f eine Polynomfunkton vom Grade $d \le 1$ ist [äquivalent: $f = \varphi + c$ mit $\varphi \in \mathsf{L}(X,Y)$ und $c \in Y$].

Bemerkungen:

1. Seien $X_1,\ldots,X_p,Y$ normierte Räume und $\varphi\colon X_1\times\ldots\times X_p \to Y$. Genau dann ist φ p-linear, wenn für alle $(x_1,\ldots,x_p) \in X_1\times\ldots\times X_p$ und alle $i \in \{1,\ldots,p\}$ gilt:

   Die Abbildung $X_i \to Y$, definiert durch $x \mapsto \varphi(x_1,\ldots,x_{i-1},x,x_{i+1},\ldots,x_p)$, ist $\mathbb{R}$-linear.

   Man sagt dann auch, φ ist $\mathbb{R}$-linear in jeder Variablen. Insbesondere: $\varphi(x_1,\ldots,x_p) = 0$, falls $(\exists i \in \{1,\ldots,p\})\ \ x_i = 0$.

   Die konstante Abbildung mit Wert 0 ist p-linear und wird (wie auch sonst üblich) mit $0 \in \mathsf{L}^p(X_1,\ldots,X_p;Y)$ bezeichnet. Es ist $\|0\| = 0$.

   Vorsicht! Eine p-lineare Abbildung $\varphi\colon X_1\times\ldots\times X_p \to Y$ is etwas Anderes als eine $(\mathbb{R})$-lineare Abbildung $\varphi\colon X_1\times\ldots\times X_p \to Y$.

   [Zur Erinnerung: Eine Abbildung $\varphi\colon X_1\times\ldots\times X_p \to Y$ heißt $\mathbb{R}$-linear, wenn für alle $(x_1,\ldots,x_p)$, $(x_1',\ldots,x_p') \in X_1\times\ldots\times X_p$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

   $$\varphi(x_1{+}x_1',\ldots,x_p{+}x_p') = \varphi(x_1,\ldots,x_p) + \varphi(x_1',\ldots,x_p') \ \wedge\ \varphi(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_p) = \lambda\varphi(x_1,\ldots,x_p)\,.$$

   Man hat also zu unterscheiden zwischen $\mathsf{L}^p(X_1,\ldots,X_p;Y)$ und $\mathsf{L}(X_1\times\ldots\times X_p,Y)$ [und insbesondere im Falle $X_1 = \ldots = X_p = X$ zwischen $\mathsf{L}^p(X,Y)$ und $\mathsf{L}(X^p,Y)$].

2. Seien $p,\,n \in \mathbb{N}$, Y ein normierter Raum und $\varphi \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^n,Y)$. Sei $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, seien $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{x}_\nu = (x_{\nu,1},\ldots,x_{\nu,n})$. Dann folgt

   $$\varphi(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^n x_{1,i}\boldsymbol{e}_i,\ldots,\sum_{i=1}^n x_{p,i}\boldsymbol{e}_i\Big) = \sum_{i_1=1}^n\ldots\sum_{i_p=1}^n x_{1,i_1}\cdot\ldots\cdot x_{p,i_p}\varphi(\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_p})\,.$$

   Insbesondere gilt im Falle $\boldsymbol{x}_1 = \ldots = \boldsymbol{x}_p = (x_1,\ldots,x_n)$

   $$\varphi(\boldsymbol{x}^{[p]}) = \sum_{i_1=1}^n\ldots\sum_{i_p=1}^n x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_p}\varphi(\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_p})\,,$$

und daher stimmt obige Definition einer Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit der Definition der Polynomfunktion in Definition 2.7 überein.

Satz 9.1. *Sei $p \in \mathbb{N}$, seien $X_1, \ldots, X_p, Y$ normierte Räume und $X = X_1 \times \ldots, \times X_p$ der Produktraum.*

1. *Sei $\varphi\colon X \to Y$ eine p-lineare Abbildung.*
   (a) $(\forall (x_1, \ldots, x_p) \in X)\ \ \|\varphi(x_1, \ldots, x_p)\| \le \|\varphi\|\,\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_p\|$.
   (b) $\|\varphi\| = \sup\bigl\{\|\varphi(x_1, \ldots, x_p)\| \bigm| (x_1, \ldots, x_p) \in X\,,\ \|x_1\| \le 1\,, \ldots, \|x\|_p \le 1\bigr\}$.
   (c) *Sei* $(\forall i \in \{1, \ldots, p\})\ \ X_i \ne \{0\}$. *Dann ist*
   $$\|\varphi\| = \sup\bigl\{\|\varphi(x_1, \ldots, x_p)\| \bigm| (x_1, \ldots, x_p) \in X\,,\ \|x_1\| = \ldots = \|x\|_p = 1\bigr\}\,.$$
2. *Für eine p-lineare Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
   (a) *φ ist stetig.*
   (b) *φ ist stetig in $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in X$.*
   (c) $\|\varphi\| < \infty$.
   (d) *Definiert man für jedes $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p) \in X$ die Abbildung $\varphi_{\boldsymbol{a}}\colon X \to Y$ durch*
   $$\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{p} \varphi(a_1, \ldots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \ldots, a_p) \quad \textit{mit} \quad \boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_p)\,,$$
   so ist $\varphi_{\boldsymbol{a}} \in \mathsf{L}(X, Y)$, und
   $$\lim_{\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}\bigl[\varphi(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - \varphi(\boldsymbol{a}) - \varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h})\bigr] = \mathbf{0}\,.$$
3. *Sind $X_1, \ldots, X_p$ endlich-dimensional, so ist jede p-lineare Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ stetig.*
4. *Für $i \in \{1, \ldots, p\}$ seien die Projektion $\pi_i\colon X \to X_i$ und die Einlagerung $\varepsilon_i\colon X_i \to X$ definiert durch $\pi_i(x_1, \ldots, x_p) = x_i \in X_i$ und $\varepsilon_i(x_i) = (0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \in X$. Dann ist $\pi_i \in \mathsf{L}(X, X_i)$, $\varepsilon_i \in \mathsf{L}(X_i, X)$ und im Falle $X_i \ne \{0\}$ ist $\|\pi_i\| = \|\varepsilon_i\| = 1$.*

Beweis. 1. Ist $X_i = \{0\}$ für ein $i \in \{1, \ldots, p\}$, so ist 0 die einzige p-lineare Abbildung $X \to Y$ und nichts zu zeigen. Sei also $(\forall i \in \{1, \ldots, p\})\ \ X_i \ne \{0\}$,
$$C = \sup\bigl\{\|\varphi(x_1, \ldots, x_p)\| \bigm| (x_1, \ldots, x_p) \in X\,,\ \|x_1\| \le 1\,, \ldots, \|x\|_p \le 1\bigr\}$$
und
$$C_1 = \sup\bigl\{\|\varphi(x_1, \ldots, x_p)\| \bigm| (x_1, \ldots, x_p) \in X\,,\ \|x_1\| = \ldots = \|x\|_p = 1\bigr\}\,.$$
Dann ist $C_1 \le C$, und wir zeigen:

A. $(\forall (x_1, \ldots, x_p) \in X)\ \ \|\varphi(x_1, \ldots, x_p)\| \le C_1 \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_p\|$.

Sei $(x_1, \ldots, x_p) \in X$. Ist $x_i = 0$ für ein $i \in \{1, \ldots, p\}$, so ist die Behauptung offensichtlich. Sei also $(\forall i \in \{1, \ldots, p\})\ \ x_i \ne 0$, und $x_i' = \|x_i\|^{-1} x_i$, also $\|x_1'\| = \ldots = \|x_p'\| = 1$. Dann folgt
$$C_1 \ge \|\varphi(x_1', \ldots, x_p')\| = \frac{1}{\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_p\|}\,\|\varphi(x_1, \ldots, x_p)\| \quad \text{und damit } \mathbf{A}\,.$$
Nach Definition ist nun $\|\varphi\| \le C_1$, und es bleibt $C \le \|\varphi\|$ zu zeigen. Wir nehmen an, es sei $C > \|\varphi\|$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $c < C$, so dass
$$(\forall \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in X)\ \ \|\varphi(\boldsymbol{x})\| \le c\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_p\|\,, \quad \text{also insbesondere}$$
$C = \sup\bigl\{\|\varphi(x_1, \ldots, x_p)\| \bigm| (x_1, \ldots, x_p) \in X\,,\ \|x_1\| \le 1\,, \ldots, \|x\|_p \le 1\bigr\} \le c$, ein Widerspruch.

2. (a) $\Rightarrow$ (b) Klar.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sei $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(\forall \boldsymbol{x} \in X)\ \big[\,\|\boldsymbol{x}\| \le \delta \implies \|\varphi(\boldsymbol{x})\| \le 1\,\big]$. Wir zeigen: $(\forall (x_1, \ldots, x_p) \in X)\ \ \|\varphi(x_1, \ldots, x_p)\| \le \delta^{-p}\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_p\|$ (dann ist $\|\varphi\| \le \delta^{-p} < \infty$).

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in X$. Ist $i \in \{1, \ldots, p\}$ mit $x_i = 0$, so ist $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ und nichts zu zeigen. Sei also $(\forall i \in \{1, \ldots, p\})\ \ x_i \ne 0$, $x_i' = \delta\|x_i\|^{-1} x_i \in X_i$ und $\boldsymbol{x}' = (x_1', \ldots, x_p')$. Dann folgt $\|\boldsymbol{x}'\| = \delta$ und daher

$$\|\varphi(\boldsymbol{x}')\| = \frac{\delta^p}{\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_p\|}\, \|\varphi(\boldsymbol{x})\| \le 1\,, \quad \text{also} \quad \|\varphi(\boldsymbol{x})\| < \delta^{-p}\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_p\|\,.$$

(c) $\Longrightarrow$ (d) Sei $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p) \in X$. Dann ist $\varphi_{\boldsymbol{a}}\colon X \to Y$ offensichtlich $\mathbb{R}$-linear, und für $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_p) \in X$ ist $\|\boldsymbol{h}\| = \max\big\{\|h_1\|, \ldots, \|h_p\|\big\}$. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h})\| &\le \sum_{i=1}^{p} \|\varphi\|\, \|a_1\| \cdot \ldots \cdot \|a_{i-1}\|\, \|h_i\|\, \|a_{i+1}\| \cdot \ldots \cdot \|a_p\| \\
&\le \Big(\sum_{i=1}^{p} \|\varphi\|\, \|a_1\| \cdot \ldots \cdot \|a_{i-1}\|\, \|a_{i+1}\| \cdot \ldots \cdot \|a_p\|\Big)\, \|\boldsymbol{h}\|\,, \quad \text{also} \quad \varphi_{\boldsymbol{a}} \in \mathsf{L}(X, Y)\,,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\|\varphi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \varphi(\boldsymbol{a}) - \varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h})\| = {} & \Big\|\sum_{i=1}^{p} \big[\varphi(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i{+}h_i, a_{i+1}{+}h_{i+1}, \ldots, a_p{+}h_p) \\
& - \varphi(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}{+}h_{i+1}, \ldots, a_p + h_p)\big] - \sum_{i=1}^{p} \varphi(a_1, \ldots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \ldots, a_p)\Big\| \\
= {} & \Big\|\sum_{i=1}^{p} \big[\varphi(a_1, \ldots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}{+}h_{i+1}, \ldots, a_p{+}h_p) - \varphi(a_1, \ldots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \ldots, a_p)\big]\Big\| \\
= {} & \Big\|\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=i+1}^{n} \big[\varphi(a_1, \ldots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j + h_j, a_{j+1}{+}h_{j+1}, \ldots, a_p{+}h_p) \\
& - \varphi(a_1, \ldots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}{+}h_{j+1}, \ldots, a_p{+}h_p)\big]\Big\| \\
= {} & \Big\|\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=i+1}^{p} \varphi(a_1, \ldots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, h_j, a_{j+1}{+}h_{j+1}, \ldots, a_p + h_p)\Big\| \\
\le {} & \Big[\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=i+1}^{p} \Big(\|\varphi\| \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \ne i}}^{j-1} \|a_\nu\| \prod_{\nu=j+1}^{p} \big(\|a_\nu\|{+}\|h_\nu\|\big)\Big)\Big]\, \|\boldsymbol{h}\|^2\,, \quad \text{woraus die Behauptung folgt.}
\end{aligned}$$

(d) $\Longrightarrow$ (a) Sei $\boldsymbol{a} \in X$. Dann ist

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h}) = 0 \quad \text{und daher} \quad \lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \varphi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \varphi(\boldsymbol{a})\,, \quad \text{also } \varphi \text{ stetig in } \boldsymbol{a}.$$

3. Für $i \in \{1, \ldots, p\}$ sei $\boldsymbol{u}^{(i)} = (u_1^{(i)}, \ldots, u_{k_i}^{(i)})$ eine $\mathbb{R}$-Basis von X_i und $\|\cdot\|_i \colon X_i \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Maximumsnorm bezüglich $\boldsymbol{u}^{(i)}$. Sei

$$(x_1, \ldots, x_p) = \Big(\sum_{\nu=1}^{k_1} a_{1,\nu} u_\nu^{(1)}, \ldots, \sum_{\nu=1}^{k_p} a_{p,\nu} u_\nu^{(p)} \Big) \in X$$

und $\varphi \colon X \to Y$ p-linear. Dann folgt

$$\begin{aligned} \|\varphi(x_1, \ldots, x_p)\| &\leq \sum_{\nu_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{\nu_p=1}^{k_p} |a_{1,\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_{n,\nu_n}| \, \|\varphi(u_{\nu_1}^{(1)}, \ldots, u_{\nu_p}^{(p)})\| \\ &\leq \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_p\| \Big(\sum_{\nu_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{\nu_n=1}^{k_n} \|\varphi\big(u_{\nu_1}^{(1)}, \ldots, u_{\nu_p}^{(p)}\big)\| \Big), \quad \text{also } \varphi \text{ stetig nach 2.} \end{aligned}$$

4. Offensichtlich sind π_i und ε_i $\mathbb{R}$-linear. Für $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in X$ ist $\|\pi_i(\boldsymbol{x})\| = \|x_i\| \leq \|\boldsymbol{x}\|$ und $\|\boldsymbol{\varepsilon}_i(x_i)\| = \|(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)\| = \|x_i\|$, also $\|\pi_i\| \leq 1$ und $\|\varepsilon_i\| \leq 1$. Ist $X_i \neq \{0\}$, $0 \neq x_i \in X_i$ und $\boldsymbol{x} = (0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \in X$, so folgt $\|\pi_i(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\| > 0$ und $\|\varepsilon(x_i)\| = \|x_i\| > 0$, also $\|\pi_i\| = \|\varepsilon_i\| = 1$. □

Satz 9.2. *Sei $p \in \mathbb{N}$.*

1. *Seien $X_1, \ldots, X_p$, Y normierte Räume und $X = X_1 \times \ldots \times X_p$ der Produktraum.*
   (a) $\mathsf{L}^p(X_1, \ldots, X_p; Y) \subset \mathrm{Abb}(X, Y)$ *ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum, und die Operatornorm $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf $\mathsf{L}^p(X_1, \ldots, X_p; Y)$.*
   (b) *Für $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in X$ sei die Auswertungsabbildung $\varepsilon_{\boldsymbol{x}} \colon \mathsf{L}^p(X_1, \ldots, X_p; Y) \to Y$ definiert durch*
   $$\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(\varphi) = \varphi(x_1, \ldots, x_p)\,.$$
   Dann ist $\varepsilon_{\boldsymbol{x}}$ eine stetige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, und $\|\varepsilon_{\boldsymbol{x}}\| \leq \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_p\|$.
   (c) *Ist Y ein Banachraum, so ist auch $\mathsf{L}^p(X_1, \ldots, X_p; Y)$ ein Banachraum.*
   (d) *Für jedes $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ ist die Abbildung*
   $$\Phi_k \colon \mathsf{L}^p(X_1, \ldots, X_p; Y) \;\to\; \mathsf{L}^k(X_1, \ldots, X_k, \mathsf{L}^{p-k}(X_{k+1}, \ldots, X_p; Y))\,,$$
   definiert durch $\Phi_k(\varphi)(x_1, \ldots, x_k)(x_{k+1}, \ldots, x_p) = \varphi(x_1, \ldots, x_p)$, eine Isometrie.
2. *Sei X ein normierter Raum. Dann ist die Abbildung*
   $$F \colon \mathsf{L}^p(\mathbb{R}, X) \;\to\; X\,, \quad \textit{definiert durch} \quad F(\varphi) = \varphi(1, \ldots, 1)\,,$$
   eine Isometrie.

Beweis. 1. Der Beweis erfolgt in einer Reihe von Schritten, von denen jeder einzelne eine einfache Übungsaufgabe darstellt und daher nicht im Detail ausgeführt wird.

a. Sind $\varphi, \psi \colon X_1 \times \ldots \times X_p \to Y$ p-linear und $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch die (wertweise definierten) Abbildungen $\varphi + \psi \colon X_1 \times \ldots \times X_p \to Y$ und $\lambda\varphi \colon X_1 \times \ldots \times X_p \to Y$ p-linear, und es gilt: $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$, $\|\lambda\varphi\| = |\lambda| \, \|\varphi\|$, und $\big[\|\varphi\| = 0 \iff \varphi = 0\big]$.

Damit folgt (a).

Wegen der wertweisen $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $\mathsf{L}^p(X_1, \ldots, X_p)$ ist $\varepsilon_{\boldsymbol{x}}$ $\mathbb{R}$-linear, und für $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in X$ und $\varphi \in \mathsf{L}^p(X_1, \ldots, X_p)$ ist $\|\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(\varphi)\| = \|\varphi(x_1, \ldots, x_p)\| \leq \|\varphi\| \, \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_p\|$, also $\|\varepsilon_{\boldsymbol{x}}\| \leq \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_p\|$. Damit folgt (b).

b. Sei $\varphi \in \mathsf{L}^p(X_1, \ldots, X_p; Y)$ und $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Für $(x_1, \ldots, x_k) \in X_1 \times \ldots \times X_k$ sei $\varphi_{(x_1,\ldots,x_k)}\colon X_{k+1} \times \ldots \times X_p \to Y$ definiert durch $\varphi_{(x_1,\ldots,x_k)}(x_{k+1}, \ldots, x_p) = \varphi(x_1, \ldots, x_p)$. Dann gilt:

- Für jedes $(x_1, \ldots, x_k) \in X_1 \times \ldots \times X_k$ ist $\varphi_{(x_1,\ldots,x_k)}$ eine $(p-k)$-lineare Abbildung mit $\|\varphi_{(x_1,\ldots,x_k)}\| \le \|\varphi\| \, \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_k\|$, also $\varphi_{(x_1,\ldots,x_k)} \in \mathsf{L}^{p-k}(X_{k+1}, \ldots, X_p; Y)$.
- Die Abbildung $\Phi_k(\varphi)\colon X_1 \times \ldots \times X_k \to \mathsf{L}^{p-k}(X_{k+1}, \ldots, X_p; Y)$, definiert durch
$$\Phi_k(\varphi)(x_1, \ldots, x_k) = \varphi_{(x_1,\ldots,x_k)}\,,$$
ist k-linear und $\|\Phi_k(\varphi)\| \le \|\varphi\|$, also $\Phi_k(\varphi) \in \mathsf{L}^k\big(X_1, \ldots, X_k; \mathsf{L}^{p-k}(X_{k+1}, \ldots, X_p)\big)$.

Nach **b.** ist Φ_k tatsächlich eine Abbildung wie behauptet.

c. Für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{L}^p(X_1, \ldots, X_p; Y)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\Phi_k(\varphi + \psi) = \Phi_k(\varphi) + \Phi_k(\psi)$ und $\Phi_k(\lambda\varphi) = \lambda\Phi_k(\varphi)$.

d. Sei $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ und $\psi \in \mathsf{L}^k\big(X_1, \ldots, X_k; \mathsf{L}^{p-k}(X_{k+1}, \ldots, X_p)\big)$. Dann ist die Abbildung $\Psi_k(\psi)\colon X_1 \times \ldots \times X_p \to Y$, definiert durch
$$\Psi_k(\psi)(x_1, \ldots, x_p) = \psi(x_1, \ldots, x_k)(x_{k+1}, \ldots, x_p)\,,$$
p-linear, und $\|\Psi_k(\psi)\| \le \|\psi\|$, also $\Psi_k(\psi) \in \mathsf{L}^p_{\mathsf{K}}(X_1, \ldots, X_p; Y)$ und $\Phi_k \circ \Psi_k(\psi) = \psi$. Für $\varphi \in \mathsf{L}^p(X_1, \ldots, X_p; Y)$ ist $\Psi_k \circ \Phi_k(\varphi) = \varphi$.

Φ_k ist $\mathbb{R}$-linear nach **c.** und bijektiv mit $\Phi_k^{-1} = \Psi_k$ nach **d.**. Für $\varphi \in \mathsf{L}^p(X_1, \ldots, X_p; Y)$ ist $\|\Phi_k(\varphi)\| \le \|\varphi\|$ nach **b.**, und $\|\varphi\| = \|\Psi_k(\Phi_k(\varphi))\| \le \|\Phi_k(\varphi)\|$ nach **d.** Daher ist Φ_k eine Isometrie.

Es bleibt (b) zu zeigen: Sei Y ein Banachraum. Wir machen Induktion nach p.

- $p = 1$: Sei $X = X_1$.

Sei $(\varphi_n)_{n\ge0}$ eine Cauchyfolge in $\mathsf{L}(X, Y)$. Wir zeigen zuerst: Für alle $x \in X$ ist $(\varphi_n(x))_{n\ge0}$ eine Cauchyfolge in Y (und daher konvergent). Sei $x \in X$. Wir müssen zeigen:
$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall m,\, n \ge n_0)\ \ \|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)\| < \varepsilon\,.$$
Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\varepsilon_0\|x\| < \varepsilon$. Dann $(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)$ $(\forall m,\, n \ge n_0)$ $\|\varphi_m - \varphi_n\| < \varepsilon_0$, und für alle $m,\, n \ge n_0$ folgt $\|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)\| = \|(\varphi_m - \varphi_n)(x)\| \le \|\varphi_m - \varphi_n\| \, \|x\| \le \varepsilon_0\|x\| < \varepsilon$. Wir definieren nun $\varphi\colon X \to Y$ durch
$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$
und zeigen: **A.** φ ist $\mathbb{R}$-linear; **B.** $(\|\varphi - \varphi_n\|)_{n\ge0} \to 0$; **C.** $\|\varphi\| < \infty$.

Beweis von **A.** Seien $x,\, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann folgt
$$\varphi(x + y) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x + y) = \lim_{n\to\infty} \big[\varphi_n(x) + \varphi_n(y)\big] = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) + \lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$
und
$$\varphi(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} \alpha\varphi_n(x) = \alpha \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \alpha\varphi(x)\,. \quad \square$$

Beweis von **B.** Wir müssen zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)$ $(\forall n \ge n_0)$ $\|\varphi - \varphi_n\| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass $(\forall m,\, n \ge n_0)$ $\|\varphi_m - \varphi_n\| < \varepsilon_0$. Für $m \ge n \ge n_0$ und $x \in X$ mit $\|x\| \le 1$ folgt $\|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)\| = \|(\varphi_m - \varphi_n)(x)\| \le \|\varphi_m - \varphi_n\| < \varepsilon_0$ und daher
$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\| \;=\; \lim_{m\to\infty} \|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)\| \le \varepsilon_0\,, \quad \text{also auch} \quad \|\varphi - \varphi_n\| \le \varepsilon_0 < \varepsilon\,. \quad \square$$

Beweis von **C.** Sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\|\varphi - \varphi_n\| < 1$. Dann folgt $\|\varphi\| \le \|\varphi - \varphi_n\| + \|\varphi_n\| < \infty$. $\square$

• $p \geq 2$, $p-1 \to p$: Die Abbildung $\Phi_1\colon \mathsf{L}^p(X_1,\dots,X_p;Y) \to \mathsf{L}\big(X_1, \mathsf{L}^{p-1}(X_2,\dots,X_p;Y)\big)$ ist eine Isometrie. $\mathsf{L}^{p-1}(X_2,\dots,X_p;Y))$ ist vollständig nach Induktionsvoraussetzung, also ist auch $\mathsf{L}\big(X_1, L^{p-1}(X_2,\dots,X_p;Y)\big)$ und damit $\mathsf{L}^p(X_1,\dots,X_p;Y)$ vollständig.

2. Auf Grund der wertweisen Verknüpfung p-linearer Abbildungen ist F $\mathbb{R}$-linear. Nach Satz 9.1.1 gilt für alle $\varphi \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R},X)$ $\|F(\varphi)\| = \|\varphi(1,\dots,,1)\| = \|\varphi\|$. Daher ist insbesondere $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$, und es bleibt die Surjektivität von F zu zeigen.

Für $x \in X$ sei $\varphi_x\colon \mathbb{R}^p \to X$ definiert durch $\varphi_x(\alpha_1,\dots,\alpha_p) = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_p x$. Dann ist $\varphi_x \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R},X)$, und $F(\varphi_x) = x$. □

Satz 9.3. *Seien X, Y, Z normierte Räume, und seien $\varphi\colon X \to Y$ und $\psi\colon Y \to Z$ $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen . Dann ist $\|\psi\circ\varphi\| \leq \|\psi\|\,\|\varphi\|$. Insbesondere ist*

$$\circ\colon \mathsf{L}(X,Y)\times\mathsf{L}(Y,Z) \;\to\; \mathsf{L}(X,Z), \qquad (\varphi,\psi) \;\mapsto\; \psi\circ\varphi\,,$$

eine stetige bilineare Abbildung mit $\|\circ\| \leq 1$, und $(\mathsf{L}(X),\circ)$ ist eine normierte Algebra.

Beweis. Es genügt, $\|\psi\circ\varphi\| \leq \|\psi\|\,\|\varphi\|$ zu beweisen. Für $x \in X$ folgt aus Satz 9.1.1

$$\|\psi\circ\varphi(x)\| = \|\psi(\varphi(x))\| \leq \|\psi\|\,\|\varphi(x)\| \leq \|\psi\|\,\|\varphi\|\,\|x\|\,, \quad \text{also} \quad \|\psi\circ\varphi\| \leq \|\psi\|\cdot\|\varphi\|\,. \qquad \square$$

Beispiele:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und Y ein normierter Raum.

   Für $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{y} = (y_1,\dots,y_n) \in Y^n$ sei $H(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \in Y$.

   Dann ist $H \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n, Y^n)$, und $\big(\boldsymbol{y} \mapsto H(\cdot,\boldsymbol{y})\big) \in \mathsf{L}\big(Y, \mathsf{L}(\mathbb{R}^n,Y)\big)$.
2. Seien X, Y normierte Räume. Dann ist die Abbildung

   $$\varepsilon\colon \mathsf{L}(X,Y)\times X \;\to\; Y\,, \qquad (\varphi,x) \;\mapsto\; \varphi(x)$$

   bilinear und stetig, und wegen $\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi\|\,\|x\|$ ist $\|\varepsilon\| \leq 1$. Insbesondere ist für jedes $x \in X$ die *Auswertungsabbildung* $\varepsilon_x\colon \mathsf{L}(X,Y) \to Y$, definiert durch $\varepsilon_x(\varphi) = \varphi(x)$, eine stetige lineare Abbildung mit $\|\varepsilon_x\| \leq \|x\|$.
3. Für jeden normierten Raum X ist die Skalarmultiplikation $\sigma\colon \mathbb{R}\times X \to X$ eine stetige bilineare Abbildung mit $\|\sigma\| \leq 1$.
4. Für p, q, $n \in \mathbb{N}$ ist die Matrixmultiplikation $\mathsf{M}_{p,q}(\mathbb{R})\times\mathsf{M}_{q,n}(\mathbb{R}) \;\to\; \mathsf{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ eine stetige bilineare Abbildung. Insbesondere ist die Abbildung $\mathsf{M}_{p,q}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$, definiert durch $(A,\boldsymbol{x}) \mapsto A\boldsymbol{x}^{\mathsf{t}}$, bilinear und stetig.
5. Ist A eine normierte Algebra, so ist die Algebrenmultiplikation $A\times A \to A$ bilinear und stetig.

Satz und Definition 9.4. *Seien m, $n \in \mathbb{N}$,*

$$A = (a_{j,\nu})_{\substack{j=1,\dots,m\\ \nu=1,\dots,n}} \in \mathsf{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \quad \textit{und} \quad \theta_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \textit{definiert durch} \quad \theta_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

(für einen Spaltenvektor $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{R}^n$). Sei $\|\cdot\|_\infty\colon \mathsf{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die von den Maximumsnormen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ induzierte Operatornorm. Dann ist

$$\|\theta_A\|_\infty \;=\; \max\Big\{\sum_{\nu=1}^{n} |a_{1,\nu}|\,,\dots,\sum_{\nu=1}^{n} |a_{m,\nu}|\,\Big\}\,.$$

Man nennt

$$\|A\|_\infty \;=\; \max\Bigl\{\sum_{\nu=1}^n |a_{1,\nu}|\,,\ldots,\sum_{\nu=1}^n |a_{m,\nu}|\,\Bigr\} \quad \text{die } \textit{Zeilensummennorm} \text{ von } A.$$

$\|\cdot\|_\infty \colon \mathsf{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Norm. Für $q \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathsf{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ ist $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty\,\|B\|_\infty$.

Beweis. Sei $l \in \{1,\ldots,m\}$ mit

$$M \;=\; \sum_{\nu=1}^n |a_{l,\nu}| \;=\; \max\Bigl\{\sum_{\nu=1}^n |a_{1,\nu}|\,,\ldots,\sum_{\nu=1}^n |a_{m,\nu}|\,\Bigr\}\,.$$

Für $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{R}^n$ ist dann

$$\|\theta_A(\boldsymbol{x})\|_\infty \;=\; \max\Bigl\{\Bigl|\sum_{\nu=1}^n a_{1,\nu}x_\nu\Bigr|,\ldots,\Bigl|\sum_{\nu=1}^n a_{m,\nu}x_\nu\Bigr|\Bigr\} \;\leq\; M\,\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$

und daher $\|\theta_A\| \leq M$. Für $\nu \in \{1,\ldots,n\}$ sei $y_\nu = \operatorname{sgn}(a_{l,\nu})$, falls $a_{l,\nu} \neq 0$, $y_\nu = 1$, falls $a_{l,\nu} = 0$, und $\boldsymbol{y} = (y_1,\ldots,y_n)^{\mathsf{t}}$. Dann ist $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$, und für alle $j \in \{1,\ldots,m\}$ ist

$$\Bigl|\sum_{\nu=1}^n a_{j,\nu}y_\nu\Bigr| \;\leq \sum_{\nu=1}^n |a_{j,\nu}| \leq M$$

mit Gleichheit für $j = l$, und daher folgt $\|\theta_A\| = M$.

Die Abbildung $\theta\colon \mathsf{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathsf{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ ist ein Isomorphismus und $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf $\mathsf{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Daher ist $\|\cdot\|_\infty$ auch eine Norm auf $\mathsf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Ist $q \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathsf{M}_{n,q}(\mathbb{R})$, so ist $\theta_{AB} = \theta_A{\circ}\theta_B$, und aus Satz 9.3 folgt

$$\|AB\|_\infty = \|\theta_A{\circ}\theta_B\|_\infty \leq \|\theta_A\|_\infty\,\|\theta_B\|_\infty = \|A\|_\infty\,\|B\|_\infty\,. \qquad \square$$

9.2. Differenzierbarkeit

Satz und Definition 9.5. *Seien X und Y normierte Räume, $D \subset X$ eine offene Teilmenge, $a \in D$, $f\colon D \to Y$ eine Abbildung und $\varphi\colon X \to Y$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.*

Man sagt, *φ approximiert f bei a*, wenn

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}\bigl[f(a+h)-f(a)-\varphi(h)\bigr] \;=\; 0 \quad \Bigl[\iff \lim_{x\to a}\frac{1}{\|x-a\|}\bigl[f(x)-f(a)-\varphi(x-a)\bigr] \;=\; 0\Bigr]\,.$$

1. *Es gibt höchstens eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi\colon X \to Y$, welche f bei a approximiert.*
2. *Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi\colon X \to Y)$ approximiere f bei a. Dann gilt:*

$$\varphi \in \mathsf{L}(X,Y) \iff f \text{ ist stetig in } a.$$

f heißt *differenzierbar* in a, wenn es ein $\varphi \in \mathsf{L}(X,Y)$ gibt, welches f bei a approximiert. Nach 1. gibt es dann genau ein solches φ. Dieses heißt *Differenzial* von f an der Stelle a,

$$\varphi = df(a) \in \mathsf{L}(X,Y)\,.$$

f heißt *differenzierbar* (in D), wenn f in jedem Punkt $a \in D$ differenzierbar ist. Ist f differenzierbar in D, so heißt die Abbildung $df\colon D \to \mathsf{L}(X,Y)$ das *Differenzial* von f in D. Ist $df\colon D \to \mathsf{L}(X,Y)$ stetig, so nennt man f *stetig differenzierbar*.

Beweis. 1. Seien $\varphi_1, \varphi_2 \colon X \to Y)$ zwei $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen, welche f bei a approximieren, und sei $\psi = \varphi_1 - \varphi_2 \colon X \to Y$. Dann folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|}\, \psi(h) = 0\,,$$

und wir zeigen $\psi = 0$. Sei $x \in X \setminus \{0\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $h_n = \frac{1}{n} x$. Dann folgt $(h_n)_{n \geq 0} \to 0$ und

$$\frac{1}{\|h_n\|}\, \psi(h_n) = \psi(x), \quad \text{also} \quad \psi(x) = 0\,.$$

2. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon(a) \subset D$, und sei $\theta \colon B_\varepsilon(0) \to Y$ definiert durch

$$\theta(h) = f(a+h) - f(a) - \varphi(h)\,.$$

Dann existiert

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|}\, \theta(h) \in Y\,, \quad \text{und daher ist} \quad \lim_{h \to 0} \theta(h) = \lim_{h \to 0} \|h\| \Big(\frac{1}{\|h\|}\, \theta(h) \Big) = 0\,.$$

Also folgt:

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

und damit die Behauptung nach Satz 9.1.2. □

Bemerkungen:
Seien X und Y normierte Räume, $D \subset X$ eine offene Teilmenge, $a \in D$ und $f \colon D \to Y$.

1. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon(a) \subset D$ und $\varphi \colon X \to Y$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:
   (a) φ approximiert f bei a.
   (b) Es gibt eine Funktion $r \colon B_\varepsilon(a) \to Y$, so dass
   $$(\forall x \in B_\varepsilon(a)) \;\; f(x) = f(a) + \varphi(x-a) + \|x-a\|\, r(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} r(x) = 0\,.$$
   (c) Es gibt eine Funktion $r \colon B_\varepsilon(0) \to Y$, so dass
   $$(\forall h \in B_\varepsilon(0)) \;\; f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \|h\|\, r(h) \quad \text{und} \quad \lim_{h \to 0} r(h) = 0\,.$$
2. Ist f differenzierbar in a, so ist $df(a) \colon X \to Y$ stetig, und f ist stetig in a.
3. Sei $D_0 \subset D$ offen und $a \in D_0$. Dann gilt:
   $$f \;\text{ ist differenzierbar in }\; a \quad \Longleftrightarrow \quad f \,|\, D_0 \;\text{ ist differenzierbar in }\; a,$$
   und es ist $df(a) = d(f \,|\, D_0)(a) \in \mathsf{L}(X,Y)$.

Satz 9.6. *Sei Y ein normierter Raum, $D \subset \mathbb{R}$ offen, $a \in D$ und $f \colon D \to Y$. Dann sind äquivalent:*

(a) *f ist differenzierbar im Sinne von* Definition 7.2, *das heißt, es existiert*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \big[f(x) - f(a) \big] \in Y\,.$$

(b) *f ist differenzierbar im Sinne von* Satz und Definition 9.5*, das heißt, es existiert eine stetige lineare Abbildung $df(a) \in \mathsf{L}(\mathbb{R}, Y)$, so dass*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{|x-a|}\big[f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\big] \;=\; 0\,.$$

Ist f differenzierbar in a, so ist $f'(a) = df(a)(1) \in Y$ und $(\forall h \in \mathbb{R})\;\; df(a)(h) = hf'(a)$.

Beweis. Nach Satz 9.2 ist $F \colon \mathsf{L}(\mathbb{R}, Y) \to Y$, definiert durch $F(\varphi) = \varphi(1)$, eine Isometrie.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sei $\varphi = F^{-1}\big(f'(a)\big) \colon \mathbb{R} \to Y$, also $(\forall h \in \mathbb{R})\;\; \varphi(h) = f'(a)h$. Für $x \in D \setminus \{a\}$ folgt

$$\Big\|\frac{1}{|x-a|}\,[f(x) - f(a) - \varphi(x-a)]\Big\| = \Big\|\frac{1}{x-a}\,[f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)]\Big\|$$
$$= \Big\|\frac{1}{x-a}[f(x) - f(a)] - f'(a)\Big\| \quad \text{und daher} \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{|x-a|}\big[f(x) - f(a) - \varphi(x-a)\big] = 0\,,$$

also (b) mit $df(a) = \varphi$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Für $x \in D$ ist $df(a)(x-a) = (x-a)df(a)(1)$, also

$$0 = \lim_{x \to a}\Big\|\frac{1}{|x-a|}\big[f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\big]\Big\| = \lim_{x \to a}\Big\|\frac{1}{x-a}\big[f(x) - f(a)\big] - df(a)(1)\Big\|$$

und daher

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a}\big[f(x) - f(a)\big] \;=\; df(a)(1) \in Y\,.$$

Folglich gilt (a) mit $f'(a) = df(a)(1)$. □

Satz 9.7. *Sei $p \in \mathbb{N}$, seien $X_1, \ldots, X_p, Y$ normierte Räume und $X = X_1 \times \ldots \times X_p$ der Produktraum.*

1. *Für $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \colon Y \to X$ gilt: $\varphi \in \mathsf{L}(Y, X) \iff (\forall i \in \{1, \ldots, p\})\;\; \varphi_i \in \mathsf{L}(Y, X_i)$. Ist $\varphi \in \mathsf{L}(Y, X)$ so folgt $\|\varphi\| = \max\{\|\varphi_1\|, \ldots, \|\varphi_p\|\}$.*
2. *Sei $D \subset Y$ offen, $a \in D$ und $f = (f_1, \ldots, f_p) \colon Y \to X$.*

   $$f \;\text{ ist differenzierbar in }\; a \iff (\forall i \in \{1, \ldots, p\})\;\; f_i \;\text{ ist differenzierbar in }\; a\,.$$

   Ist f differenzierbar in a, so ist $df(a) = (df_1(a), \ldots, df_p(a)) \in \mathsf{L}(Y, X)$.
3. *Sei $\varphi \in \mathsf{L}^p(X_1, \ldots, X_p; Y)$. Dann ist φ differenzierbar. Für $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p) \in X$ ist $d\varphi(\boldsymbol{a}) \in \mathsf{L}(X, Y)$ gegeben durch*

   $$d\varphi(\boldsymbol{a})(h_1, \ldots, h_p) = \sum_{i=1}^{p} \varphi(a_1, \ldots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \ldots, a_p)\,,$$

Beweis. 1. Für $i \in \{1, \ldots, p\}$ sei $\pi_i \colon X \to X_i$ die Projektion und $\varepsilon_i \colon X_i \to X$ die Einlagerung (siehe Satz 9.1.5). Dann ist $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ und $\varphi = \varepsilon_1 \circ \varphi_1 + \ldots + \varepsilon_p \circ \varphi_p$, also φ genau dann $\mathbb{R}$-linear, wenn alle φ_i $\mathbb{R}$-linear sind. Mit Satz 9.3 folgt $\|\varphi_i\| \le \|\pi_i\|\,\|\varphi\| \le \|\varphi\|$, und daher $\max\{\|\varphi_1\|, \ldots, \|\varphi_p\|\} \le \|\varphi\|$. Für $x \in Y$ ist

$$\|\varphi(x)\| = \max\{\|\varphi_1(x)\|, \ldots, \|\varphi_p(x)\|\} \le \max\{\|\varphi_1\|, \ldots, \|\varphi_p\|\}\,\|x\|$$

und daher $\|\varphi\| \le \max\{\|\varphi_1\|, \ldots, \|\varphi_p\|\}$.

2. Nach 1. (man beachte die komponentenweise Konvergenz in X).

3. Nach Satz 9.1.2. □

Satz 9.8. *Seien X und Y normierte Räume.*

1. $f \in \mathsf{L}(X,Y) \implies f$ *ist differenzierbar, und* $(\forall a \in X)\ df(a) = f$.
2. *Sei* $\emptyset \neq D \subset X$ *offen und* $f\colon D \to Y$ *konstant. Dann ist f differenzirbar und* $df = 0$.
3. *Sei $D \subset X$ offen, $a \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und seien $f, g\colon D \to Y$ differenzierbar in a. Dann sind auch $f+g\colon D \to Y$ und $\lambda f\colon D \to Y$ differenzierbar in a,*

$$d(f+g)(a) = df(a) + dg(a) \quad \textit{und} \quad d(\lambda f)(a) = \lambda\, df(a)\,.$$

Beweis. 1. Nach Satz 9.7.

2. Ist f konstant und $a \in X$, so approximiert $0 \in \mathsf{L}(X,Y)$ die Funktion f bei a.

3. Es ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\big[f(a+h) - f(a) - df(a)(h)\big] = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\big[g(a+h) - g(a) - dg(a)(h)\big] = 0\,,$$

also auch

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\big[(f+g)(a+h) - (f+g)(a) - \big(df(a) + dg(a)\big)(h)\big]\\ &\quad = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\big[f(a+h) - f(a) - df(a)(h)\big] + \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\big[g(a+h) - g(a) - dg(a)(h)\big] = 0\end{aligned}$$

und

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\big[(\lambda f)(a+h) - (\lambda f)(a) - \lambda df(a)(h)\big] = \lambda \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\big[f(a+h) - f(a) - df(a)(h)\big] = 0\,.$$

Wegen $df(a) + dg(a) \in \mathsf{L}(X,Y)$ und $\lambda df(a) \in \mathsf{L}(X,Y)$ folgt die Behauptung. □

Satz 9.9 (Kettenregel)**.** *Seien X, Y, Z normierte Räume, $D \subset X$ und $E \subset Y$ seien offen, $a \in D$, $f\colon D \to Y$ sei differenzierbar in a, $f(D) \subset E$, und $g\colon E \to Z$ sei differenzierbar in $f(a)$. Dann ist $g\circ f\colon D \to Z$ differenzierbar in a, und*

$$d(g\circ f)(a) = dg\big(f(a)\big)\circ df(a) \in \mathsf{L}(X,Z)\,.$$

Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon(a) \subset D$ und $B_\varepsilon(f(a)) \subset E$, und seien $r\colon B_\varepsilon(a) \to Y$ und $r_1\colon B_\varepsilon(f(a)) \to Z$, so dass

$$\lim_{h\to 0} r(h) = 0\,, \quad \lim_{k\to 0} r_1(k) = 0\,,$$

und für alle $h \in B_\varepsilon(0) \subset X$ und $k \in B_\varepsilon(0) \subset Y$ ist

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\|\, r(h) \quad \text{und} \quad g\big(f(a)+k\big) = g\circ f(a) + dg\big(f(a)\big)(k) + \|k\|\, r_1(k)\,.$$

Sei $(h_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ mit $(h_n)_{n\geq 0} \to 0$. Wir zeigen:

$$\Big(\frac{1}{\|h_n\|}\big\|(g\circ f)(a+h_n) - (g\circ f)(a) - dg(f(a))\circ df(a)(h_n)\big\|\Big)_{n\geq 0} \;\to\; 0\,.$$

Für $n \geq 0$ sei $k_n = df(a)(h_n) + \|h_n\| r(h_n)$. Dann ist $\|k_n\| \leq \|df(a)\|\,\|h_n\| + \|h_n\|\,\|r(h_n)\|$, und wegen $(k_n)_{n\geq 0} \to 0$ können wir annehmen, dass $(\forall n \geq 0)\ k_n \in B_n(0)$. Dann folgt

$f(a+h_n) = f(a) + k_n$ und daher

$$\begin{aligned}\big\|(g\circ f)(a+h_n)-&(g\circ f)(a) - dg(f(a))\circ df(a)(h_m)\big\| \\ &= \big\|dg(f(a))(k_n) + \|k_n\|r_1(k_n) - dg(f(a)\big(df(a)(h_n)\big)\big\| \\ &= \big\|dg(f(a))\big(\|h_n\|r(h_n)\big) + \|k_n\|r_1(k_n)\big\| \\ &\le \|h_n\|\,\big[\|dg(f(a))\|\,\|r(h_n)\| + \big(\|df(a)\| + \|r(h_n)\|\big)\,\|r_1(k_n)\big]\,.\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Beispiele:

1. Seien X, Y, Z normierte Räume, $D \subset X$ offen, $a \in D$, $f\colon D \to Y$ sei differenzierbar in a und $\varphi \in \mathsf{L}(Y, Z)$. Dann ist $\varphi\circ f\colon D \to Z$ differenzierbar in a, und
$$d(\varphi\circ f)(a) = d\varphi\big(f(a)\big)\circ df(a) = \varphi\circ df(a) \in \mathsf{L}(X, Z)\,.$$
2. Seien V, X, Y normierte Räume, $D \subset X$ offen, $a \in D$, $f\colon D \to Y$ sei differenzierbar in a, $\varphi_0 \in \mathsf{L}(V, X)$, $c \in X$ und $\varphi\colon V \to X$ definiert durch $\varphi(t) = \varphi_0(t) + c$. Sei $t_0 \in V$ mit $\varphi(t_0) = a$. Dann ist $\varphi^{-1}(D) \subset V$ offen (nach Satz 4.17.1), $f\circ\varphi\colon \varphi^{-1}(D) \to Y$ ist differenzierbar in t_0, und
$$d(f\circ\varphi)(t_0) = df\big(\varphi(t_0)\big)\circ d\varphi(t_0) = df(a)\circ\varphi_0\,.$$
Ist insbesondere $V = \mathbb{R}$, $\varphi_0(t) = tu$ und $\varphi(t) = tu + c$ mit $u \in X$, so folgt
$$(f\circ\varphi)'(t_0) = d(f\circ\varphi)(t_0)(1) = df(a)\big(\varphi_0(1)\big) = df(a)(u)\,.$$

Satz 9.10 (Schrankensatz)**.** *Seien X, Y normierte Räume, $\emptyset \ne D \subset X$ offen und $f\colon D \to Y$ differenzierbar.*

1. *Seien a, $b \in D$ mit $[a, b] \subset D$. Dann folgt $\|f(b) - f(a)\| \le \|df\|_{[a,b]}\,\|b - a\|$.*
Ist f stetig differenzierbar, so ist auch die Funktion
$$[0, 1] \;\to\; Y\,, \quad \textit{definiert durch} \quad t \;\mapsto\; df\big(a + t(b-a)\big)(b-a)\,,$$
stetig, und falls Y ein Banachraum ist, gilt
$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df\big(a + t(b-a)\big)(b-a)\,dt\,.$$
2. *Sei D polygonzusammenhängend und $df = 0$. Dann ist f konstant.*

Beweis. 1. Sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to X$ definiert durch $\varphi(t) = a + t(b-a)$. Dann ist $\varphi\big([0,1]\big) = [a, b] \subset D$ und daher $[0, 1] \subset \varphi^{-1}(D)$. Nach Satz 4.17 ist $\varphi^{-1}(D) \subset \mathbb{R}$ offen, und nach Satz 9.9 gilt für alle $t \in \varphi^{-1}(D)$: $f\circ\varphi$ ist differenzierbar in t, und
$$(f\circ\varphi)'(t) = d(f\circ\varphi)(t)(1) = df\big(\varphi(t)\big)\circ d\varphi(t)(1) = df\big(\varphi(t)\big)\big(\varphi'(t)\big) = df\big(\varphi(t)\big)(b-a)\,.$$
Nach Satz 7.8 folgt $\|f(b) - f(a)\| = \|f\circ\varphi(1) - f\circ\varphi(0)\| \le \|(f\circ\varphi)'\|_{[0,1]}$. Für $t \in [0, 1]$ ist $\|(f\circ\varphi)'(t)\| \le \|df(\varphi(t))\|\,\|b-a\| \le \|df\|_{[a,b]}\,\|b-a\|$ und daher $\|(f\circ\varphi)'\|_{[0,1]} \le \|df\|_{[a,b]}\,\|b-a\|$. Sei nun $df\colon D \to \mathsf{L}(X, Y)$ stetig, sei $t \in [0, 1]$ und $(t_n)_{n\ge0}$ eine Folge in $[0, 1]$ mit $(t_n)_{n\ge0} \to t$. Dann folgt $\big(df(\varphi(t_n))\big)_{n\ge0} \to df(\varphi(t))$, und

$$\begin{aligned}\big\|df\big(\varphi(t_n)\big)(b-a) - df\big(\varphi(t)\big)(b-a)\big\| &= \big\|\big[df\big(\varphi(t_n)\big) - df\big(\varphi(t)\big)\big](b-a)\big\| \\ &\le \big\|df\big(\varphi(t_n)\big) - df\big(\varphi(t)\big)\big\|\,\big\|b-a\big\|\,,\end{aligned}$$

also $\big(df\big(\varphi(t_n)\big)(b-a)\big)_{n\geq 0} \to df\big(\varphi(t)\big)(b-a)$. Daher ist die Abbildung

$$t \;\mapsto\; df\big(a+t(b-a)\big)(b-a) = (f\circ\varphi)'(t)$$

stetig, und

$$f(b)-f(a) = (f\circ\varphi)(1)-(f\circ\varphi)(0) = \int_0^1 (f\circ\varphi)'(t)dt\,.$$

2. Seien a, $b \in D$ und $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b \in D$, so dass $(\forall j \in \{1,\ldots,n\})\;\; [a_{j-1}, a_j] \subset D$. Nach 1. ist dann $(\forall j \in \{1,\ldots,n\})\;\; f(a_{j-1}) = f(a_j)$, also auch $f(a) = f(b)$. □

9.3. Richtungsableitungen und partielle Ableitungen

Definition 9.3. Seien X, Y normierte Räume, $D \subset X$ offen, $a \in D$, $h \in X\setminus\{0\}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\big(\forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon)\big)\;\; a+th \in D$. Sei $\varphi\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to D$ definiert durch $\varphi(t) = a+th$. Sei $f\colon D \to Y$. Man sagt, f ist *in* a *in Richtung* h *differenzierbar*, wenn die Funktion $f\circ\varphi$ in 0 differenzierbar ist. Man nennt dann

$$\partial_h f(a) = (f\circ\varphi)'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big[f(a+th)-f(a)\big] \in X$$

die *Richtungsableitung von* f *in Richtung* h.

Man sagt, f ist (in D) *in Richtung* h *differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $a \in D$ in Richtung h differenzierbar ist.

Satz 9.11. *Seien* X, Y *normierte Räume,* $D \subset X$ *offen,* $a \in D$, $h \in X\setminus\{0\}$ *und* $f\colon D \to Y$.

1. *Sei* f *differenzierbar in* a. *Dann ist* f *in* a *in Richtung* h *differenzierbar, und*

$$\partial_h f(a) = df(a)(h)\,.$$

2. *Ist* f *stetig differenzierbar, so ist auch* $\partial_h f\colon D \to Y$ *stetig in* a.

Beweis. 1. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\big(\forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon)\big)\;\; a+th \in D$, und sei $\varphi\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to D$ definiert durch $\varphi(t) = a+th$. Nach Satz 9.9 ist $f\circ\varphi$ differenzierbar in 0, und

$$(f\circ\varphi)'(0) = d(f\circ\varphi)(0)(1) = df\big(\varphi(0)\big)\circ d\varphi(0)(1) = df(a)(h)\,.$$

Daher ist f in a in Richtung h differenzierbar, und es ist $\partial_h f(a) = df(a)(h)$.

2. Die Abbildung $\varepsilon_h\colon \mathsf{L}(X,Y) \to Y$, definiert durch $\varepsilon_h(\varphi) = \varphi(h)$, ist nach Satz 9.1.4 stetig. Daher ist auch $\partial_h f = \varepsilon_h\circ df\colon D \to Y$ stetig. □

Bemerkung (Geometrische Deutung von Richtunsableitung und Differenzial):

Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\boldsymbol{a} \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und

$$G_f = \{(\boldsymbol{x},y) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \mid \boldsymbol{x} \in D\,,\; y = f(\boldsymbol{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{der Graph von } f\,.$$

Geometrische Vorstellung: $G_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Hyperfläche über der Basis $D \subset \mathbb{R}^n$.

1. Tangenten:
   Sei $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\big(\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\big)$ $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h} \in D$. Dann ist
   $$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}\,, \quad \text{definiert durch} \quad \gamma(t) = (\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}, f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}))\,,$$
   eine Kurve auf G_f durch $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$ mit Basisrichtung $\boldsymbol{h}$. Sei $v \in \mathbb{R}$ und
   $$g = \big(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})\big) \;+\; \mathbb{R}\,(\boldsymbol{h}, v) \;\subset \mathbb{R}^{n+1}$$
   eine Gerade durch $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$ mit Basisrichtung $\boldsymbol{h}$ und Steigung v. g heißt *Tangente* an G_f in $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$ mit Basisrichtung $\boldsymbol{h}$, wenn
   $$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big[f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}) - \big(f(\boldsymbol{a}) + tv\big)\Big] = 0\,,$$
   und daher gilt:
   $$g \quad \text{ist Tangente an} \quad G_f \quad \text{in} \quad (\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})) \quad \text{mit Basisrichtung} \quad \boldsymbol{h} \quad \Longleftrightarrow \quad v = \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a})\,.$$
   Dann ist $(\boldsymbol{h},\, \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a}))$ ein Tangentialvektor an G_f in $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$ mit Basisrichtung $\boldsymbol{h}$.
2. Tangentialhyperebene:
   Sei $c \in \mathbb{R}$, $l \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(\boldsymbol{x}) = c + l(\boldsymbol{x})$. Dann ist $\mathrm{Graph}(g) \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene, und es gilt:
   $$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})) \in \mathrm{Graph}(g) \quad &\Longleftrightarrow \quad g(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}) \quad \Longleftrightarrow \quad f(\boldsymbol{a}) = c + l(\boldsymbol{a}) \\ &\Longleftrightarrow \quad (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n) \;\; g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + l(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\,.\end{aligned}$$
   Sei nun $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})) \in \mathrm{Graph}(g)$, also
   $$T_l = \mathrm{Graph}(g) = \big\{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y = f(\boldsymbol{a}) + l(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\,\big\}\,.$$
   Die Hyperebene T_l heißt *Tangentialhyperebene* an G_f in $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$, wenn
   $$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{1}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|}\big[f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})\big] \;=\; \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{1}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|}\big[f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - l(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\big] \;=\; \boldsymbol{0}\,.$$
   Daher gilt:
   Genau dann ist T_l Tangentialhyperebene an G_f in $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$, wenn f in $\boldsymbol{a}$ differenzierbar ist, und $l = df(\boldsymbol{a})$.

Definition 9.4. Sei $n \in \mathbb{N}$, und für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^n$ der i-te n-dimensionale Einheitsvektor. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\boldsymbol{a} \in D$, Y ein normierter Raum, $f\colon D \to Y$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Man sagt, f ist in $\boldsymbol{a}$ *partiell nach der i-ten Koordinate* (oder *partiell nach x_i*) differenzierbar, wenn f in $\boldsymbol{a}$ in Richtung $\boldsymbol{e}_i$ differenzierbar ist. Man schreibt
$$\partial_i f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \;=\; \partial_{x_i} f(\boldsymbol{a}) \;=\; f_{x_i}(\boldsymbol{a}) \;=\; \partial_{\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{a})\,.$$
Man sagt, f ist (in D) *partiell nach der i-ten Koordinate* (oder *partiell nach x_i*) differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ partiell nach x_i differenzierbar ist. Man nennt dann $\partial_i\colon D \to Y$ die *partielle Ableitung* von f nach der i-ten Koordinate.

Bemerkungen:
Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in D$, Y ein normierter Raum, $f\colon D \to Y$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Genau dann ist f in $\boldsymbol{a}$ partiell nach der i-ten Koordinate differenzierbar, wenn der nachstehende Limes in Y existiert:

$$\partial_i f(\boldsymbol{a}) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_n)\right].$$

2. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset D$, und sei

$$f_{\boldsymbol{a},i}\colon (a_i-\varepsilon, a_i+\varepsilon) \to Y \quad \text{definiert durch} \quad f_{\boldsymbol{a},i}(x) = f(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_n).$$

Genau dann ist f in $\boldsymbol{a}$ partiell nach der i-ten Koordinate differenzierbar, wenn $f_{\boldsymbol{a},i}$ in a_i differenzierbar ist, und dann ist $\partial_i f(\boldsymbol{a}) = f'_{\boldsymbol{a},i}(a_i)$.

Satz 9.12. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, Y ein normierter Raum und $f\colon D \to Y$.*

1. *Sei $\boldsymbol{a} \in D$ und f differenzierbar in $\boldsymbol{a}$. Dann ist f in $\boldsymbol{a}$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ partiell nach der i-ten Koordinate differenzierbar, es ist $\partial_i f(\boldsymbol{a}) = df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{e}_i)$, und*

$$(\forall \boldsymbol{h} = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n)\;\; df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^n h_i\,\partial_i f(\boldsymbol{a}).$$

2. *Sei $\boldsymbol{a} \in D$. Für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ sei f in D partiell nach der i-ten Koordinate differenzierbar, und $\partial_i f$ sei stetig in $\boldsymbol{a}$. Dann ist f differenzierbar in $\boldsymbol{a}$.*
3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   (a) *f ist stetig differenzierbar.*
   (b) *$(\forall i \in \{1,\dots,n\})$ f ist in D partiell nach der i-ten Koordinate differenzierbar, und $\partial_i f\colon D \to Y$ ist stetig.*

Beweis. 1. Sei $i \in \{1,\dots,n\}$. Nach Satz 9.11 ist f in $\boldsymbol{a}$ partiell nach der i-ten Koordinate differenzierbar, und $\partial_i f(\boldsymbol{a}) = f_{\boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{a}) = df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{e}_i)$. Für $\boldsymbol{h} = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\boldsymbol{h} = \sum_{i=1}^n h_i \boldsymbol{e}_i \quad \text{und daher} \quad df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^n h_i df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(\boldsymbol{a}).$$

2. Wir zeigen: Ist $\varphi \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n, Y)$ definiert durch

$$\varphi(h_1,\dots,h_n) = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(\boldsymbol{a}), \quad \text{so gilt} \quad \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}\left[f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \varphi(\boldsymbol{h})\right] = \boldsymbol{0},$$

also $\varphi = df(\boldsymbol{a})$. Es ist also zu zeigen:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\;(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\;\left[B_\delta(\boldsymbol{a}) \subset D \;\;\wedge\;\; \big(\forall \boldsymbol{h} \in B_\delta(\boldsymbol{0})\big)\;\; \|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \varphi(\boldsymbol{h})\| \le \varepsilon\|\boldsymbol{h}\|\right].$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen der Stetigkeit von $\partial_i f$ in $\boldsymbol{a}$ gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\delta(\boldsymbol{a}) \subset D$ und

$$(\forall \boldsymbol{h}' \in B_\delta(\boldsymbol{0}))\;(\forall i \in \{1,\dots,n\})\;\; \|\partial_i f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}') - \partial_i f(\boldsymbol{a})\| < \frac{\varepsilon}{3n}.$$

Sei nun $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{h} = (h_1,\dots,h_n) \in B_\delta(\boldsymbol{0})$ und $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_n)$. Für $i \in \{1,\dots,n\}$ sei

$$\begin{aligned} A_i = {} & f(a_1{+}h_1,\dots,a_{i-1}{+}h_{i-1},a_i{+}h_i,a_{i+1},\dots,a_n) \\ & - f(a_1{+}h_1,\dots,a_{i-1}{+}h_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_n) - h_i\partial_i f(a_1{+}h_1,\dots,a_{i-1}{+}h_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_n). \end{aligned}$$

Dann folgt

$$
\begin{aligned}
\big\|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})&-f(\boldsymbol{a})-\varphi(\boldsymbol{h})\big\| \\
&= \Big\|\sum_{i=1}^n \big[A_i + h_i\partial_i f(a_1{+}h_1,\ldots,a_{i-1}{+}h_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n) - h_i\partial_i f(\boldsymbol{a})\Big\| \\
&\le \sum_{i=1}^n \|A_i\| + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f(a_1{+}h_1,\ldots,a_{i-1}{+}h_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n) - \partial_i f(\boldsymbol{a})\|\,\|\boldsymbol{h}\| \\
&\le \sum_{i=1}^n \|A_i\| + \frac{\varepsilon}{3}\|\boldsymbol{h}\|\,.
\end{aligned}
$$

Für $i \in \{1,\ldots,n\}$ sei $g_i\colon [0,1] \to Y$ definiert durch

$$
\begin{aligned}
g_i(t) = f(a_1{+}h_1,\ldots,a_{i-1}{+}h_{i-1},a_i{+}th_i,a_{i+1},\ldots,a_n)& \\
- \partial_i f(a_1{+}h_1,\ldots,a_{i-1}{+}h_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)th_i&
\end{aligned}
$$

Dann ist g_i differenzierbar, und für alle $t \in [0,1]$ ist

$$
\begin{aligned}
g_i'(t) =&\partial_i f(a_1{+}h_1,\ldots,a_{i-1}{+}h_{i-1},a_i+th_i,a_{i+1},\ldots,a_n)h_i - \partial_i f(\boldsymbol{a})h_i \\
&- \big[\partial_i f(a_1{+}h_1,\ldots,a_{i-1}{+}h_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)h_i - \partial_i f(\boldsymbol{a})h_i\big]\,, \quad \text{also} \quad \|g_i'(t)\| < \frac{2\varepsilon}{3n}|h_i|\,,
\end{aligned}
$$

und mit Satz 9.10 folgt

$$
\|A_i\| = \|g_i(1) - g_i(0)\| \le \|g_i'\|_{[0,1]} \le \frac{2\varepsilon}{3n}\|\boldsymbol{h}\|\,,
$$

also $\|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \varphi(\boldsymbol{h})\| \le \varepsilon\|\boldsymbol{h}\|$.

3. (a) $\Rightarrow$ (b) Nach Satz 9.11.

(b) $\Rightarrow$ (a) Nach 2. ist f differenzierbar in D und es bleibt die Stetigkeit von df zu zeigen. Sei $H\colon Y^n \to \mathsf{L}(\mathbb{R}^n,Y)$ definiert durch $H(y_1,\ldots,y_n)(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$. Dann ist H eine stetige lineare Abbildung (siehe Beispiel 1 nach Satz 9.3), und nach 1. ist $df = H\circ(\partial_1 f,\ldots,\partial_n f)\colon D \to \mathsf{L}(\mathbb{R}^n,Y)$, also df stetig. □

Beispiel: Seien $f,\, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0,0) = g(0,0 = 0$ und

$$
\big(\forall (x,y) \ne (0,0)\big) \;\; f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}\,.
$$

Für jedes $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\boldsymbol{h}\| = 1$ existieren die Richtungsableitungen $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0)$ und $\partial_{\boldsymbol{h}} g(0,0)$, f und g sind nicht differenzierbar in $(0,0)$, f ist stetig in $(0,0)$ und g ist unstetig in $(0,0)$.

Definition 9.5. Seien $n,\, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\boldsymbol{a} \in D$, $f = (f_1,\ldots,f_m)\colon D \to \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar in $\boldsymbol{a}$. Dann heißt die Matrix

$$
\mathsf{J}f(\boldsymbol{a}) = \big(\partial_j f_i(\boldsymbol{a})\big)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}} \in \mathsf{M}_{m,n}(\mathbb{R})
$$

die *Jacobi'sche Matrix* oder *Funktionalmatrix* von f in $\boldsymbol{a}$.

Im Falle $m = 1$ heißt

$$
\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \;=\; \mathsf{J}f(\boldsymbol{a}) = (\partial_1 f(\boldsymbol{a}),\ldots,\partial_n f(\boldsymbol{a})) \in \mathbb{R}^n
$$

der *Gradient* von f in $\boldsymbol{a}$.

Im Falle $m = n$ heißt

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(\boldsymbol{a}) \;=\; \det \mathsf{J}f(\boldsymbol{a})$$

die *Funktionaldeterminante* von f in $\boldsymbol{a}$.

Bemerkung:
Seien $n,\, m \in \mathbb{N}$ und $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_m) \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Für $i \in \{1,\dots,n\}$ ist dann

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i^{(n)})^{\mathsf{t}} = \big(\varphi_1(\boldsymbol{e}_i^{(n)}),\dots,\varphi_m(\boldsymbol{e}_i^{(n)})\big)^{\mathsf{t}}$$

ein m-dimensionaler Spaltenvektor und

$$\mathcal{M}(\varphi) = \big(\varphi(\boldsymbol{e}_1^{(n)})^{\mathsf{t}},\dots,\varphi(\boldsymbol{e}_n^{(n)})^{\mathsf{t}}\big) \;=\; \big(\varphi_i(\boldsymbol{e}_j^{(n)})\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \in \mathsf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

die φ (bezüglich der kanonischen Basen) zugeordnete Matrix.
Für $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\varphi(\boldsymbol{x})^{\mathsf{t}} \;=\; \sum_{j=1}^{n} x_j\,\varphi(\boldsymbol{e}_j^{(n)})^{\mathsf{t}} \;=\; \Big(\sum_{j=1}^{n}\varphi_1(\boldsymbol{e}_j^{(n)})x_j,\dots,\sum_{j=1}^{n}\varphi_m(\boldsymbol{e}_j^{(n)})x_j\Big)^{\mathsf{t}} \;=\; \mathcal{M}(\varphi)\,\boldsymbol{x}^{\mathsf{t}}\,.$$

Sei nun $q \in \mathbb{N}$ und $\psi = (\psi_1,\dots,\psi_q) \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^q)$. Dann ist $\psi\circ\varphi \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^q)$, und

$$\mathcal{M}(\psi\circ\varphi) \;=\; \mathcal{M}(\psi)\mathcal{M}(\varphi) \;\in \mathsf{M}_{q,n}(\mathbb{R})\,.$$

$\big[$denn: Für $\nu \in \{1,\dots,q\}$ und $j \in \{1,\dots,n\}$ ist

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\psi\circ\varphi)_{\nu,j} \;&=\; (\psi_\nu\circ\varphi)(\boldsymbol{e}_j^{(n)}) \;=\; \psi_\nu\Big(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(\boldsymbol{e}_j^{(n)})\,\boldsymbol{e}_i^{(m)}\Big)\\ &=\; \sum_{i=1}^{m}\psi_\nu(\boldsymbol{e}_i^{(m)})\,\varphi_i(\boldsymbol{e}_j^{(n)}) \;=\; \big(\mathcal{M}(\psi)\mathcal{M}(\varphi)\big)_{\nu,j}\,.\big]\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathcal{M}\colon \mathsf{L}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Algebrenisomorphismus.
Sei nun $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\boldsymbol{a} \in D$ und $f = (f_1,\dots,f_m)\colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\boldsymbol{a}$. Dann ist

$$df_i(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{e}_j^{(n)}) \;=\; \partial_j f_i(\boldsymbol{a}) \;=\; \mathsf{J}f(\boldsymbol{a})_{i,j}\,, \quad \text{und daher} \quad (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)\;\; df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}) \;=\; \mathsf{J}f(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{x}^{\mathsf{t}}\,.$$

Ist f stetig differenzierbar, so ist $\mathsf{J}\colon D \to \mathsf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ eine stetige Abbildung, und im Falle $m = n$ ist auch $\det\mathsf{J}\colon D \to \mathbb{R}$ stetig.
Sei nun außerdem $E \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f(\boldsymbol{a}) \in E$ und $g = (g_1,\dots,g_q)\colon E \to \mathbb{R}^q$ differenzierbar in $f(\boldsymbol{a})$. Dann ist nach Satz 9.9

$$d(g\circ f)(\boldsymbol{a}) = dg\big(f(\boldsymbol{a})\big)\circ df(\boldsymbol{a}) \quad \text{und daher} \quad \mathsf{J}(g\circ f)(\boldsymbol{a}) = \mathsf{J}g\big(f(\boldsymbol{a})\big)\mathsf{J}f(\boldsymbol{a}) \in \mathsf{M}_{q,n}(\mathbb{R})\,.$$

Explizit enthält diese Matrizengleichung die *Kettenregel für partielle Ableitungen*:

$$(\forall i \in \{1,\dots,n\})\;(\forall \nu \in \{1,\dots,q\}) \quad \partial_i(g_\nu\circ f)(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{m}\partial_j g_\nu\big(f(\boldsymbol{a})\big)\,\partial_i f_j(\boldsymbol{a})\,.$$

Satz und Definition 9.13 (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$*.*
Die n-dimensionale *Polarkoordinatenabbildung* $P_n = (P_{n,1}, \ldots, P_{n,n})\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist rekursiv definiert durch

$$P_2(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \quad \text{und} \quad P_{n+1}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \big(P_n(r\cos\varphi_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}),\, r\sin\varphi_n\big)\,.$$

P_3 heißt *Kugelkoordinatenabbildung*. Es ist

$$P_3(r, \varphi_1, \varphi_2) = (r\cos\varphi_1\cos\varphi_2, r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, r\sin\varphi_2)\,,$$

und man nennt in diesem Falle φ_1 die *geographische Länge* und φ_2 die *geographische Breite* des Punktes $P_3(r, \varphi_1, \varphi_2)$.

1. $(\forall (r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \in \mathbb{R}^n)\ \ \|P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\| \;=\; |r|$.
2. *P_n ist stetig differenzierbar, und*
$$(\forall (r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \in \mathbb{R}^n) \quad \det \mathsf{J}P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \;=\; r^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}(\cos\varphi_i)^{i-1}\,.$$
3. *Sei* $\Pi_n = \mathbb{R}_{>0}\times(-\pi, \pi)\times(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2} \subset \mathbb{R}^n$ *und* $\Sigma = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0}\times\{0\})$ *die geschlitzte Ebene. Dann ist*
$$P_n \,|\, \Pi_n \colon \Pi_n \;\to \Sigma\times\mathbb{R}^{n-2} \subset \mathbb{R}^n \quad \textit{bijektiv.}$$

Beweis. Induktion nach n.

- $n = 2$:
  1. $\|P_2(r, \varphi)\|^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$.
  2. $P_{2,1}$ und $P_{2,2}$ haben stetige partielle Ableitungen. Daher ist P_2 stetig differenzierbar,
$$\mathsf{J}P_2(r, \varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\,r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det \mathsf{J}(r, \varphi) = r\,.$$

  3. Nach Satz 6.9 ist die Abbildung $\theta'\colon \mathbb{R}_{>0}\times(-\pi, \pi] \to \mathbb{C}^\times$, definiert durch $\theta'(r, \varphi) = r\mathsf{e}^{i\varphi}$, bijektiv, und daher ist auch $P_2 \,|\, \mathbb{R}_{>0}\times(-\pi, \pi]\colon \mathbb{R}_{>0}\times(-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ bijektiv. Wegen $P_2(\mathbb{R}_{>0}\times\{\pi\}) = \mathbb{R}_{<0}\times\{0\}$ folgt $P_2(\Pi_2) = \Sigma$.
- $n \geq 2,\ n \to n+1$:
  1. Für $(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist

$$\|P_{n+1}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\|^2 \;=\; \|P_n(r\cos\varphi_n,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\|^2 + r^2\sin^2\varphi_n \;=\; r^2\cos^2\varphi_n + r^2\sin^2\varphi_n = r^2\,.$$

  2. Seien $\Psi,\ \Phi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch

$$\Phi(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = (r\cos\varphi_n,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1},r\sin\varphi_n) \ \text{ und } \ \Psi(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = \big(P_n(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}),\varphi_n\big).$$

Dann ist $P_{n+1} = \Psi\circ\Phi$, Ψ und Φ sind stetig differenzierbar, und

$$\mathsf{J}P_{n+1}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \;=\; \mathsf{J}\Psi(r\cos\varphi_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, r\sin\varphi_n)\,\mathsf{J}\phi(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)\,.$$

Es ist

$$\mathsf{J}\Psi(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \begin{pmatrix}\mathsf{J}P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) & \mathbf{0}^t\\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}$$

und

$$\mathsf{J}\Phi(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \begin{pmatrix}\cos\varphi_n & \mathbf{0} & -r\sin\varphi_n\\ \mathbf{0}^t & I & \mathbf{0}^t\\ \sin\varphi_n & \mathbf{0} & r\cos\varphi_n\end{pmatrix}$$

(I bezeichnet die Einheitsmatrix). Damit folgt

$$\begin{aligned}\det \mathsf{J}P_{n+1}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) &= \det \mathsf{J}P_n(r\cos\varphi_n,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\, r \\ &= (r\cos\varphi_n)^{n-1}\Big(\prod_{i=2}^{n-1}(\cos\varphi_i)^{i-1}\Big)\, r \;=\; r^n\cdot\prod_{i=2}^{n}(\cos\varphi_i)^{i-1}\,.\end{aligned}$$

3. Wir müssen zeigen: $(\forall \boldsymbol{x}\in\Sigma\times\mathbb{R}^{n-1})\ (\exists!\,\boldsymbol{y}\in\Pi_{n+1})\ \ P_{n+1}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}$.
Sei $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\in\Sigma\times\mathbb{R}^{n-1}$ und $r=\|\boldsymbol{x}\|$. Wegen $(x_1,x_2)\neq(0,0)$ ist $|x_{n+1}|<r$, und daher gibt es ein $\varphi_n\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ mit $x_{n+1}=r\sin\varphi_n$. Wegen

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\|^2=r^2-x_{n+1}^2=r^2\cos^2\varphi_n \quad\text{ist}\quad \|(x_1,\ldots,x_n)\|=r\cos\varphi_n\,,$$

und nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\in(-\pi,\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)^{n-2}$ mit $(x_1,\ldots,x_n)=P_n(r\cos\varphi_n,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$, also $\boldsymbol{x}=P_{n+1}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$.
Es ist noch die Eindeutigkeit von $(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ zu zeigen. Sei dazu $(r',\varphi_1',\ldots,\varphi_n')\in\Pi_{n+1}$ mit $P_{n+1}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)=P_{n+1}(r',\varphi_1',\ldots,\varphi_n')$. Nach 1. ist dann $r=r'$, und es folgt

$$\sin\varphi_n=\sin\varphi_n'\,,\quad P_n(r\cos\varphi_n,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) \;=\; P_n\big(r\cos\varphi_n',\varphi_1',\ldots,\varphi_{n-1}'\big)\,,$$

also nach Induktionsvoraussetzung $\cos\varphi_n=\cos\varphi_n'$, $(\forall j\in\{1,\ldots,n-1\})\ \ \varphi_j=\varphi_j'$, und schließlich auch $\varphi_n=\varphi_n'$. □

Bemerkung: Komplexe Differenzierbarkeit.
Sei $D\subset\mathbb{C}$ offen, $a\in D$ und $f\colon D\to\mathbb{C}$. Nach Definition 9.5 heißt f differenzierbar in a, wenn es ein $\varphi\in\mathsf{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ gibt mit

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}\big[f(a+h)-f(a)-\varphi(h)\big]=0 \quad \Big[\text{äquivalent:}\quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big[f(a+h)-f(a)-\varphi(h)\big]=0\Big]\,.$$

Nach Definition 7.1 heißt f differenzierbar in a, wenn

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big[f(a+h)-f(a)\big]\quad\text{in } \mathbb{C} \text{ existiert}\,.$$

Die beiden Definitionen sind nicht gleichwertig. Im Folgenden nennen wir f *komplex differenzierbar* in a, wenn f in a im Sinne von Definition 7.1 in a differenzierbar ist, und wir nenen f *reell differenzierbar* in a, wenn f in a im Sinne von Definition 9.5 differenzierbar ist.
Beispiel: Die Funktion $\Re\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}$-linear und daher reell differenzierbar nach Satz 9.8 (es ist $\forall a\in\mathbb{C})\ \ d\Re(a)=\Re\in\mathsf{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})$), nach der Bemerkung in 8.2 ist aber $\Re$ in keinem Punkt $a\in\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Satz 9.14. *Sei $D\subset\mathbb{C}$ offen, $a\in D$ und $f\colon D\to\mathbb{C}$. Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ vermöge $(x,y)=x+\mathrm{i}y$ und definieren $u,v\colon D\to\mathbb{R}$ durch $u=\Re f$ und $v=\Im f$, also*

$$\big(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\big)\ \ f(x+\mathrm{i}y)=f(x,y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\,.$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) *f ist komplex differenzierbar in a (im Sinne von* Definition 7.1*).*
(b) *f ist reell differenzierbar in a (im Sinne von* Definition 9.5*), und*

$$(\forall c\in\mathbb{C})\ \ df(a)(c)=c\,df(a)(1)\,.$$

(c) *u und v sind reell differenzierbar in a, und es gelten die* Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen

$$u_x(a) = v_y(a) \quad \textit{und} \quad u_y(a) = -v_x(a)\,.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist $f'(a) = df(a)(1)$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) Sei $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\varphi(h) = f'(a)h$. Dann ist $\varphi \in \mathsf{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, und $(\forall c \in \mathbb{C})\ \ \varphi(c) = c\varphi(1)$. Wegen

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big[f(a+h) - f(a) - \varphi(h)\big] \;=\; \lim_{h\to 0}\Big[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\Big] = 0$$

ist f reell differenzierbar in a, und $\varphi = df(a)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Nach Satz 9.7.2 sind u und v reell differenzierbar in a, und nach Satz 9.12 gilt für $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$df(a)(h_1 + \mathsf{i}h_2) = du(a)(h_1,h_2) + \mathsf{i}\,dv(a)(h_1,h_2) = u_x(a)h_1 + u_y(a)h_2 + \mathsf{i}\big[v_x(a)h_1 + v_y(a)h_2\big]\,.$$

Insbesondere erhalten wir

$$df(a)(1) = u_x(a) + \mathsf{i}v_x(a)\,, \quad df(a)(\mathsf{i}) = u_y(a) + \mathsf{i}v_y(a)\,,$$

und wegen $df(a)(\mathsf{i}) = \mathsf{i}\,df(a)(1) = -v_x(a) + \mathsf{i}u_x(a)$ folgt $u_x(a) = v_y(a)$ und $u_y(a) = -v_x(a)$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Nach Satz 9.7.2 ist f reell differenzierbar in a, und $df(a) = du(a) + \mathsf{i}\,dv(a)$. Insbesondere folgt für $h = h_1 + \mathsf{i}h_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} df(a)(h) &= u_x(a)h_1 + u_y(a)h_2 + \mathsf{i}\,[v_x(a)h_1 + v_y(a)h_2] = u_x(a)(h_1 + \mathsf{i}h_2) + \mathsf{i}\,v_x(a)(h_1+\mathsf{i}h_2) \\ &= (h_1 + \mathsf{i}h_2)[u_x(a) + \mathsf{i}\,v_x(a)] = h\,df(a)(1)\,, \end{aligned}$$

und daher

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big[f(a+h) - f(a) - h\,df(a)(1)\big] = 0\,, \quad \text{also} \quad f'(a) = df(a)(1)\,. \qquad \square$$

9.4 Höhere Differenziale

Konvention:

Sei $p \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, und seien X, Y normierte Räume. Im Folgenden identifizieren wir die normierten Räume $\mathsf{L}^p(X,Y)$ und $\mathsf{L}^k(X,\, \mathsf{L}^{p-k}(X,Y))$ vermöge der Isometrie aus Satz 9.2. Auf Grund dieser Identifizierung gilt dann für alle $\varphi \in \mathsf{L}^p(X,Y) = \mathsf{L}^k(X,\, \mathsf{L}^{p-k}(X,Y))$ und alle $(v_1, \ldots, v_p) \in X^p$:

$$\varphi(v_1, \ldots, v_p) = \varphi(v_1, \ldots, v_k)(v_{k+1}, \ldots, v_p) \in Y\,.$$

Definition 9.6. Seien X, Y normierte Räume, $\emptyset \ne D \subset X$ offen, $f\colon D \to Y$ und $p \in \mathbb{N}$.

1. f heißt *p-mal differenzierbar* (in D), wenn es zu jedem $k \in \{0, \ldots, p\}$ eine Abbildung $f^{(k)}\colon D \to \mathsf{L}^k(X,Y)$ mit $f^{(0)} = f\colon D \to Y$ gibt, so dass

   $$(\forall k \in \{0, \ldots, p-1\}) \quad f^{(k+1)} = df^{(k)}\colon D \;\to\; \mathsf{L}(X,\, \mathsf{L}^k(X,Y)) = \mathsf{L}^{k+1}(X,Y)\,.$$

   Man nennt dann $d^pf = f^{(p)}\colon D \to \mathsf{L}^p(X,Y)$ die *p-te Ableitung* oder das *Differenzial p-ter Ordnung* von f. Für jedes $a \in D$ ist $d^pf(a)\colon X^p = X \times \ldots \times X \to Y$ eine stetige p-lineare Abbildung, und für $p \ge 2$ ist

   $$(\forall (x_1, \ldots, x_p) \in X^p) \;\; d^pf(a)(x_1, \ldots, x_p) = d(d^{p-1}f)(a)(x_1)(x_2, \ldots, x_p)$$

[es ist $d^{p-1}f\colon D \to \mathsf{L}^{p-1}(X,Y)$ und daher

$$d^pf(a) = d(d^{p-1}f)(a) \in \mathsf{L}(X, \mathsf{L}^{p-1}(X,Y)) = \mathsf{L}^p(X,Y)\,.]$$

Wir setzen $d^0 f = f\colon D \to \mathsf{L}_0(X,Y) = Y$.

2. f heißt *p-mal stetig differenzierbar* oder eine *C^p-Funktion*, wenn f p-mal differenzierbar und $d^pf\colon D \to \mathsf{L}^p(X,Y)$ stetig ist.

   f heißt *beliebig oft differenzierbar* oder eine *C^∞-Funktion*, wenn $(\forall p \in \mathbb{N})$ f ist p-mal differenzierbar.

Bemerkungen: Seien X, Y normierte Räume, $\emptyset \neq D \subset Y$ offen

1. Sei $f\colon D \to Y$, $p \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Genau dann ist f p-mal [stetig] differenzierbar, wenn f k-mal differenzierbar und $d^kf\colon D \to \mathsf{L}^k(X,Y)$ $(p-k)$-mal [stetig] differenzierbar ist. Es ist dann $d^pf = d^{p-k}(d^kf)$.
2. Für $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei $C^p(D,Y)$ die Menge der C^p-Funktionen $f\colon D \to Y$. Dann ist $C^p(D,Y) \subset \operatorname{Abb}(D,Y)$ ein Teilraum, $(\forall p \in \mathbb{N})$ $C^p(D,Y) \supset C^{p+1}(D,Y)$, und

$$C^\infty(D,Y) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} C^p(D,Y)\,.$$

3. Jede affin-linear Funktion $f\colon X \to Y$ ist eine C^∞-Funktion. Ist $f = \varphi + c$ mit $\varphi \in \mathsf{L}(X,Y)$ und $c \in Y$, so ist $(\forall z \in X)$ $df(z) = \varphi$ (konstant), und $d^2f = 0$.
4. Sei $D_0 \subset D$ offen, $p \in \mathbb{N}$ und $f\colon D \to Y$ p-mal [stetig] differenzierbar. Dann ist auch $f\,|\,D_0\colon D_0 \to Y$ p-mal [stetig] differenzierbar, und

$$d^p(f\,|\,D_0) = (d^pf)\,|\,D_0\colon D_0 \to \mathsf{L}^p(X,Y)\,.$$

5. Sei $p \in \mathbb{N}$, $f\colon D \to Y$, und für jeden Punkt $a \in D$ sei $U \in \mathcal{U}(a)$ offen, so dass $f\,|\,U$ p-mal [stetig] differenzierbar ist. Dann ist f p-mal [stetig] differenzierbar.
6. Seien p, $n \in \mathbb{N}$, und sei $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ der Produktraum normierter Räume $Y_1, \ldots, Y_n$.
   (a) Eine Abbildung $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\colon X \to Y$ ist genau dann p-linear, wenn ihre Komponentenfunktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ p-linear sind. Dann ist

$$\|\varphi\| = \max\{\|\varphi_1\|, \ldots, \|\varphi_n\|\}\,,$$

   also insbesondere $\mathsf{L}^p(X,Y) = \mathsf{L}^p(X,Y_1) \times \ldots \times \mathsf{L}^p(X,Y_n)$.
   (b) Sei $\emptyset \neq D \subset X$ offen und $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon D \to Y$. Genau dann ist f p-mal [stetig] differenzierbar, wenn alle f_i p-mal [stetig] differenzierbar sind, und dann ist

$$d^pf = (d^pf_1, \ldots, d^pf_n)\colon D \;\to\; \mathsf{L}^p(X,Y) \;=\; \mathsf{L}^p(X,Y_1) \times \ldots \times \mathsf{L}^p(X,Y_n)\,.$$

Satz 9.15. *Seien X, Y normierte Räume, $\emptyset \neq D \subset X$ offen, $p \in \mathbb{N}$, und sei $f\colon D \to Y$ p-mal [stetig] differenzierbar. Sei $(v_1, \ldots, v_{p-1}) \in X^{p-1}$, und sei $F\colon D \to Y$ definiert durch*

$$F(z) = d^{p-1}f(z)(v_1, \ldots, v_{p-1})\,.$$

Dann ist F [stetig] differenzierbar, und

$$(\forall z \in D)\ (\forall v \in X)\quad dF(z)(v) = d^pf(z)(v, v_1, \ldots, v_{p-1})\,.$$

Beweis. 1. Sei $\varepsilon\colon \mathsf{L}^{p-1}(X,Y) \to Y$ die Auswertungsabbildung, definiert durch $\varepsilon(\varphi) = \varphi(v_1,\ldots,v_{p-1})$. Dann ist $F = \varepsilon\circ d^{p-1}f$, und ε ist eine stetige lineare Abbildung nach Satz 9.1. Nach Satz 9.9 folgt für $z \in D$ und $v \in X$

$$dF(z)(v) = \varepsilon\circ d(d^{p-1}f)(z)(v) = d(d^{p-1}f)(z)(v)(v_1,\ldots,v_{p-1}) = d^pf(z)(v,v_1,\ldots,v_{p-1})\,.$$

Insbesondere ist $dF = \varepsilon\circ d(d^{p-1}f)$, und daher folgt aus der Stetigkeit von $d^pf = d(d^{p-1}f)$ die Stetigkeit von dF. □

Satz 9.16. *Seien X, Y, Z normierte Räume.*

1. *Sei $\beta \in \mathsf{L}^2(X,Y;Z)$ eine stetige bilineare Abbildung. Dann ist β eine C^∞-Funktion, und $d^3\beta = 0$.*
2. *Seien $\emptyset \neq D \subset X$ und $\emptyset \neq E \subset Y$ offen, $p \in \mathbb{N}$, seien $f\colon D \to Y$ und $g\colon E \to Z$ p-mal [stetig] differenzierbar und $f(D) \subset E$.*
   (a) *$g\circ f\colon D \to Z$ ist p-mal [stetig] differenzierbar.*
   (b) *Sei $\varphi \in \mathsf{L}(Y,Z)$. Dann ist $\varphi\circ f\colon D \to Z$ p-mal [stetig] differenzierbar, und*
   $$(\forall z \in D)\quad d^p(\varphi\circ f)(z) = \varphi\circ d^pf(z)\colon X^p \to Y \to Z\,.$$
   (c) *Sei $\varphi \in \mathsf{L}(X,Y)$, $c \in Y$ und $f = \varphi + c$. Dann ist $g\circ f\colon D \to Z$ p-mal [stetig] differenzierbar, und für alle $z \in D$ und $(v_1,\ldots,v_p) \in X^p$ gilt*
   $$d^p(g\circ f)(z)(v_1,\ldots,v_p) = d^pg\big(f(z)\big)\big(\varphi(v_1),\ldots,\varphi(v_p)\big)\,.$$
3. (Produktregel) *Sei V ein normierter Raum, $\emptyset \neq D \subset V$ offen, seien $f\colon D \to X$ und $g\colon D \to Y$. Sei*
   $$*\colon X\times Y \to Z \qquad (x,y) \mapsto x*y$$
   eine bilineare stetige Abbildung, und sei das $*$-Produkt $f*g\colon D \to X$ definiert durch $(f*g)(x) = f(x)*g(x)$.
   (a) *Sei $a \in D$, und seien f und g beide differenzierbar in a. Dann ist auch $f*g$ differenzierbar in a, und*
   $$(\forall v \in V)\quad d(f*g)(a)(v) \;=\; f(a)*dg(a)(v) \;+\; df(a)(v)*g(a)\,.$$
   (b) *Sei $p \in \mathbb{N}$, und seien f und g beide p-mal [stetig] differenzierbar. Dann ist auch $f*g$ p-mal [stetig] differenzierbar.*

Beweis. 1. Nach Satz 9.7 ist β differenzierbar, und

$$\big(\forall (x,y),\,(v,w) \in X\times Y\big)\quad d\beta(x,y)(v,w) = \beta(x,w) + \beta(v,y)\,.$$

Für (x,y), (x',y'), $(v,w) \in X\times Y$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} d\beta\big((x,y)+(x',y')\big)(v,w) &= d\beta(x+x',y+y')(v,w) = \beta(x+x',w) + \beta(v,y+y') \\ &= \beta(x,w) + \beta(x',w) + \beta(v,y) + \beta(v,y') \\ &= d\beta(x,y)(v,w) + d\beta(x',y')(v,w) = \big[d\beta(x,y) + d\beta(x',y')\big](v,w)\,, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d\beta\big(\alpha(x,y)\big)(v,w) &= d\beta(\alpha x,\alpha y)(v,w) = \beta(\alpha x,w) + \beta(v,\alpha y) \\ &= \alpha\beta(x,w) + \alpha\beta(v,y) = \alpha\beta(x,y)(v,w) \end{aligned}$$

also $d\beta\big((x,y)+(x',y')\big) = d\beta(x,y)+d\beta(x',y')$ und $d\beta\big(\alpha(x,y)\big) = \alpha\beta(x,y)$. Daher ist $d\beta\colon X\times Y \to \mathsf{L}(X\times Y,Z)$ $\mathbb{R}$-linear. Für alle (x,y), $(v,w)\in X\times Y$ ist

$$\begin{aligned}\|d\beta(x,y)(v,x)\| &\le \|\beta(x,w)\| + \|\beta(v,y)\| \le \|\beta\|\,\|x\|\,\|w\| + \|\beta\|\,\|v\|\,\|y\| \\ &\le 2\|\beta\| \max\big\{\|x\|,\|y\|\big\}\,\max\big\{\|v\|,\|w\|\big\}\,,\end{aligned}$$

also $\|d\beta(x,y)\| \le 2\|\beta\|\max\big\{\|x\|,\|y\|\big\} = 2\|\beta\|\,\|(x,y)\|$. Daher ist $d\beta$ stetig, $d^2\beta$ konstant und $d^3\beta = 0$.

2. (a) Induktion nach p.

$p=1$: Nach Satz 9.9.

$p\ge 2$, $p-1\to p$: Nach Satz 9.9 ist $(\forall z\in D)$ $d(g\circ f)(z) = dg\big(f(z)\big)\circ df(z)$. Sei nun $\beta\colon \mathsf{L}(Y,Z)\times\mathsf{L}(X,Y)\to\mathsf{L}(X,Z)$ definiert durch $\beta(\varphi,\psi)=\varphi\circ\psi$. β ist eine stetige bilineare Abbildung, also eine C^∞-Funktion nach 1., und $d(g\circ f) = \beta\circ(dg\circ f, df)$. Die Funktionen dg, f und df sind $(p-1)$-mal [stetig] differenzierbar. Nach Induktionsvoraussetzung ist auch $dg\circ f$ $(p-1)$-mal [stetig] differenzierbar, und daher ist $(dg\circ f, df)\colon D\to \mathsf{L}(Y,Z)\times\mathsf{L}(X,Y)$ ebenfalls $(p-1)$-mal [stetig] differenzierbar. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann auch $d(g\circ f)=\beta\circ(dg\circ f,df)$ $(p-1)$-mal [stetig] differenzierbar, also $g\circ f$ p-mal [stetig] differenzierbar.

(b) Nach (a) ist $\varphi\circ f$ p-mal [stetig] differenzierbar. Die Formel beweisen wir durch Induktion nach p.

$p=1$: Nach Satz 9.9.

$p\ge 2$, $p-1\to p$: Sei $(\forall z\in D)$ $d^{p-1}(\varphi\circ f)(z) = \varphi\circ d^{p-1}f(z)$. Dann folgt nach Satz 9.9 $d^p(\varphi\circ f)(z) = d\varphi\big(d^{p-1}f(z)\big)\circ d^pf(z) = \varphi\circ d^pf(z)$.

(c) Nach (a) ist $g\circ f$ p-mal [stetig] differenzierbar. Die Formel beweisen wir durch Induktion nach p.

$p=1$: Nach Satz 9.9, da $df=\varphi$ (konstant).

$p\ge 2$, $p-1\to p$: Sei $(v_1,\dots,v_p)\in X^p$, und sei $F\colon D\to Z$ definiert durch

$$F(z) \;=\; d^{p-1}(g\circ f)(z)(v_2,\dots,v_p) \;=\; d^{p-1}g\big(f(z)\big)\big(\varphi(v_2),\dots,\varphi(v_p)\big)$$

(nach Induktionsvoraussetzung). Nach Satz 9.15 ist F differenzierbar, und

$$(\forall z\in D)\;\; dF(z)(v_1) = d^p(g\circ f)(z)(v_1,\dots,v_p)\,.$$

Sei nun $\varepsilon\colon \mathsf{L}^{p-1}(Y,Z)\to Z$ definiert durch $\varepsilon(\psi)=\psi\big(\varphi(v_2),\dots,\varphi(v_p)\big)$. ε ist stetig und linear, und $F=\varepsilon\circ d^{p-1}g\circ f$. Daher folgt für alle $z\in D$

$$\begin{aligned}dF(z)(v_1) \;&=\; \varepsilon\circ d(d^{p-1}g)\big(f(z)\big)\big(df(z)(v_1)\big) \;=\; d(d^{p-1}g)\big(f(z)\big)\big(\varphi(v_1)\big)\big(\varphi(v_2),\dots,\varphi(v_p)\big)\\ &=\; d^pg\big(f(z)\big)\big(\varphi(v_1),\varphi(v_2),\dots,\varphi(v_p)\big)\,.\end{aligned}$$

3. (a) Sei $\beta = *\colon X\times Y\to Z$. Dann ist $f*g = \beta\circ(f,g)\colon V\to X\times Y\to Z$. Nach 1. und Satz 9.9 gilt für alle $v\in V$

$$\begin{aligned}d(f*g)(a)(v) &= d\beta(f,g)(a)\circ d(f,g)(a)(v) = d\beta\big(f(a),g(a)\big)\big(df(a)(v),dg(a)(v)\big)\\ &= \beta\big(f(a),dg(a)(v)\big) + \beta\big(df(a)(v),g(a)\big) = f(a)*dg(a)(v) + df(a)(v)*g(a)\,.\end{aligned}$$

(b) Nach (a) und 2. $\square$

Satz 9.17 (Satz von Schwarz)**.** *Seien X, Y normierte Räume, $\emptyset \neq D \subset X$, $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, sei $f\colon D \to Y$ p-mal differenzierbar und $z \in D$. Dann ist $d^p f(z) \in \mathsf{L}_p(X,Y)$ symmetrisch, das heißt,*

$$(\forall (v_1, \ldots, v_p) \in X^p)\ (\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p)\quad d^p f(z)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = d^p f(z)(v_1, \ldots, v_p)\,.$$

Beweis. Induktion nach p.

• $p = 2$: Seien $z \in D$ und $h,\, k \in X$. Wir zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ \|d^2 f(z)(k,h) - d^2 f(z)(h,k)\| \leq \varepsilon$. Ist $k = 0$ oder $h = 0$, so ist nichts zu zeigen. Seien also

$$h,\, k \in X \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2\,(\|h\|^2 + \|k\|^2 + 3\,\|h\|\,\|k\|)}\,.$$

Es ist

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\big[df(z+v) - df(z) - d(df)(z)(v)\big] = 0 \in \mathsf{L}(X,Y)\,,$$

und daher

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ \ \big[\,B_\delta(z) \subset D\ \wedge\ \big(\forall v \in B_\delta(0)\big)\ \ \|df(z+v) - df(z) - d(df)(z)(v)\| \leq \varepsilon_0 \|v\|\,\big]\,.$$

Sei $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\eta < \max\Big\{\frac{\delta}{2\|h\|}, \frac{\delta}{2\|k\|}\Big\}, \quad h_0 = \eta h \quad \text{und} \quad k_0 = \eta k\,.$$

Sei $E = \big\{t \in \mathbb{R} \,\big|\, z + th_0 + k_0 \in B_\delta(z)\ \wedge\ z + th_0 \in B_\delta(z)\big\}$. Dann ist $E \subset \mathbb{R}$ offen, $[0,1] \subset E$, und wir definieren

$$g\colon E \to Y \quad \text{durch} \quad g(t) = f(z + th_0 + k_0) - f(z + th_0)\,.$$

g ist differenzierbar, und für $t \in E$ ist

$$\begin{aligned} g'(t) &= df(z + th_0 + k_0)(h_0) - df(z + th_0)(h_0) \\ &= \big[df(z + th_0 + k_0) - df(z) - d(df(z))(th_0 + k_0)\big](h_0) \\ &\quad - \big[df(z + th_0) - df(z) - d(df)(z)(th_0)\big](h_0) + \big[d(df)(z)(th_0 + k_0) - d(df)(z)(th_0)\big](h_0) \end{aligned}$$

und

$$\big[d(df)(z)(th_0 + k_0) - d(df)(z)(th_0)\big](h_0) = d^2 f(z)(k_0, h_0)\,.$$

Wegen $\|th_0\| < \delta$ und $\|th_0 + k_0\| < \delta$ folgt

$$\begin{aligned} \|g'(t) - d^2 f(z)(k_0,h_0)\| \ &\leq\ \|df(z + th_0 + k_0) - df(z) - d(df)(z)(th_0 + k_0)\|\,\|h_0\| \\ &\qquad + \|df(z + th_0) - df(z) - d(df)(z)(th_0)\|\,\|h_0\| \\ &\leq\ \varepsilon_0 \|th_0 + k_0\|\,\|h_0\| \ +\ \varepsilon_0 \|th_0\|\,\|h_0\| \leq 2\varepsilon_0 t \|h_0\|^2 + \varepsilon_0 \|k_0\|\,\|h_0\|\,. \end{aligned}$$

Sei nun $g_1\colon [0,1] \to Y$ definiert durch $g_1(t) = g(t) - tg'(0)$. Dann ist g_1 differenzierbar, und nach Satz 7.8 folgt

$$\|g_1(1) - g_1(0)\| = \|g(1) - g(0) - g'(0)\| \leq \|g_1'\|_{[0,1]} = \sup\big\{\|g'(t) - g'(0)\| \,\big|\, t \in [0,1]\big\}\,.$$

Für $t \in [0,1]$ ist

$$\|g'(t) - g'(0)\| \leq \|g'(t) - d^2 f(z)(k_0,h_0)\| + \|g'(0) - d^2 f(z)(k_0,h_0)\| \leq 2\varepsilon_0 t \|h_0\|^2 + 2\varepsilon_0 \|k_0\|\,\|h_0\|$$

und daher

$$\begin{aligned} \|g(1) - g(0) - d^2 f(z)(k_0,h_0)\| &= \|f(z{+}h_0{+}k_0) - f(z{+}h_0) - f(z{+}k_0) + f(z) - d^2 f(z)(k_0,h_0)\| \\ &\leq\ \|g(1) - g(0) - g'(0)\| + \|g'(0) - d^2 f(z)(k_0,h_0)\| \leq\ 2\varepsilon_0 \|h_0\|^2 + 3\varepsilon_0 \|h_0\|\,\|k_0\|\,. \end{aligned}$$

Nach Vertauschung von h_0 und k_0 folgt

$$\|g(1)-g(0)-d^2f(z)(h_0,k_0)\| \;\le\; 2\varepsilon_0\|k_0\|^2+3\varepsilon_0\|k_0\|\,\|h_0\|\,.$$

Wir erhalten damit

$$\|d^2f(z)(k_0,h_0)-d^2f(z)(h_0,k_0)\| \;\le\; 2\varepsilon_0\big(\|h_0\|^2+\|k_0\|^2+3\,\|k_0\|\,\|h_0\|\big)$$

also $\eta^2\|d^2f(z)(k,h)-d^2f(z)(h,k)\|\le\varepsilon\eta^2$, woraus die Behauptung folgt.

- $p\ge 3,\ \ p-1\to p$: Sei $z\in D$ und

$$\Gamma=\big\{\sigma\in\mathfrak{S}_p \;\big|\; \big(\forall(v_1,\dots,v_p)\in X^p\big)\ \ d^pf(z)(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})=d^pf(z)(v_1,\dots,v_p)\,\big\}\,.$$

$\Gamma\subset\mathfrak{S}_p$ ist eine Untergruppe, und es genügt, zu zeigen:

A. $(12)\in\Gamma$. **B.** $(\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n)\ \ \big[\,\sigma(1)=1 \implies \sigma\in\Gamma\,\big]$.

Aus **A** und **B** folgt nämlich $\Gamma=\mathfrak{S}_p$. Um das einzusehen, sei $\tau\in\mathfrak{S}_p$. Ist $\tau(1)=1$, so folgt $\tau\in\Gamma$. Ist $\tau(1)=i\in\{2,\dots,p\}$, so ist $(1,i)\tau\in\Gamma$, $(1,i)=(2,i)(1,2)(2,i)\in\Gamma$ und daher $\tau=(1,i)\big[(1,i)\tau\big]\in\Gamma$.

Beweis von **A.** Seien $F\colon D\to Y$ und $\varepsilon\colon \mathsf{L}^{p-2}(X,Y)\to Y$ definiert durch

$$F(z)=d^{p-2}f(z)(v_3,\dots,v_p) \quad\text{und}\quad \varepsilon(\varphi)=\varphi(v_3,\dots,v_p)\,.$$

Dann ist $\varepsilon\in\mathsf{L}(\mathsf{L}^{p-2}(X,Y),Y)$ und $F=\varepsilon\circ d^{p-2}f$, also

$$\begin{aligned} d^2F(z)(v_1,v_2) &= \varepsilon\circ d^2(d^{p-2}f)(z)(v_1,v_2) \;=\; d^2(d^{p-2}f)(z)(v_1,v_2)(v_3,\dots,v_p)\\ &= d^pf(v_1,v_2,v_3,\dots,v_p)\,, \end{aligned}$$

und nach dem für $p=2$ Gezeigten ist

$$d^2F(z)(v_1,v_2)=d^2F(z)(v_2,v_1)\,,\quad \text{also}\quad d^pf(v_1,v_2,v_3,\dots,v_p)=d^pf(v_2,v_1,v_3,\dots,v_p)\,.$$

Beweis von **B.** Sei $\sigma\in\mathfrak{S}_p$, $\sigma(1)=1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$F(z)=(d^{p-1}f)(z)(v_2,\dots,v_p)=(d^{p-1}f)(z)(v_{\sigma(2)},\dots,v_{\sigma(p)})\,,$$

und nach Satz 9.15 folgt $dF(z)(v)=d^pf(z)(v_1,v_2,\dots,v_p)=d^pf(z)(v_1,v_{\sigma(2)},\dots,v_{\sigma(p)})$. □

Definition 9.7. Sei Y ein normierter Raum, $n\in\mathbb{N}$, $\emptyset\ne D\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D\to Y$ eine Abbildung, $p\in\mathbb{N}$ und $(i_1,\dots,i_p)\in\{1,\dots,n\}^p$. Man sagt, f besitzt eine *partielle Ableitung p-ter Ordnung* nach dem Koordinaten-p-tupel $(i_1,\dots,i_p)$, wenn es eine Folge von Abbildungen $f=f^{(0)},\ f^{(1)},\ \dots,f^{(p)}\colon D\to Y$ gibt, so dass für alle $\nu\in\{1,\dots,p\}$ gilt: $f^{(\nu-1)}$ ist partiell nach der i_ν-ten Koordinate differenzierbar, und $f^{(\nu)}=\partial_{i_\nu}f^{(\nu-1)}$. Schreibweisen:

$$f^{(p)} \;=\; \partial_{i_p}\dots\partial_{i_2}\partial_{i_1}f \;=\; f_{x_{i_1},\dots,x_{i_p}} \;=\; \frac{\partial^pf}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_p}}\colon D\to Y\,.$$

Man sagt, f besitzt [*stetige*] *partielle Ableitungen p-ter Ordnung*, wenn für alle Koordinaten-p-tupel $(i_1,\dots,i_p)\in\{1,\dots,n\}^p$ gilt: f besitzt eine partielle Ableitung n-ter Ordnung nach dem Koordinaten-p-tupel $(i_1,\dots,i_p)$ [und diese ist stetig].

Bemerkung:
Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon D \to \mathbb{R}^m$. Sein $p \in \mathbb{N}$ und $(i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^p$. Genau dann besitzt f eine partielle Ableitung p-ter Ordnung nach dem Koordinaten-p-tupel $(i_1, \ldots, i_p)$, wenn alle Komponentenfuntkionen $f_1, \ldots, f_m$ solche besitzen, und dann ist

$$f_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}} = \big((f_1)_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}}, \ldots, (f_m)_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}}\big)\colon D \to \mathbb{R}^m \,.$$

Satz 9.18. *Sei Y ein normierter Raum, $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to Y$ und $p \in \mathbb{N}$.*

1. *Sei f p-mal [stetig] differenzierbar. Dann besitzt f [stetige] partielle Ableitungen p-ter Ordnung, und für alle $(i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^p$, alle Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ und alle $\boldsymbol{z} \in D$ ist*
$$\partial_{i_1}\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_p} f(\boldsymbol{z}) \;=\; \partial_{i_{\sigma(1)}}\partial_{i_{\sigma(2)}} \ldots \partial_{i_{\sigma(p)}} f(\boldsymbol{z}) \;=\; d^p f(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p}) \,.$$
Sind $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \in \mathbb{R}^n$ und ist $\boldsymbol{v}_\nu = (v_{\nu,1}, \ldots, v_{\nu,p})$, so gilt für alle $\boldsymbol{z} \in D$
$$d^p f(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p) = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} v_{1,i_1} \cdot \ldots \cdot v_{p,i_p}\, \partial_{i_1}\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_p} f(\boldsymbol{z}) \,.$$
2. *Besitzt f stetige partielle Ableitungen p-ter Ordnung, so ist f ein C^p-Funktion.*
3. *Genau dann ist f eine C^∞-Funktion, wenn f partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt. Insbesondere ist jede Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion.*
4. *Sei $n = 1$. Genau dann ist f p-mal [stetig] differenzierbar im Sinne von* Definition 9.6, *wenn f p-mal [stetig] differenzierbar im Sinne von* Definition 7.6 *ist, und dann gilt für alle $z \in D$ und $(v_1, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p$*
$$f^{(p)}(z) = d^p f(z)(1, \ldots, 1) \quad \textit{und} \quad d^p f(z)(v_1, \ldots, v_p) = f^{(p)}(z) v_1 \cdot \ldots \cdot v_p \,.$$

Beweis. 1. Induktion nach p.
- $p = 1$: Nach Satz 9.12.
- $p \geq 2$, $p - 1 \to p$: Sei $(i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^p$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt f eine partielle Ableitung $(p-1)$-ter Ordnung nach $(i_p, \ldots, i_2)$, und für $\boldsymbol{z} \in D$ ist

$$\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_p} f(\boldsymbol{z}) \;=\; d^{p-1} f(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p}) \,.$$

Nach Satz 9.15 ist $\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_p} f\colon D \to Y$ [stetig] differenzierbar, besitzt nach Satz 9.12 stetige partielle Ableitungen, und

$$d(\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_p} f)(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{e}_{i_1}) = \partial_{i_1}\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_p} f(\boldsymbol{z}) = d^p f(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p}) \,.$$

Die Vertauschbarkeit der höheren partiellen Ableitungen folgt aus Satz 9.17.
Sind $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{v}_\nu = (v_{\nu,1}, \ldots, v_{\nu,n}) = v_{\nu,1}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + v_{\nu,n}\boldsymbol{e}_n$, so folgt

$$\begin{aligned} d^p f(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p) &= \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} v_{1,i_1} \cdot \ldots \cdot v_{p,i_p}\, d^p f(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p}) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} v_{1,i_1} \cdot \ldots \cdot v_{p,i_p}\, \partial_{i_1}\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_p} f(\boldsymbol{z}) \,. \end{aligned}$$

2. Induktion nach p.

• $p = 1$: Nach Satz 9.12.

• $p \geq 1$, $p \to p+1$: Habe f stetige partielle Ableitungen $(p+1)$-ter Ordnung. Dann haben die Funktionen $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f \colon D \to Y$ stetige partielle Ableitungen p-ter Ordnung, sind also C^p-Funktionen, und daher ist auch $(\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) \colon D \to Y^n$ eine C^p-Funktion.

Sei $H \colon Y^n \to \mathsf{L}(\mathbb{R}^n, Y)$ definiert durch

$$H(y_1, \ldots, y_n)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n\,.$$

Dann ist H eine stetige lineare Abbildung (siehe Beispiel 1 nach Satz 9.3). Nach Satz 9.6 ist für $\boldsymbol{z} \in D$ und $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$df(\boldsymbol{z})(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \partial_i f(\boldsymbol{z}) = H\big(\partial_1 f(z), \ldots, \partial_n f(z)\big)(v_1, \ldots, v_n)\,,$$

also $df = H \circ (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$. Nach Satz 9.16 ist df eine C^p-Funktion, und daher ist f eine C^{p+1}-Funktion.

3. Nach 1. und 2. ist f genau dann eine C^∞-Funktion, wenn f partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt. Offensichlich besitzt jede Polynomfunktion $f \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ partielle Ableitungen beliebiger Ordnung.

4. Ist f p-mal [stetig] differenzierbar im Sinne von Definition 9.6, so folgen die Behauptungen aus 1.

Sei nun f p-mal [stetig] differenzierbar im Sinne von Definition 7.6. Wir verwenden Induktion nach p.

• $p = 1$: Nach Satz 9.6.

• $p \geq 1$, $p \to p+1$: Sei f $(p+1)$-mal [stetig] differenzierbar im Sinne von Definition 7.6. Dann ist $f' \colon D \to Y$ p-mal [stetig] differenzierbar im Sinne von Definition 7.6 und daher auch im Sinne von Definition 9.6. Nach Satz 9.2 ist die Abbildung $F \colon \mathsf{L}(\mathbb{R}, Y) \to Y$, definiert durch $F(\varphi) = \varphi(1)$, eine Isometrie, und $f' = F \circ df \colon D \to Y$. Daher folgt $df = F^{-1} \circ f'$, und nach Satz 9.16 ist auch df p-mal [stetig] und daher f $(p+1)$-mal [stetig] differenzierbar im Sinne von Definition 9.6. □

11.6. Taylor'scher Satz und lokale Extrema.

Definition 9.8. Seien X, Y normierte Räume, $p \in \mathbb{N}_0$, $D \subset X$ offen, $a, x \in D$, $h = x - a$ und $f \colon D \to Y$ p-mal differenzierbar (keine Voraussetzung für $p = 0$). Dann definiert man

$$T_a^p f(x) \;=\; f(a) \;+\; \sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{\nu!}\, d^\nu f(a)(h^{[\nu]}) \quad \text{und} \quad R_a^p f(x) = f(x) - T_a^p f(x)\,.$$

Man nennt $T_a^p f(x) \in Y$ das *p-te Taylorpolynom* und $R_a^p f(x) = f(x) - T_a^p f(x) \in Y$ das *p-te Taylor'sche Restglied* von f in a an der Stelle x.

Bemerkung:

Seien $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0$, Y ein normierter Raum, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \colon D \to Y$ p-mal differenzierbar, seien $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in D$ und $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = (h_1, \ldots, h_n)$. Dann ist nach Satz 9.18

$$T_{\boldsymbol{a}}^p f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{\nu!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_\nu=1}^{n} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_\nu} f(\boldsymbol{a}) h_{i_1} \cdot \ldots \cdot h_{i_\nu}\,.$$

Insbesondere ist im Falle $n = 1$ die Definition 9.8 mit Definition 7.6 konsistent.

Satz 9.19 (Taylor'scher Satz)**.** *Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, $p \in \mathbb{N}_0$, $D \subset X$ offen, $a \in D$ und $f \colon D \to Y$.*

1. *Ist f eine C^{p+1}-Funktion, $x \in D$, $h = x - a$ und $[a, x] \subset D$, so ist*
$$R_a^p f(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!}\, d^{p+1} f(a+th)(h^{[p+1]})\, dt \quad \textit{und} \quad \|R_a^p f(x)\| \le \frac{1}{p!}\, \|d^{p+1} f\|_{[a,x]}\, \|h\|^{p+1}\,.$$
2. *Ist $p \in \mathbb{N}$ und f eine C^p-Funktion, so ist*
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\|x-a\|^p}\, R_a^p f(x) \;=\; 0\,.$$

Beweis. 1. Wir zeigen zuerst die Formel durch Induktion nach n.
$p = 0$: Nach Satz 9.10 ist
$$R_a^0 f(x) = f(x) - T_a^0 f(x) = f(x) - f(a) = \int_0^1 df(a+th)(h)\, dt\,.$$
$p \ge 0$, $p \to p+1$: Sei f eine C^{p+2}-Funktion. Nach Induktionsvoraussetzung ist
$$\begin{aligned} R_a^{p+1} f(x) \;&=\; R_a^p f(x) \;-\; \frac{1}{(p+1)!}\, d^{p+1} f(a)(h^{[p+1]}) \\ &=\; \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!}\, d^{p+1} f(a+th)(h^{[p+1]})\, dt \;-\; \frac{1}{(p+1)!}\, d^{p+1} f(a)(h^{[p+1]})\,. \end{aligned}$$
Sei nun $E = \{t \in \mathbb{R} \mid a + th \in D\}$ und $u \colon E \to Y$ definiert durch
$$u(t) \;=\; -\frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}\, d^{p+1} f(a+th)(h^{[p+1]})\,.$$
Dann ist $E \subset \mathbb{R}$ offen, u ist stetig differenzierbar, und mit der Produktregel aus 8.2 und der Kettenregel folgt
$$u'(t) \;=\; \frac{(1-t)^p}{p!}\, d^{p+1} f(a+th)(h^{[p+1]}) \;-\; \frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}\, d^{p+2} f(a+th)(h^{[p+2]})\,.$$
Wegen der Stetigkeit von u' folgt aus Satz 9.10
$$-u(0) = u(1) - u(0) = \int_0^1 u'(t)\, dt\,,$$
also
$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+1)!}\, d^{p+1} f(a)(h^{[p+1]}) \;&=\; \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!}\, d^{p+1} f(a+th)(h^{[p+1]})\, dt \\ &\qquad - \int_0^1 \frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}\, d^{p+2} f(a+th)(h^{[p+2]})\, dt \end{aligned}$$
und daher
$$R_a^{p+1} f(x) \;=\; \int_0^1 \frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}\, d^{p+2} f(a+th)(h^{[p+2]})\, dt\,.$$

Für $t \in [0,1]$ ist

$$\Big\| \frac{(1-t)^p}{p!}\, d^{p+1} f(a+th)(h^{[p+1]}) \Big\| \;\le\; \frac{1}{p!}\, \|d^{p+1} f(a+th)\|\, \|h\|^{p+1} \;\le\; \frac{1}{p!}\, \|d^{p+1} f\|_{[a,x]}\, \|h\|^{p+1}\,,$$

und damit folgt die Abschätzung des Restgliedes.

2. Wir müssen zeigen:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ \ \big[\, B_\delta(a) \subset D \ \ \wedge\ \ \big(\forall h \in B_\delta(0)\big)\ \ \|R_a^p f(a+h)\| \le \varepsilon \|h\|^p\, \big]\,.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen der Stetigkeit von $d^p f$ in a gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_\delta(a) \subset D$ und $(\forall z \in B_\delta(a))\ \|d^p f(z) - d^p f(a)\| < \varepsilon$. Sei nun $h \in B_\delta(0)$ $\big[$dann ist $(\forall t \in [0,1])\ a+th \in B_\delta(a)\big]$. Es folgt (mit $x = a+h$)

$$\begin{aligned}
R_a^p f(x) &= R_a^{p-1} f(x) \;-\; \frac{1}{p!} d^p f(a)(h^{[p]}) \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!}\, d^p f(a+th)(h^{[p]}\, dt \;-\; \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!}\, d^p f(a)(h^{[p]}\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!}\, \big[d^p f(a+th) - d^p f(a) \big](h^{[p]})\, dt
\end{aligned}$$

und damit die Abschätzung

$$\|R_a^p f(a+h)\| \;\le\; \sup\big\{ \|d^p f(a+th) - d^p f(a)\| \;\big|\; t \in [0,1]\,\big\}\, \|h\|^p \;\le\; \varepsilon \|h\|^p\,. \qquad \square$$

Definition 9.9. Sei Y ein normierter Raum, $D \subset Y$, $a \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$.

1. Man sagt, f hat in a ein *lokales Maximum* [ein *lokales Minimum*], wenn
$$(\exists U \in \mathcal{U}(a))\ (\forall x \in D \cap U)\ \ f(x) \le f(a) \quad [\, f(x) \ge f(a)\,]\,.$$
Gilt $<$ [$>$] an Stelle von $\le$ [$\ge$,], so sagt man, f hat in a ein *strenges lokales Maximum* [ein *strenges lokales Minimum*].
2. Man sagt, f hat in a ein [*strenges*] *lokales Extremum*, wenn f in a ein [strenges] lokales Maximum oder ein [strenges] lokales Minimum hat.

Definition 9.10. Sei X ein normierter Raum.

1. Eine (*reele*) *quadratische Form* auf X ist eine homogene Polynomfunktion $\mathsf{q}\colon X \to \mathbb{R}$ vom Grade 2 [äquivalent: $(\exists \beta \in \mathsf{L}^2(X,\mathbb{R}))\ (\forall x \in X)\ \ \mathsf{q}(x) = \beta(x,x)$].
Eine quadratische Form $\mathsf{q}\colon X \to \mathbb{R}$ heißt
   - *positiv* [*negativ*] *definit*, wenn $(\forall x \in X \setminus \{0\})\ \ \mathsf{q}(x) > 0 \quad [\mathsf{q}(x) < 0]$.
   - *strikt positiv* [*negativ*] *definit*, wenn
$$(\exists C \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x \in X)\ \ \mathsf{q}(x) \ge C\|x\|^2 \ \ [\,\mathsf{q}(x) \le -C\|x\|^2\,]\,.$$
   - *positiv* [*negativ*] *semidefinit*, wenn $(\forall x \in X)\ \ \mathsf{q}(x) \ge 0 \quad [\mathsf{q}(x) \le 0]$.
   - *indefinit*, wenn $(\exists x,\, y \in X)\ \ \mathsf{q}(y) < 0 < \mathsf{q}(x)$.
2. Sei $D \subset X$ offen, $a \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar. Dann nennt man die quadratische Form
$$\mathsf{q}_{f,a}\colon D \to \mathbb{R}\,, \quad \text{definiert durch} \quad \mathsf{q}_{f,a}(x) = d^2 f(a)(x,x)\,,$$
die *Hesse'sche Form* von f in a.

Bemerkungen:

1. Sei X ein normierter Raum und $\mathsf{q}\colon X \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form. Dann ist q stetig, und
$$(\forall x \in X)\ (\forall \lambda \in \mathbb{R})\ \ \mathsf{q}(\lambda x) = \lambda^2 \mathsf{q}(x)\,.$$
Ist q strikt positiv [negativ] definit, so ist q auch positiv [negativ] definit.
2. Sei X ein endlich-dimensionaler normierter Raum. Dann ist jede positiv [negativ] definite quadratische Form $\mathsf{q}\colon X \to \mathbb{R}$ strikt positiv [negativ] definit.
Beweis. Nach Satz 4.16 ist $S = \big\{x \in X \bigm| \|x\| = 1\big\}$ kompakt, und daher existiert $C = \min \mathsf{q}(S) > 0$. Für $x \in X \setminus \{0\}$ ist
$$\frac{1}{\|x\|}\,x \in S\,, \quad \text{und daher} \quad \mathsf{q}(x) = \|x\|^2\,\mathsf{q}\Big(\frac{1}{\|x\|}\,x\Big) \ \geq\ C\|x\|^2\,. \quad \square$$
3. Sei $n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, und sei
$$\beta_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{definiert durch} \quad \beta_A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}^{\mathsf{t}}\,.$$
Dann ist $\beta_A \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ eine symmetrische Bilinearform, und die quadratische Form $\mathsf{q}_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch $\mathsf{q}_A(\boldsymbol{x}) = \beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, ist gegeben durch
$$\mathsf{q}_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^{\mathsf{t}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j\,, \quad \text{falls} \quad \boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)\,.$$
Man nennt die symmetrische Matrix $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ *positiv definit* [*positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit, indefinit*], wenn die quadratische Form q_A diese Eigenschaft hat.
4. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\boldsymbol{a} \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar und
$$\mathsf{H}(f,\boldsymbol{a}) = \big(\partial_i\partial_j f(\boldsymbol{a})\big)_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})\,.$$
Nach Satz 9.17 ist $\mathsf{H}(f,\boldsymbol{a})$ eine symmetrische Matrix, genannt die *Hesse'sche Matrix* von f in $\boldsymbol{a}$. Für $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist nach Satz 9.18
$$\mathsf{q}_{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = d^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\partial_j f(\boldsymbol{a})x_ix_j = \mathsf{q}_{\mathsf{H}(f,\boldsymbol{a})}(\boldsymbol{x})\,.$$
5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Für $k \in \{1,\ldots,n\}$ sei $\Delta_k = \det\big((a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,k}\big)$ der k-te *Hauptminor* von A. Dann gilt:
A ist positiv [semi-]definit $\iff$ $-A$ ist negativ [semi-]definit.
A ist positiv definit $\iff$ alle Eigenwerte von A sind positiv
$\iff$ $(\forall k \in \{1,\ldots,n\})\ \ \Delta_k > 0$.
A ist positiv semidefinit $\iff$ A hat keinen negativen Eigenwert.
A ist indefinit $\iff$ A hat einen positiven und einen negativen Eigenwert.
Im Falle $n = 2$, $a = a_{1,1}$ und $\Delta = \det(A)$ gilt:
A ist positiv definit $\iff$ $a > 0\ \wedge\ \Delta > 0$.
A ist positiv semidefinit $\iff$ $a \geq 0\ \wedge\ \Delta \geq 0$.
A ist indefinit $\iff$ $\Delta < 0$.

Satz 9.20. *Sei X ein normierter Raum, $D \subset X$ offen, $a \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$.*

1. *Sei f differenzierbar in a. Hat f in a ein lokales Extremum, so ist* $df(a) = 0$.
2. *Sei f eine C^2-Funktion,* $df(a) = 0$ *und* $\mathsf{q} = \mathsf{q}_{f,a} \colon X \to \mathbb{R}$.
   (a) *Hat f in a ein lokales Minimum [Maximum], so ist q positiv [negativ] semidefinit.*
   (b) *Ist q strikt positiv [negativ] definit, so hat f in a ein strenges lokales Minimum [Maximum].*
   (c) *Ist q indefinit, so hat f in a kein lokales Extremum.*

Beweis. 1. Sei $h \in X \setminus \{0\}$, und sei $\varphi \colon \mathbb{R} \to X$ definiert durch $\varphi(t) = a + th$. Dann ist $\varphi^{-1}(D) \subset \mathbb{R}$ offen, $0 \in \varphi^{-1}(D)$, und die Funktion $f \circ \varphi \colon \varphi^{-1}(D) \to \mathbb{R}$ hat ein lokales Extremum in 0. Nach Satz 7.17 ist $0 = (f \circ \varphi)'(0) = df(a)(h)$, und daher folgt $df(a) = 0$.

2. Nach Satz 9.19 gilt für alle $h \in X$ mit $[a, a+h] \subset D$

$$f(a+h) - f(a) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathsf{q}(h) + r(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|^2} = 0\,.$$

(a) Habe f in a ein lokales Minimum, und sei $h \in X$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_\varepsilon(a) \subset D$ und $(\forall x \in B_\varepsilon(a))\;\; f(x) - f(a) \ge 0$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}^\times$ mit $\|th\| < \varepsilon$

$$0 \le \frac{1}{2}\,\mathsf{q}(th) + r(th) = \frac{t^2}{2}\,\mathsf{q}(h) + t^2\|h\|^2\,\frac{r(th)}{\|th\|^2}\,, \quad \text{also} \quad \mathsf{q}(h) \ge -2\|h\|^2\,\frac{r(th)}{\|th\|^2}\,,$$

und wegen

$$\lim_{t \to 0} \frac{r(th)}{\|th\|^2} = 0 \quad \text{folgt} \quad \mathsf{q}(h) \ge 0\,.$$

(b) Sei q strikt positiv definit, und sei $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(\forall h \in X)\;\; \mathsf{q}(h) \ge C\|h\|^2$. Sei $0 < C' < C$, und sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_\varepsilon(a) \subset D$ und $(\forall h \in B_\varepsilon(0))\;\; |r(h)| \le C'\|h\|^2$. Ist dann $x \in B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ und $h = x - a$, so folgt

$$f(x) - f(a) = f(a+h) - f(a) \ge C\|h\|^2 - |r(h)| > (C - C')\,\|h\|^2 > 0\,.$$

Daher hat f in a ein strenges lokales Minimum.

(c) Seien h_1, $h_2 \in X$ mit $\mathsf{q}(h_1) > 0$ und $\mathsf{q}(h_2) < 0$. Für $i \in \{1, 2\}$ sei $\varphi_i \colon \mathbb{R} \to X$ definiert durch $\varphi_i(t) = a + th_i$. Dann ist $\varphi_i^{-1}(D) \subset \mathbb{R}$ offen, die Funktion $f \circ \varphi_i \colon \varphi_i^{-1}(D) \to \mathbb{R}$ ist eine C^2-Funktion, und für alle $t \in \varphi_i^{-1}(D)$ ist

$$(f \circ \varphi_i)'(t) = df\big(\varphi_i(t)\big)(h_i) \quad \text{und} \quad (f \circ \varphi_i)''(t) = d^2 f\big(\varphi_i(t)\big)(h_i, h_i)\,.$$

Insbesondere ist $(f \circ \varphi_i)'(0) = 0$, $(f \circ \varphi_1)''(0) = \mathsf{q}(h_1) > 0$ und $(f \circ \varphi_2)''(0) = \mathsf{q}(h_2) < 0$. Nach Satz 7.23 hat $f \circ \varphi_1$ in 0 ein strenges lokales Minimum und $f \circ \varphi_2$ in 0 ein strenges lokales Maximum. Daher gibt es in jeder Umgebung von a Punkte x_1, x_2 mit $f(a) < f(x_1)$ und $f(a) > f(x_2)$, und f hat in a kein lokales Extremum. $\square$

10. Differenzialrechnung in normierten Räumen (Existenzsätze)

10.1. Inverse

Definition 10.1. Seien X und Y normierte Räume. Eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ heißt *topologischer Isomorphismus*, wenn $\varphi \in \mathsf{L}(X,Y)$, φ ist bijektiv, und $\varphi^{-1} \in \mathsf{L}(Y,X)$. Wir bezeichnen mit $\mathsf{Is}(X,Y)$ die Menge der topologischen Isomorphismen $\varphi\colon X \to Y$ und setzen $\mathsf{Is}(X) = \mathsf{Is}(X,X)$.

Bemerkungen: X, Y, Z seien normierte Räume.

1. $\mathrm{id}_X \in \mathsf{Is}(X)$, und $\varphi \in \mathsf{Is}(X,Y) \implies \varphi^{-1} \in \mathsf{Is}(Y,X)$.
2. $\varphi \in \mathsf{Is}(X,Y) \;\wedge\; \psi \in \mathsf{Is}(Y,Z) \implies \psi\circ\varphi \in \mathsf{Is}(X,Z)$.
3. Jede Isometrie ist ein topologischer Isomorphismus.
4. Sind X und Y Banachräume, so ist jeder stetig Isomorphismum $\varphi\colon X \to Y$ topologisch [Beweis schwierig!]
5. Seien X und Y endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume. Dann ist jeder $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus $\varphi\colon X \to Y$ ein topologischer Isomorphismus.

Definition 10.2. Sei K ein Körper und $A = (A,\cdot)$ eine assoziative K-Algebra.

1. Ein Element $e \in A$ heißt *Einselement*, wenn $(\forall x \in A)$ $e\cdot x = x\cdot a = a$.
2. Sei $e \in A$ ein Einselement und $a \in A$. Ein Element $a' \in A$ heißt ein *Inverses* von a, wenn
$$a\cdot a' = a'\cdot a = e$$
(dann ist a ein Inverses von a', und man schreibt $a' = a^{-1}$). a heißt *invertierbar*, wenn a ein Inverses besitzt. $A^\times$ bezeichne die Menge der invertierbaren Elemente von A.

Bemerkungen: Sei K ein Körper und A eine assoziative K-Algebra.

1. A besitzt höchstens ein Einselement.
   Beweis. Seien e, $e' \in A$ Einselemente. Dann ist $e = e\cdot e' = e'$.
2. Sei $e \in A$ ein Einselement. Dann besitzt jedes invertierbare Element von A genau ein Inverses, $A^\times$ ist (bezüglich der Einschränkung der Algebrenmultiplikation) eine Gruppe, und $(\forall x, y \in A^\times)$ $(x\cdot y)^{-1} = y^{-1}\cdot x^{-1}$.
   Beweis. Sei e das Einselement von A, $a \in A$, und seien a', $a'' \in A$ Inverse von a. Dann folgt $a' = a'\cdot e = a'\cdot(a\cdot a'') = (a'\cdot a)\cdot a'' = e\cdot a'' = a''$. Sind $x, y \in A^\times$, so folgt $x\cdot y\cdot y^{-1}\cdot x^{-1} = e$. Daher ist auch $x\cdot y \in A^\times$, und $(x\cdot y)^{-1} = y^{-1}\cdot x^{-1}$. Ist $x \in A^\times$, so ist nach Definition auch $x^{-1} \in A^\times$, und $(x^{-1})^{-1} = x$.

Konvention:
Unter einer *Algebra* verstehen wir im Folgenden stets eine assoziative $\mathbb{R}$-Algebra mit Einselement e, und für $x, y \in A$ schreiben wir $xy = x\cdot y$.

Beispiele:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ eine Algebra, und $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})^\times = \{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$. Nach Satz 9.4 ist $(\mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ eine Banachalgebra.
2. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sind Banachalgebren.

3. Sei V ein normierter Raum. Dann ist $\mathsf{L}(V) = \mathsf{L}(V,V)$ eine normierte Algebra, und $\mathsf{L}(V,V)^\times = \mathsf{Is}(V)$. Ist V ein Banachraum, so ist $\mathsf{L}(V)$ eine Banachalgebra.

Satz 10.1. *Sei A eine Banachalgebra.*

1. *Ist $a \in A$ und $\|a\| < 1$, so ist $e - a \in A^\times$, und*
$$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty a^n \,.$$
2. *$A^\times \subset A$ ist offen, $\mathsf{j}\colon A^\times \to A^\times$, definiert durch $\mathsf{j}(x) = x^{-1}$, ist eine C^∞-Funktion, und*
$$(\forall a \in A^\times)\ (\forall v \in A)\ \ d\mathsf{j}(a)(v) = -a^{-1}va^{-1}\,.$$

Beweis. 1. Wegen
$$\sum_{n=0}^\infty \|a^n\| \ \le\ \sum_{n=0}^\infty \|a\|^n \ <\ \infty\,,$$
ist die Reihe absolut konvergent. Für $N \in \mathbb{N}$ ist
$$(e-a)\sum_{n=0}^N a^n \ =\ \Big(\sum_{n=0}^N a^n\Big)(e-a) \ =\ e - a^{N+1}\,,$$
und daher
$$(e-a)\sum_{n=0}^\infty a^n \ =\ \Big(\sum_{n=0}^\infty a^n\Big)(e-a) \ =\ \lim_{N\to\infty}(e-a^{N+1}) \ =\ e\,.$$

2. Sei $a \in A^\times$. Wir zeigen $B_{1/\|a^{-1}\|}(a) \subset A^\times$. Für $x \in B_{1/\|a^{-1}\|}(a)$ gilt
$$\|e - xa^{-1}\| = \|(x-a)a^{-1}\| \le \|x-a\|\,\|a^{-1}\| < 1\,,$$
also $xa^{-1} = e - (e - xa^{-1}) \in A^\times$ und daher $x = (xa^{-1})a \in A^\times$.
Sei nun $\varphi\colon A \to A$ definiert durch $\varphi(v) = -\,a^{-1}va^{-1}$. Offensichtlich ist φ $\mathbb{R}$-linear, und
$$(\forall v \in A)\ \ \|\varphi(v)\| \le \|a^{-1}\|^2\,\|v\|\,, \quad \text{also} \quad \varphi \in \mathsf{L}(A)\,.$$
Für $h \in B_{1/\|a^{-1}\|}(0)$ ist $a + h \in B_{1/\|a^{-1}\|}(a) \subset A^\times$ und $\|a^{-1}h\| \le \|a^{-1}\|\,\|h\| < 1$, also
$$\begin{aligned}
\|\mathsf{j}(a+h) - \mathsf{j}(a) - \varphi(h)\| \ &=\ \Big\|\big[a(e + a^{-1}h)\big]^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ha^{-1}\Big\| \\
&=\ \Big\|\Big[\sum_{n=0}^\infty (-a^{-1}h)^n\Big]a^{-1} - a^{-1} - a^{-1}ha^{-1}\Big\| \\
&=\ \Big\|\sum_{n=2}^\infty (-a^{-1}h)^n a^{-1}\Big\| \ \le\ \|a^{-1}\|^3\,\|h\|^2 \sum_{n=2}^\infty \|a^{-1}h\|^{n-2}\,.
\end{aligned}$$
Damit folgt
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\big[\,\mathsf{j}(a+h) - \mathsf{j}(a) - \varphi(h)\,\big] \ =\ 0\,,$$
also ist j in a differenzierbar, und $d\mathsf{j}(a) = \varphi$.
Wir zeigen nun durch Induktion: $(\forall p \in \mathbb{N})$ j ist p-mal differenzierbar.

- $p = 1$: Eben gezeigt.

- $p \geq 1,\ p \to p+1$: Sei j p-mal differenzierbar. Nach dem eben Gezeigten ist

$$d\mathsf{j}\colon A \xrightarrow{(\mathsf{j},\mathsf{j})} A\times A \xrightarrow{\beta} \mathsf{L}(A) \quad \text{mit} \quad \beta(x,y)(v) = -xvy\,.$$

Für $(x,y) \in A\times A$ ist $\beta(x,y)\colon A \to A$ $\mathbb{R}$-linear, und wegen $\|\beta(x,y)(v)\| \leq \|x\|\,\|y\|\,\|v\|$ ist $\beta(x,y) \in \mathsf{L}(A,A)$ mit $\|\beta(x,y)\| \leq \|x\|\,\|y\|$. Daher ist β eine stetige bilineare Abbildung, also eine C^∞-Funktion. Nach Induktionsvoraussetzung ist (j,j) p-mal differenzierbar. Daher ist $d\mathsf{j}$ p-mal und folglich j $(p+1)$-mal differenzierbar. □

Beispiel:
Sei X ein Banachraum, $D \subset X$ offen, $a \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{C}^\times$ differenzierbar in a. Dann ist

$$\frac{1}{f}\colon D \to \mathbb{C} \quad \text{differenzierbar in } a, \text{ und} \quad (\forall v \in X)\ \ d\Big(\frac{1}{f}\Big)(a)(v) = -\frac{1}{f(a)^2}\,df(a)(v)\,.$$

Ist $p \in \mathbb{N}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ p-mal [stetig] differenzierbar, so ist auch $\frac{1}{f}\colon D \to \mathbb{C}$ p-mal [stetig] differenzierbar. Insbesondere ist jede rationale Funktion $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion.

Beweis. Es ist

$$\frac{1}{f}\colon D \xrightarrow{f} \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\mathsf{j}} \mathbb{C} \ \text{ mit } \ \mathsf{j}(x) = \frac{1}{x}\,, \quad \text{also} \ \ d\Big(\frac{1}{f}\Big)(a)(v) = d(\mathsf{j}\circ f)(a)(v) = -\frac{1}{f(a)^2}\,df(a)(v)\,.$$

Damit erhalten wir

$$d\Big(\frac{1}{f}\Big)\colon D \xrightarrow{f^*} \mathbb{C}^\times\times\mathsf{L}(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{g} \mathbb{C}^\times\times\mathsf{L}(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathsf{L}(X,\mathbb{C})$$

mit $f^*(a) = (f(a)^2, df(a))$, $g(c,\varphi) = (-c^{-1},\varphi)$ und $\varepsilon(c,\varphi) = c\varphi$. Daraus sind die Behauptungen mittels Induktion nach p abzulesen. □

Satz 10.2. *Seien X, Y Banachräume.*

1. $\mathsf{Is}(X,Y) \subset \mathsf{L}(X,Y)$ *ist offen. Ist* $\mathsf{Is}(X,Y) \neq \emptyset$, *so ist die Abbildung*

$$\iota\colon \mathsf{Is}(X,Y) \to \mathsf{Is}(Y,X) \hookrightarrow \mathsf{L}(Y,X)\,, \quad \textit{definiert durch} \quad \iota(\varphi) = \varphi^{-1}\,,$$

eine C^∞-Abbildung, und für alle $\varphi_0 \in \mathsf{Is}(X,Y)$ *und alle* $\psi \in \mathsf{L}(X,Y)$ *ist*

$$d\iota(\varphi_0)(\psi) = -\varphi_0^{-1}\circ\psi\circ\varphi_0^{-1} \in \mathsf{L}(Y,X)\,.$$

2. *Sei $\emptyset \neq D \subset X$ offen, $f\colon D \to Y$ injektiv, $f(D)$ offen und $f^{-1}\colon f(D) \to D \hookrightarrow X$.*
   (a) *Sei $a \in D$, f differenzierbar in a und f^{-1} stetig in $f(a)$. Dann gilt:*

$$f^{-1} \textit{ ist differenzierbar in } f(a) \iff df(a) \in \mathsf{Is}(X,Y)\,,$$

   und dann ist $df^{-1}\big(f(a)\big) = df(a)^{-1}$.
   (b) *Sei $p \in \mathbb{N}$ und f p-mal [stetig] differenzierbar. Ist dann f^{-1} differenzierbar, so ist f^{-1} p-mal [stetig] differenzierbar.*

Beweis. 1. Sei $\varphi_0 \in \mathsf{Is}(X,Y)$ und $U = B_{1/\|\varphi_0^{-1}\|}(\varphi_0) \subset \mathsf{L}(X,Y)$. Für $\varphi \in U$ ist

$$\|\varphi_0^{-1}\circ\varphi - id_X\| \ \leq\ \|\varphi_0^{-1}\|\,\|\varphi-\varphi_0\| < 1\,, \quad \text{also} \quad \varphi_0^{-1}\circ\varphi \in \mathsf{Is}(X) \quad \text{nach Satz 10.1.}$$

Daher ist auch $\varphi = \varphi_0\circ(\varphi_0^{-1}\circ\varphi) \in \mathsf{Is}(X,Y)$, $\varphi^{-1} = (\varphi_0^{-1}\circ\varphi)^{-1}\circ\varphi_0^{-1}$, und wir erhalten

$$\iota\,|\,U\colon U \xrightarrow{\varepsilon} \mathsf{Is}(X) \xrightarrow{\mathsf{j}} \mathsf{Is}(X) \xrightarrow{\varepsilon'} \mathsf{Is}(Y,X) \ \text{ mit } \ \varepsilon(\varphi) = \varphi_0^{-1}\circ\varphi\,,\ \mathsf{j}(\psi) = \psi^{-1} \ \text{ und } \ \varepsilon'(\psi) = \psi\circ\varphi_0^{-1}\,.$$

$\varepsilon\colon \mathsf{L}(X,Y) \to \mathsf{L}(X)$ und $\varepsilon'\colon \mathsf{L}(X) \to \mathsf{L}(Y,X)$ sind stetige lineare Abbildungen und j ist eine C^∞-Funktion. Daher ist auch ι eine C^∞-Funktion. Für $\psi \in \mathsf{L}(X,Y)$ ist

$$d\iota(\varphi_0)(\psi) = d(\varepsilon'\circ\mathsf{j}\circ\varepsilon)(\varphi_0)(\psi) = \varepsilon'\circ d\mathsf{j}\big(\varepsilon(\varphi_0)\big)\big(\varepsilon(\psi)\big) = d\mathsf{j}\,(\mathrm{id}_X)(\varphi_0^{-1}\circ\psi)\circ\varphi_0^{-1} = -\varphi_0^{-1}\circ\psi\circ\varphi_0^{-1}\,.$$

2. $\Rightarrow$: Aus $\mathrm{id}_D = f^{-1}\circ f$ folgt $\mathrm{id}_X = df^{-1}\big(f(a)\big)\circ df(a)$, und aus $\mathrm{id}_{f(D)} = f\circ f^{-1}$ folgt $\mathrm{id}_Y = df\big(f^{-1}\big(f(a)\big)\big)\circ df^{-1}\big(f(a)\big) = df(a)\circ df^{-1}\big(f(a)\big)$. Daher ist $df(a) \in \mathsf{Is}(X,Y)$ und $df(a)^{-1} = df^{-1}\big(f(a)\big)$.

$\Leftarrow$: Wir zeigen:

$$\lim_{y\to f(a)} \frac{1}{\|y-f(a)\|}\Big[f^{-1}(y) \;-\; f^{-1}\big(f(a)\big) \;-\; df(a)^{-1}\big(y-f(a)\big)\Big] \;=\; 0\,.$$

Sei $(y_k)_{k\ge0}$ eine Folge in $f(D)\setminus\{f(a)\}$ mit $(y_k)_{k\ge0} \to f(a)$. Für $k\in\mathbb{N}_0$ sei $x_k = f^{-1}(y_k)$ und

$$r_k = \frac{1}{\|x_k-a\|}\Big[f(x_k)-f(a)-df(a)(x_k-a)\Big] \in Y\,.$$

Dann ist $(x_k)_{k\ge0}$ eine Folge in $D\setminus\{a\}$ mit $(x_k)_{k\ge0}\to a$, $(r_k)_{k\ge0}\to 0$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\big\|f^{-1}(y_k)-f^{-1}\big(f(a)\big)-df(a)^{-1}\big(y_k-f(a)\big)\big\| &= \big\|df(a)^{-1}\big[f(x_k)-f(a)-df(a)(x_k-a)\big]\big\| \\ &\le \|df(a)^{-1}\|\,\|x_k-a\|\,\|r_k\|\,.\end{aligned}$$

Es ist $\|x_k-a\| = \|df(a)^{-1}df(a)(x_k-a)\| \le \|df(a)^{-1}\|\,\|df(a)(x_k-a)\|$ und daher

$$\begin{aligned}\|y_k-f(a)\| &= \big\|\|x_k-a\|r_k + df(a)(x_k-a)\big\| \ge \|df(a)(x_k-a)\| - \|x_k-a\|\,\|r_k\| \\ &\ge \frac{\|x_k-a\|}{\|df(a)^{-1}\|} - \|x_k-a\|\,\|r_k\| = \frac{\|x_k-a\|}{\|df(a)^{-1}\|}\Big[1-\|df(a)^{-1}\|\,\|r_k\|\Big]\,.\end{aligned}$$

Damit folgt schließlich

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\|y_k-f(a)\|}\big\|f^{-1}(y_k)-f^{-1}\big(f(a)\big)-df(a)^{-1}\big(y_k-f(a)\big)\big\| \\ &\qquad\le \frac{\|df(a)^{-1}\|\,\|df(a)^{-1}\|\,\|x_k-a\|\,\|r_k\|}{\|x_k-a\|\big[1-\|df(a)^{-1}\|\|r_k\|\big]} = \frac{\|df(a)^{-1}\|^2}{1-\|df(a)^{-1}\|\,\|r_k\|}\,\|r_k\|\,,\end{aligned}$$

und wegen $(r_k)_{k\ge0}\to 0$ die Behauptung.

3. Aus 2. erhalten wir die Zerlegung

$$df^{-1}\colon f(D) \xrightarrow{f^{-1}} D \xrightarrow{df} \mathsf{Is}(X,Y) \xrightarrow{\iota} \mathsf{Is}(Y,X)\,.$$

Ist df stetig, so ist daher auch df^{-1} stetig.

Wir zeigen nun mittels Induktion: Ist $p\in\mathbb{N}$ und f p-mal [stetig] differenzierbar, so ist auch f^{-1} p-mal [stetig] differenzierbar.

- $p=1$: Gezeigt.
- $p\ge1$, $p\to p+1$: Sei f $(p+1)$-mal [stetig] differenzierbar. Dann ist df p-mal [stetig] differenzierbar, und nach Induktionsvoraussetzung ist auch f^{-1} p-mal [stetig] differenzierbar. Daher folgt die Behauptung mit Satz 9.15. □

10.2 Der lokale Umkehrsatz

Satz 10.3 (Fixpunktsatz)**.** *Sei X ein Banachraum, $\emptyset \neq D \subset X$ abgeschlossen, $f\colon D \to D$ eine Abbildung, $\theta \in (0,1)$, und*

$$(\forall x,\, y \in D)\quad \|f(x) - f(y)\| \le \theta \|x-y\|\,.$$

Dann gibt es genau ein $a \in D$ mit $f(a) = a$.

Beweis. Eindeutigkeit. Seien $a,\, b \in D$ mit $f(a) = a$ und $f(b) = b$. Dann folgt

$$\|a-b\| = \|f(a) - f(b)\| \le \theta \|a-b\|\,,$$

also wegen $\theta < 1$ auch $a = b$.

Existenz. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f^{[k]} = f \circ f \circ \ldots \circ f\colon D \to D$ (k times). Dann folgt mittels Induktion nach k

$$(\forall x,\, y \in D)\quad \|f^{[k]}(x) - f^{[k]}(y)\| \le \theta^k \|x-y\|\,.$$

Sei nun $x_0 \in D$ beliebig, und für $k \in \mathbb{N}$ sei $x_k = f^{[k]}(x_0) \in D$. Wir behaupten: $(x_k)_{k\ge 0}$ ist eine Cauchyfolge. Dazu ist zu zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall m,\, n \ge n_0)\ \ \|x_m - x_n\| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\theta^{n_0}\|x_1 - x_0\| < \varepsilon(1-\theta)$. Für $m > n \ge n_0$ ist dann

$$\|x_m - x_n\| \le \sum_{\nu=n}^{m-1} \|x_{\nu+1} - x_\nu\| \le \sum_{\nu=n_0}^{\infty} \|f^{[\nu]}(x_1) - f^{[\nu]}(x_0)\| \le \sum_{\nu=n_0}^{\infty} \theta^\nu \|x_1 - x_0\| = \theta^{n_0}\frac{\|x_1 - x_0\|}{1-\theta} < \varepsilon\,.$$

Wegen der Vollständigkeit von X ist die Folge $(x_k)_{k\ge 0}$ konvergent, und da D abgeschlossen ist, folgt $(x_k)_{k\ge 0} \to a \in D$. Nach Satz 4.4 ist f stetig. Es folgt $(f(x_k))_{k\ge 0} \to f(a)$, und wegen $f(x_k) = x_{k+1}$ folgt $f(a) = a$. □

Definition 10.3. Seien X, Y Banachräume, $\emptyset \neq D \subset X$ offen und $f\colon D \to Y$.

1. f heißt *Diffeomorphismus*, wenn gilt:

   $f(D)$ ist offen, f ist eine injektive C^1-Abbildung, und $f^{-1}\colon f(D) \to D \hookrightarrow X$ ist differenzierbar.
2. f heißt *lokaler Diffeomorphismus*, wenn

   $(\forall a \in D)\ (\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ \ B_\varepsilon(a) \subset D$ und $f \,|\, B_\varepsilon(a)\colon B_\varepsilon(a) \to Y$ ist ein Diffeomorphismus.

Ist $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so nennt man f einen (*lokalen*) *C^p-Diffeomorphismus*, wenn f ein (lokaler) Diffeomorphismus und eine C^p-Abbildung ist.

Bemerkungen: X, Y, Z seien Banachräume, $\emptyset \neq D \subset X$ offen, $\emptyset \neq E \subset Y$ offen, $f\colon D \to Y$, $f(D) \subset E$ und $g\colon E \to Z$.

1. Sei f ein Diffeomorphismus, $p \in \mathbb{N}$ und f p-mal [stetig] differenzierbar. Dann ist auch $f^{-1}\colon f(D) \to X$ p-mal [stetig] differenzierbar.

   Beweis. Nach Satz 10.2.2. □
2. Ist f ein lokaler Diffeomorphismus, so ist f eine C^1-Abbildung, für jede offene Menge $U \subset D$ ist $f(U) \subset Y$ offen, und $(\forall a \in D)\ \ df(a) \in \mathsf{Is}(X,Y)$.

   Beweis. Für $a \in D$ sei $U_a \in \mathcal{U}(a)$ offen, so dass $U_a \subset D$ und $f \,|\, U_a$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist $f \,|\, U_a$ eine C^1-Abbildung, also auch f eine C^1-Abbildung, und nach Satz 10.2 ist $df(a) \in \mathsf{Is}(X,Y)$. Insbesondere ist $f_1 = (f \,|\, U_a)^{-1}\colon f(U_a) \to U_a$ eine stetige

Abbildung, und daher ist für jede offene Menge $V \subset U_a$ auch $f_1^{-1}(V) = f(V) \subset f(U_a)$ offen. Ist nun $U \subset D$ offen, so ist

$$U = \bigcup_{a\in U} U \cap U_a \quad \text{und daher} \quad f(U) = \bigcup_{a\in U} f(U \cap U_a) \quad \text{offen.} \qquad \square$$

3. Seien f und g [lokale] Diffeomorphismen. Dann sind auch $f^{-1}\colon f(D) \to X$ und $g\circ f\colon D \to Z$ [lokale] Diffeomorphismen.
4. f ist ein Diffeomorphismus $\iff$ f ist ein injektiver lokaler Diffeomorphismus.

Satz 10.4. *Sei X ein Banachraum, $D \subset X$ offen, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\overline{B}_r(0) \subset D$, $f\colon D \to X$ eine C^1-Abbildung, $f(0) = 0$, $df(0) = \mathrm{id}_X$, $s \in (0,1)$ und $(\forall x_1, x_2 \in \overline{B}_r(0))\ \|df(x_1) - df(x_2)\| \le s$.*

1. $(\forall y \in B_{(1-s)r}(0))\ \ (\exists!\, x \in B_r(0))\ \ f(x) = y$.
2. *Sei $U = B_r(0) \cap f^{-1}(B_{(1-s)r}(0)) \subset D$. Dann ist U offen, $f(U) = B_{(1-s)r}(0)$, und $f\,|\,U\colon U \to X$ ist ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Für $y \in B_{(1-s)r}$ definieren wir

$$F_y\colon D \to X \quad \text{durch} \quad F_y(x) = x + y - f(x)\,. \quad \text{Dann:} \quad f(x) = y \iff F_y(x) = x\,.$$

Für den Beweis von 1. werden wir zeigen:

A. Es gibt genau ein $x \in B_r(0)$ mit $F_y(x) = x$.

F_y ist eine C^1-Abbildung, $(\forall x \in D)\ \ dF_y(x) = \mathrm{id}_X - df(x) = df(0) - df(x)$, und daher folgt $\|dF_y\|_{\overline{B}_r(0)} \le s$. Für $x_1, x_2 \in \overline{B}_r(0)$ ist $[x_1, x_2] \subset \overline{B}_r(0)$, und aus Satz 9.10 folgt

$$\|F_y(x_1) - F_y(x_2)\| \le \|dF_y\|_{[x_1,x_2]}\,\|x_1 - x_2\| \le s\,\|x_1 - x_2\|\,.$$

Für $x \in \overline{B}_r(0)$ ist

$$\|F_y(x)\| = \|F_0(x) - F_0(0) + y\| \le \|dF_0\|_{\overline{B}_r(0)}\|x\| + \|y\| \le sr + \|y\| < r\,,$$

also $F_y(x) \in B_r(0) \subset \overline{B}_r(0)$. Mit Satz 10.3 folgt nun **A**.

Nach Satz 4.17 ist U offen, und nach dem eben Gezeigten ist $f\,|\,U\colon U \to B_{(1-s)r}(0)$ bijektiv. Für alle $x \in B_r(0)$ ist $\|df(x) - \mathrm{id}_X\| = \|df(x) - df(0)\| \le s < 1$ und daher $df(x) \in \mathrm{Is}(X)$ nach Satz 10.1. Nach Satz 10.2 genügt es daher, die Stetigkeit von $g = (f\,|\,U)^{-1}\colon B_{(1-s)r}(0) \to U$ zu zeigen.

Seien $y_1, y_2 \in B_{(1-s)r}(0)$, $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ mit $x_1, x_2 \in U$. Dann ist

$$\|x_1 - x_2\| \le \|F_0(x_1) - F_0(x_2)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \le s\,\|x_1 - x_2\| + \|f(x_1) - f(x_2)\|$$

und daher

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| = \|x_1 - x_2\| \le \frac{1}{1-s}\,\|f(x_1) - f(x_2)\| = \frac{1}{1-s}\,\|y_1 - y_2\|\,.$$

Die Stetigkeit von g folgt nun aus Satz 4.4. $\square$

Satz 10.5 (Lokaler Umkehrsatz)**.** *Seien X, Y Banachräume, $\emptyset \ne D \subset X$ offen und $f\colon D \to Y$ eine C^1-Abbildung.*

1. *Sei $a \in D$ und $df(a) \in \mathsf{Is}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$. Dann gibt es eine offene Menge $U \subset D$ mit $a \in U$, so dass $f\,|\,U\colon U \to Y$ ein Diffeomorphismus ist.*
2. *f ist ein lokaler Diffeomorphismus $\iff$ $(\forall a \in D)\ \ df(a) \in \mathsf{Is}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$.*

Beweis. Es genügt, 1. zu zeigen. Sei $D_0 = -a + D \subset X$ und

$$f_0 \colon D_0 \to X \quad \text{definiert durch} \quad f_0(x) = df(a)^{-1}[f(x+a) - f(a)]\,.$$

$D_0 \subset X$ ist offen, $0 \in D_0$, f_0 ist eine C^1-Abbildung, $f_0(0) = 0$ und $df_0(0) = \mathrm{id}_X$. Wegen der Stetigkeit von df_0 gibt es ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\overline{B}_r(0) \subset D_0$ und $(\forall x \in \overline{B}_r(0))\ \ \|df_0(x) - \mathrm{id}_X\| < \frac{1}{3}$. Dann folgt $(\forall x_1,\, x_2 \in \overline{B}_r(0))\ \ \|df_0(x_1) - df_0(x_2)\| < \frac{2}{3}$, und nach Satz 10.4 gibt es eine offene Menge $U_0 \subset D_0$ mit $0 \in U_0$, so dass $f_0 \,|\, U_0 \colon U_0 \to X$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist $U = a + U_0 \subset D$ offen, und für $x \in U$ ist $f(x) = df(a)(f_0(x-a)) + f(a)$. Daher ist auch $f(U) = df(a)\big(f(U_0)\big) + f(a)$ offen und $f \,|\, U$ ein Diffeomorphismus. □

Bemerkung: Seien $n,\, m \in \mathbb{N}$ und $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

1. Sei $f \colon D \to \mathbb{R}^m$ ein lokaler Diffeomorphismus. Für $\boldsymbol{a} \in D$ ist dann $df(\boldsymbol{a}) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein Isomorphismus und daher $n = m$.
2. Sei $f \colon D \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Für $\boldsymbol{a} \in D$ und $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ ist $df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = \mathsf{J}f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}^{\mathsf{t}}$, und daher gilt: $df(\boldsymbol{a}) \in \mathsf{Is}(\mathbb{R}^n) \iff \det \mathsf{J}f(\boldsymbol{a}) \neq 0$. Insbesondere:

$$f \ \text{ ist ein Diffeomorphismus} \iff f \text{ ist injektiv, und } (\forall \boldsymbol{a} \in D)\ \ \det \mathsf{J}f(\boldsymbol{a}) \neq 0\,.$$

Satz 10.6 (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^p$)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ und $P_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Polarkoordinaten-abbildung* (siehe Satz 9.13). *Sei*

$$\Pi_n = \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \times \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)^{n-2} \subset \mathbb{R}^n \quad \textit{und} \quad \Sigma = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\le 0} \times \{0\})\,.$$

Dann ist $P_n \,|\, \Pi_n$ ein Diffeomorphismus, und $P_n(\Pi_n) = \Sigma \times \mathbb{R}^{n-2} \subset \mathbb{R}^n$.

Beweis. Nach Satz 9.13 ist $P_n \,|\, \Pi_n \colon \Pi_n \to \Sigma \times \mathbb{R}^{n-2}$ bijektiv, und $(\forall \boldsymbol{y} \in \Pi_n\ \ \det \mathsf{J}P_n(\boldsymbol{y}) \neq 0$. Daher folgt die Behauptung aus obiger Bemerkung 2. □

10.3 Implizite Funktionen

Satz 10.7. *Seien X, Y, Z Banachräume, $D \subset X \times Y$ offen, $(a, b) \in D$, $f \colon D \to Z$ eine C^1-Abbildung und $f(a, b) = 0$. Die partiellen Differenziale*

$$d_1 f \colon D \to \mathsf{L}(X, Z) \quad \textit{und} \quad d_2 f \colon D \to \mathsf{L}(Y, Z)$$

seien definiert durch

$$d_1 f(x, y)(u) = df(x, y)(u, 0) \quad \textit{und} \quad d_2 f(x, y)(v) = df(x, y)(0, v)\,.$$

Es sei $d_2 f(a, b) \in \mathsf{Is}(Y, Z)$.

Dann gibt es offene Mengen $D' \subset X$ und $D'' \subset Y$ mit $(a, b) \in D' \times D'' \subset D$ und eine C^1-Abbildung $g \colon D' \to Y$ mit $g(D') \subset D''$, so dass $f^{-1}(0) \cap (D' \times D'') = \mathrm{Graph}(g)$, das heißt,

$$(\forall (x, y) \in D' \times D'')\ \ \big[\, f(x, y) = 0 \iff y = g(x) \,\big]\,,$$

und

$$(\forall x \in D')\ \ \Big[\, d_2 f\big(x, g(x)\big) \in \mathsf{Is}(Y, Z) \ \ \wedge \ \ dg(x) = -d_2 f\big(x, g(x)\big)^{-1} \circ d_1 f\big(x, g(x)\big) \,\Big]\,.$$

Ist $p \in \mathbb{N}$ und f p-mal [stetig] differenzierbar, so ist auch g p-mal [stetig] differenzierbar.

Beweis. Die Abbildungen $\varepsilon_1 \colon X \to X \times Y$, $\varepsilon_2 \colon Y \to X \times Y$, $\varepsilon_1^* \colon \mathsf{L}(X \times Y, Z) \to \mathsf{L}(X, Z)$ und $\varepsilon_2^* \colon \mathsf{L}(X \times Y, Z) \to \mathsf{L}(Y, Z)$, definiert durch $\varepsilon_1(x) = (x, 0)$, $\varepsilon_2(y) = (0, y)$, $\varepsilon_1^*(\varphi) = \varphi \circ \varepsilon_1$ und $\varepsilon_2^*(\varphi) = \varphi \circ \varepsilon_2$, sind stetige $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen, und für $i \in \{1, 2\}$ ist $d_i f = \varepsilon_i^* \circ df$, also insbesondere $d_i f$ stetig. Nach Voraussetzung ist $d_2 f(a, b) \in \mathsf{Is}(Y, Z)$, und nach Satz 10.2 ist $\mathsf{Is}(Y, Z) \subset \mathsf{L}(Y, Z)$ offen. Daher gibt es eine offene Menge $D_1 \subset D$ mit $(a, b) \in D_1$, so dass $d_2 f(D_1) \subset \mathsf{Is}(Y, Z)$.

Sei nun $F \colon D \to X \times Z$ definiert durch $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Dann ist F ist eine C^1-Abbildung, $F(a, b) = (a, 0)$, und für alle $(x, y) \in D$ und $(u, v) \in X \times Y$ gilt

$$dF(x, y)(u, v) \;=\; \big(u, df(x, y)(u, v)\big) \;=\; \big(u,\, d_1 f(x, y)(u) + d_2 f(x, y)(v)\big)\,.$$

Für $(x, y) \in D_1$ ist $dF(x, y) \in \mathsf{Is}(X \times Y, X \times Z)$

$$\Big[\text{es ist } \;\big(\forall (u, z) \in X \times Z\big)\;\; dF(x, y)^{-1}(u, z) = \big(u,\, -d_2 f(x, y)^{-1}[d_1 f(x, y)(u) - z]\big)\Big]\,.$$

Nach Satz 10.5 gibt es eine offene Menge $D_0 \subset D_1$ mit $(a, b) \in D_0$, so dass $F \,|\, D_0$ ein Diffeomorphismus ist. Daher ist

$$G = (G_1, G_2) = (F \mid D_0)^{-1} \colon F(D_0) \to D_0 \subset D \subset X \times Y$$

eine C^1-Abbildung, und für alle $(x, y) \in D_0$ gilt:

$$f(x, y) = 0 \iff F(x, y) = (x, 0) \iff (x, y) = G(x, 0) \iff y = G_2(x, 0)\,.$$

Insbesondere ist $G_2(a, 0) = b$. Da $(a, 0) \in F(D_0)$ und $F(D_0)$ offen ist, gibt es offenen Mengen $D_1' \subset X$ und $D'' \subset Y$, so dass $(a, b) \in D_1' \times D'' \subset D_0$ und $(\forall x \in D_1')$ $(x, 0) \in F(D_0)$. Die Abbildung $g_1 \colon D_1' \to Y$, definiert durch $g_1(x) = G_2(x, 0)$, ist eine C^1-Abbildung, und wegen der Stetigkeit von g_1 in a gibt es eine offene Menge $D' \subset D_1'$ mit $a \in D'$ und $g(D') \subset D''$. Dann ist auch $D' \times D'' \subset D_0$, und mit $g = g_1 \,|\, D'$ folgt

$$\big(\forall (x, y) \in D' \times D''\big)\;\; \big[\, f(x, y) = 0 \iff y = g(x)\,\big]\,.$$

Für $x \in D'$ ist $(x, g(x)) \in D_1$, also $d_2 f(x, g(x)) \in \mathrm{Is}(Y, Z)$, und wegen $f(x, g(x)) = 0$ folgt

$$0 \;=\; d[f \circ (\mathrm{id}_X, g)](x) \;=\; df(x, g(x)) \circ (\mathrm{id}_X, dg(x)) \;=\; d_1 f(x, g(x)) + d_2 f(x, g(x)) \circ dg(x)$$

und daher

$$dg(x) \;=\; -d_2 f(x, g(x))^{-1} \circ d_1 f(x, g(x))\,.$$

Ist f p-mal [stetig] differenzierbar, so gilt dies nach den Sätzen 7.6 und 9.16 auch für F, G und g. □

Bemerkung (Spezialfall von Satz 10.7).

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Wir schreiben die Punkte von $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ in der Form $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ mit $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Ist $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ und $(\boldsymbol{e}_1', \ldots, \boldsymbol{e}_m')$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^m$, so ist $\big((\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{0}), \ldots, (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_1'), \ldots, (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_m')\big)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in D$, $f = (f_1, \ldots, f_m) \colon D \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Abbildung und $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$. Für $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in D$ heißen die Matrizen

$$\mathsf{J}_1 f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\Big)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}} \quad \text{und} \quad \mathsf{J}_2 f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\Big)_{i,\, j=1,\ldots,m}$$

die *erste* und die *zweite Jacobi'sche Matrix* von f.

Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist $\mathsf{J}_1 f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_{i,j} = df_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{0}) = d_1 f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{e}_j)$, und daher $(\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n)$ $d_1 f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{u}) = \mathsf{J}_1 f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \boldsymbol{u}^{\mathsf{t}}$. In gleicher Weise ist für alle i, $j \in \{1, \ldots, m\}$

$\mathsf{J}_2f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_{i,j} = df_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}'_j) = d_2f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{e}'_j)$, und $(\forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^m)\ \ d_2f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{v}) = \mathsf{J}_2f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{v}^{\mathsf{t}}$. Insbesondere ist genau dann $d_2f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathsf{Is}(\mathbb{R}^m)$, wenn $\det\mathsf{J}_2f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq 0$.

Sei $\det\mathsf{J}_2f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\neq 0$.

Dann gibt es offene Mengen $D'\subset\mathbb{R}^n$ und $D''\subset\mathbb{R}^m$ mit $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in D'{\times}D''\subset D$, und es gibt eine C^1-Abbildung $g=(g_1,\ldots,g_m)\colon D'\to D''\hookrightarrow\mathbb{R}^m$, so dass

$$(\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in D'{\times}D'')\ \ \bigl[\,f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0 \iff \boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x})\,\bigr].$$

Für alle $\boldsymbol{x}\in D'$ ist dann $\det\mathsf{J}_2f\bigl(\boldsymbol{x},g(\boldsymbol{x})\bigr)\neq 0$, und $\mathsf{J}g(\boldsymbol{x}) = -\mathsf{J}_2f\bigl(\boldsymbol{x},g(\boldsymbol{x})\bigr)^{-1}\mathsf{J}_1f\bigl(\boldsymbol{x},g(\boldsymbol{x})\bigr)$.

Spezialfall $m=1$:

Jetzt schreiben wir die Punkte von $\mathbb{R}^{n+1}=\mathbb{R}^n{\times}\mathbb{R}$ in der Form $(\boldsymbol{x},y)=(x_1,\ldots,x_n,y)$. Sei $D\subset\mathbb{R}^n{\times}\mathbb{R}$ offen, $(\boldsymbol{a},b)\in D$, $f\colon D\to\mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, $f(\boldsymbol{a},b)=0$ und $f_y(\boldsymbol{a},b)\neq 0$. Dann gibt es offene Mengen $D'\subset\mathbb{R}^n$ und $D''\subset\mathbb{R}$ mit $(\boldsymbol{a},b)\in D'\times D''\subset D$ und eine C^1-Funktion $g\colon D'\to\mathbb{R}$ mit $g(D')\subset D''$, so dass

$$(\forall(\boldsymbol{x},y)\in D'{\times}D'')\ \ \bigl[\,f(\boldsymbol{x},y)=0 \iff y=g(\boldsymbol{x})\,\bigr].$$

Für alle $\boldsymbol{x}\in D'$ ist $f_y(\boldsymbol{x},g(\boldsymbol{x})\neq 0$, und

$$(\forall j\in\{1,\ldots,p\})\ \ g_{x_j}(\boldsymbol{x}) = -\,f_y\bigl(\boldsymbol{x},g(\boldsymbol{x})\bigr)^{-1}f_{x_j}\bigl(\boldsymbol{x},g(\boldsymbol{x})\bigr)\,.$$

10.4 Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt seien $p\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $n\in\mathbb{N}$, $k\in\{1,\ldots,n\}$ *und* $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^k{\times}\mathbb{R}^{n-k}$ (*mit den Konventionen* $\mathbb{R}^0=\{0\}$ *und* $\mathbb{R}^n{\times}\mathbb{R}^0=\mathbb{R}^n$).

Definition 10.4. Eine Teilmenge $F\subset\mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionales C^p-Flächenstück*, wenn gilt:
Es gibt eine offene Menge $\emptyset\neq D\subset\mathbb{R}^k$ und eine injektive C^p-Abbildung $\phi\colon D\to\mathbb{R}^n$, so dass $\phi(D)=F$, $\phi^{-1}\colon F\to D$ ist stetig, und $(\forall\boldsymbol{y}\in D)\ \ \mathrm{Rang}(d\phi(\boldsymbol{y}))=k$.

Jedes solche Paar (D,ϕ) heißt *Parametrisierung* oder (k-dimensionales) *Koordinatensystem* von F.

Beispiele:

1. Kurvenstücke. Ein 1-dimensionales C^p-Flächenstück (*Kurvenstück*) im $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $C\subset\mathbb{R}^n$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine offene Menge $\emptyset\neq D\subset\mathbb{R}$ und eine injektive C^p-Abbildung $\phi\colon D\to\mathbb{R}^n$, so dass $\phi(D)=C$, $\phi^{-1}\colon C\to D$ ist stetig, und $(\forall y\in D)\ \ \phi'(y)\neq 0$. Ist D ein Intervall, so ist (geometrisch betrachtet) C eine parametrisierte doppelpunktfreie Kurve ohne stationäre Punkte.
2. Graphen. Sei $k<n$, $\emptyset\neq D\subset\mathbb{R}^k$ offen, $f\colon D\to\mathbb{R}^{n-k}$ eine C^p-Abbildung und
$$\Gamma_f\colon D\to\mathbb{R}^n \quad\text{definiert durch}\quad \Gamma_f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))\in\mathbb{R}^n\,.$$
Dann ist $\Gamma_f(D)=\mathrm{Graph}(f)$, Γ_f ist eine injektive C^p-Abbildung, Γ_f^{-1} ist stetig (es ist die Einschränkung der Projektion $\mathbb{R}^k{\times}\mathbb{R}^{n-k}\to\mathbb{R}^k$ auf $\mathrm{Graph}(f)$). Für $\boldsymbol{x}\in D$ und $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^k$ ist $d\Gamma_f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v})=\bigl(\boldsymbol{v},df(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v})\bigr)$, also $\mathrm{Rang}(d\Gamma_f(\boldsymbol{x}))=k$. Daher ist $\mathrm{Graph}(f)$ ein k-dimensionales C^p-Flächenstück im $\mathbb{R}^n$, und (D,Γ_f) ist eine Parametrisierung von $\mathrm{Graph}(f)$.

3. Offene Mengen. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist D ein n-dimensionales Flächenstück im $\mathbb{R}^n$, und (D, id_D) ist eine Parametrisierung von D.
4. Affine Räume. Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ ein k-dimensionaler affiner Teilraum, also $F = \boldsymbol{p} + U$ mit einem k-dimensionalen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$. Sei $\varphi \in \mathsf{Is}(\mathbb{R}^k, U)$ und $\phi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p} + \varphi(\boldsymbol{x})$. Dann ist ϕ eine injektive C^∞-Funktion, und
$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k) \;\; d\phi(\boldsymbol{x}) = \varphi\,.$$
Es ist $\mathrm{Rang}(\varphi) = k$, und $(\forall \boldsymbol{z} \in F)\;\phi^{-1}(\boldsymbol{z}) = \varphi^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{p})$. Daher ist $\phi^{-1}\colon F \to \mathbb{R}^k$ stetig, F ist ein k-dimensionales C^∞-Flächenstück im $\mathbb{R}^n$ und $(\mathbb{R}^k, \phi)$ ist eine Parametrisierung von F.

Satz 10.8. *Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ ein k-dimensionales C^p-Flächenstück.*

1. *Sei (D, ϕ) eine Parametrisierung von F und $\boldsymbol{x}_0 \in D$. Dann gibt es eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{0}) \in V$ und einen C^p-Diffeomorphismus $h\colon V \to \mathbb{R}^n$, so dass gilt:*
   - $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k)\;\; \big[\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \in V \implies \boldsymbol{x} \in D \,\wedge\, h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \phi(\boldsymbol{x})\,\big]$.
   - $F \cap h(V) = h\big(V \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\})\big)$.
2. *Seien (D, ϕ) und $(\widetilde{D}, \widetilde{\phi})$ Parametrisierungen von F. Dann ist $\widetilde{\phi}^{-1} \circ \phi\colon D \to \widetilde{D}$ ein Diffeomorphismus.*

Beweis. 1. Es ist $\mathrm{Rang}(d\phi(\boldsymbol{x}_0)) = \mathrm{Rang}(d\phi_1(\boldsymbol{x}_0), \ldots, d\phi_p(\boldsymbol{x}_0)) = k$, und wir können annehmen, dass $\mathrm{Rang}(d\phi_1(\boldsymbol{x}_0), \ldots, d\phi_k(\boldsymbol{x}_0)) = k$ (sonst nummerieren wir die Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ um). Für $\boldsymbol{x} \in D$ setzen wir
$$\mathsf{J}_1\phi(\boldsymbol{x}) = \big(\partial_i \phi_j(\boldsymbol{x})\big)_{i,\,j=1,\ldots,k}\,, \quad \text{und dann ist} \quad \det \mathsf{J}_1\phi(\boldsymbol{x}_0) \neq 0\,.$$
Sei $h_1\colon D \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $h_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y})$. Dann ist h_1 eine C^p-Funktion (es existieren alle partiellen Ableitungen p-ter Ordnung und sind stetig), und für $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in D \times \mathbb{R}^{n-k}$ ist
$$\mathsf{J}h_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \mathsf{J}_1\phi(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{0}_{k,n-k} \\ * & I_{n-k} \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \det \mathsf{J}h_1(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{0}) \neq 0\,.$$
Daher ist $dh_1(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{0}) \in \mathsf{Is}(\mathbb{R}^n)$, und nach Satz 10.5 gibt es eine offene Menge $V' \subset D \times \mathbb{R}^{n-k}$ mit $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{0}) \in V'$, so dass $h_1 \,|\, V'\colon V' \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus ist. Sei nun
$$D' = \{\boldsymbol{x} \in D \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \in V'\}\,.$$
D' ist offen, und $\phi(D') = (\phi^{-1})^{-1}(D')$. Wegen der Stetigkeit von ϕ^{-1} gibt es nach Satz 4.17 eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\phi(D') = F \cap U$, und dann ist auch $V = h_1^{-1}(U) \cap V' \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $h = h_1 \,|\, V\colon V \to \mathbb{R}^n$ ist ein Diffeomorphismus.

Ist nun $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$ mit $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \in V \subset V'$, so ist $\boldsymbol{x} \in D$ und $h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = h_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \phi(\boldsymbol{x})$.

Wir behaupten nun: $F \cap h(V) = h(V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\})$.

Sei $\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x}) \in F \cap h(V)$. Wegen $F \cap h(V) \subset F \cap U = \phi(D')$ folgt $\boldsymbol{x} \in D'$ und daher $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \in V'$. Folglich ist $\boldsymbol{y} = h_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \in h_1\big(V \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\})\big)$, also $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \in V \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\})$ und $\boldsymbol{y} = h_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \in h\big(V \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\})\big)$.

Ist umgekehrt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l$ und $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \in V$, so folgt $h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \phi(\boldsymbol{x}) \in F \cap h(V)$.

2. $\widetilde{\phi}^{-1} \circ \phi$ ist bijektiv, und $(\widetilde{\phi}^{-1} \circ \phi)^{-1} = \phi^{-1} \circ \widetilde{\phi}$. Aus Symmetriegründen genügt es daher, zu zeigen: $\widetilde{\phi}^{-1} \circ \phi$ ist eine C^1-Funktion. Sei $\boldsymbol{x}_0 \in D$ und $\widetilde{\boldsymbol{x}}_0 = (\phi^{-1} \circ \phi)(\boldsymbol{x}_0) \in \widetilde{D}$. Nach 1. gibt es

offene Mengen $V,\, \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ mit $(\boldsymbol{x}_0, \mathbf{0}) \in V$, $(\widetilde{\boldsymbol{x}}_0, \mathbf{0}) \in \widetilde{V}$ und Diffeomorphismen $h\colon V \to \mathbb{R}^n$, $\widetilde{h}\colon \widetilde{V} \to \mathbb{R}^n$, so dass für alle $\boldsymbol{x},\, \widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^k$ gilt: Ist $(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) \in V$, so folgt $\boldsymbol{x} \in D$ und $h(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) = \phi(\boldsymbol{x})$. Ist $(\widetilde{\boldsymbol{x}}, \mathbf{0}) \in \widetilde{V}$, so folgt $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{D}$ und $\widetilde{h}(\widetilde{\boldsymbol{x}}, \mathbf{0}) = \widetilde{\phi}(\widetilde{\boldsymbol{x}})$. Insbesondere ist $\phi(\boldsymbol{x}_0) \in h(V) \cap \widetilde{h}(\widetilde{V})$. Seien $\varepsilon\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ und $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definiert durch $\varepsilon(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \mathbf{0})$ und $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$. Dann ist $D_0 = (h \circ \varepsilon)^{-1}(\widetilde{h}(\widetilde{V}))$ offen, $\boldsymbol{x}_0 \in D_0$, und $\widetilde{\phi}^{-1} \circ \phi \,|\, D_0 = \pi \circ \widetilde{h}^{-1} \circ h \circ \varepsilon \,|\, D_0$ ist differenzierbar. $\square$

Definition 10.5. Eine Teilmenge $\emptyset \neq F \subset \mathbb{R}^n$ heißt (*reguläre*) *k-dimensionale gleichungsdefinierte C^p-Fläche*, wenn es eine offene Menge $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ und eine C^p-Abbildung $g\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ gibt, so dass gilt:

$$F = g^{-1}(\mathbf{0}) = \{\boldsymbol{x} \in U \mid g(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}, \text{ und } (\forall \boldsymbol{x} \in F)\ \operatorname{Rang}(dg(\boldsymbol{x})) = n - k.$$

Beispiel:
$S^{N-1} = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1^2 + \ldots + x_N^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^N$ ist eine $(N-1)$-dimensionale gleichungsdefinierte C^∞-Fläche im $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Definiert man $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $g(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1$, so ist g eine C^∞-Funktion, $S^{n-1} = g^{-1}(0)$, und $(\forall (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1})$ $\mathsf{J}g(x_1, \ldots, x_n) = (2x_1, \ldots, 2x_n) \neq \mathbf{0}$. Daher ist $(\forall \boldsymbol{x} \in S^{n-1})$ $\operatorname{Rang}(dg(\boldsymbol{x})) = 1$.

Definition 10.6. Eine Teilmenge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ heißt (*reguläre*) *k-dimensionale C^p-Mannigfaltigkeit*, wenn für alle $\boldsymbol{a} \in M$ gilt:

Es gibt eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{a} \in U$ und einen C^p-Diffeomorphismus $h\colon U \to \mathbb{R}^n$, so dass $h(U \cap M) = h(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}\})$.

Satz 10.9 (Struktursatz für Mannigfaltigkeiten)**.** *Für eine Teilmenge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent*:

(a) *M ist eine k-dimensionale C^p-Mannigfaltigkeit.*

(b) *Zu jedem $\boldsymbol{a} \in M$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{a} \in U$, so dass $U \cap M$ eine k-dimensionale gleichungsdefinierte C^p-Fläche ist.*

(c) *Zu jedem $\boldsymbol{a} \in M$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{a} \in U$, so dass $U \cap M$ ein k-dimensionales C^p-Flächenstück ist.*

Insbesondere ist jede k-dimensionale gleichungsdefinierte C^p-Fläche und jedes k-dimensionales C^p-Flächenstück eine k-dimensionale C^p-Mannigfaltigkeit.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) Sei $\boldsymbol{a} \in M$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\boldsymbol{a} \in U$ und $h = (h', g)\colon U \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ ein C^p-Diffeomorphismus mit $h(U \cap M) = h(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}\})$. Dann ist $g\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine C^p-Abbildung, $U \cap M = g^{-1}(\mathbf{0})$, und für alle $\boldsymbol{x} \in U$ ist $\operatorname{Rang}(dh(\boldsymbol{x})) = \operatorname{Rang}(dh'(\boldsymbol{x}), dg(\boldsymbol{x})) = n$, also $\operatorname{Rang}(dg(\boldsymbol{x})) = n - k$. Daher ist $U \cap M$ eine k-dimensionale gleichungsdefinierte C^p-Fläche.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sei $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}'') \in M \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\boldsymbol{a} \in U$ und $g\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine C^p-Abbildung mit $U \cap M = g^{-1}(\mathbf{0})$ und $(\forall \boldsymbol{x} \in U \cap M)$ $\operatorname{Rang}(dg(\boldsymbol{x})) = n - k$. Es ist $\mathsf{J}g(\boldsymbol{a}) = (\mathsf{J}_1 g(\boldsymbol{a}), \mathsf{J}_2 g(\boldsymbol{a}))$ mit $\mathsf{J}_1 g(\boldsymbol{a}) \in \mathsf{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$ und $\mathsf{J}_2 g(\boldsymbol{a}) \in \mathsf{M}_{n-k}(\mathbb{R})$, und wegen $\operatorname{Rang}(dg(\boldsymbol{a})) = \operatorname{Rang}(\mathsf{J}g(\boldsymbol{a})) = n - k$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\operatorname{Rang}(\mathsf{J}_2 g(\boldsymbol{a})) = n - k$ (sonst nummerieren wir die Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ um). Auf Grund der Bemerkung nach Satz 10.7 ist dann $d_2 g(\boldsymbol{a}) \in \mathsf{Is}(\mathbb{R}^{p-k})$.

Nach Satz 10.7 gibt es offene Mengen $D' \subset \mathbb{R}^k$ und $D'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ mit $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}'') \in D' \times D'' \subset U$ und eine C^p-Funktion $\phi\colon D' \to D''$, so dass $\operatorname{Graph}(\phi) = g^{-1}(\mathbf{0}) \cap (D' \times D'') = (D' \times D'') \cap M$.

Auf Grund von Beispiel 2 nach Definition 10.4 ist daher $(D' \times D'') \cap M$ ein k-dimensionales C^p-Flächenstück.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sei $\boldsymbol{a} \in M$ und $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\boldsymbol{a} \in U_1$, so dass $U_1 \cap M$ ein k-dimensionales C^p-Flächenstück ist. Sei (D, ϕ) eine Parametrisierung von $U_1 \cap M$ und $\boldsymbol{x}_0 = \phi^{-1}(\boldsymbol{a}) \in D$. Nach Satz 10.8 gibt es eine offene Teilmenge $V_1 \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ mit $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{0}) \in V_1$ und einen C^p-Diffeomorphismus $h_1 \colon V_1 \to \mathbb{R}^n$, so dass

$$U_1 \cap M \cap h_1(V_1) = h_1\big(V_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\})\big)\,.$$

Dann sind die Mengen $V = h_1^{-1}(U_1) \subset V_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $U = h_1(V) \subset U_1 \subset \mathbb{R}^n$ offen, und die Abbildung $h = (h_1 \,|\, V)^{-1} \colon U \to \mathbb{R}^n$ ist ein C^p-Diffeomorphismus mit $h(U) = V$. Wegen $V_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\}) \subset h_1^{-1}(U_1) \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\}) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\})$ ist $V_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\}) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\})$, und $U \cap M \subset h_1(V_1) \cap U_1 \cap M = h_1\big(V_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\}) = h_1\big(V \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\}) \subset U \cap M$, also $U \cap M = h_1(V \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\})$ und daher $h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\}) = h(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{\boldsymbol{0}\})$. $\square$

Definition 10.7. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit und $\boldsymbol{a} \in M$. Ein Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor* an M in $\boldsymbol{a}$, wenn es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine differenzierbare Abbildung $\gamma \colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$ (eine glatte Kurve) gibt, so dass

$$\gamma\big((-\delta, \delta)\big) \subset M\,, \quad \gamma(0) = \boldsymbol{a} \quad \text{und} \quad \gamma'(0) = \boldsymbol{v}\,.$$

Die Menge $\mathsf{T}_{\boldsymbol{a}}M$ aller Tangentialvektoren an M in $\boldsymbol{a}$ heißt *Tangentialraum* und die Menge $\boldsymbol{a} + \mathsf{T}_{\boldsymbol{a}}M$ heißt *Tangentialmannigfaltigkeit* von M in $\boldsymbol{a}$.

Satz 10.10. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit, $\boldsymbol{a} \in M$ und $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.*

- *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\boldsymbol{a} \in U$ und $g \colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine C^1-Abbildung, so dass $U \cap M = g^{-1}(\boldsymbol{0})$ und* $\operatorname{Rang}(dg(\boldsymbol{a})) = n - k$.
- *Sei $D \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\boldsymbol{x}_0 \in D$ und $\phi \colon D \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung mit $\phi(D) \subset M$, $\phi(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a}$ und* $\operatorname{Rang}(d\phi(\boldsymbol{x}_0)) = k$.

Dann sind die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $\boldsymbol{v} \in \mathsf{T}_{\boldsymbol{a}}M$.

(b) $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\big[\, dg(\boldsymbol{a}) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}\big]$.

(c) $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Bi}\big[\, d\phi(\boldsymbol{x}_0) \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n\big]$.

Insbesondere ist $\mathsf{T}_{\boldsymbol{a}}M = \operatorname{Ker}\big(dg(\boldsymbol{a})\big) = \operatorname{Bi}\big(d\phi(\boldsymbol{x}_0)\big)$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) Sei $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\gamma \colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung, so dass $\gamma(\,(-\delta, \delta)\,) \subset M$, $\gamma(0) = \boldsymbol{a}$ und $\gamma'(0) = \boldsymbol{v}$. Dabei können wir $\gamma(\,(-\delta, \delta)\,) \subset U$ annehmen. Dann ist $[g \circ \gamma \colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^{n-k}] = 0$ und daher

$$\boldsymbol{0} = (g \circ \gamma)'(0) = d(g \circ \gamma)(0)(1) = dg(\gamma(0))(\gamma'(0)) = dg(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v})\,.$$

(b) $\Rightarrow$ (c) $\phi^{-1}(U) \subset D$ ist offen, $\boldsymbol{x}_0 \in \phi^{-1}(U)$, und $g \circ \phi \,|\, \phi^{-1}(U) = 0$. Daher folgt $0 = d(g \circ \phi)(\boldsymbol{x}_0) = dg(\boldsymbol{a}) \circ d\phi(\boldsymbol{x}_0) \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ und daher $\operatorname{Bi}(d\phi(\boldsymbol{x}_0)) \subset \operatorname{Ker}(dg(\boldsymbol{a}))$. Wegen $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Bi}(d\phi(\boldsymbol{x}_0)) = \operatorname{Rang}(d\phi(\boldsymbol{x}_0)) = k = p - \operatorname{Rang}(dg(\boldsymbol{a})) = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}((dg(\boldsymbol{a}))$ folgt $\operatorname{Bi}(d\phi(\boldsymbol{x}_0)) = \operatorname{Ker}(dg(\boldsymbol{a}))$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sei $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^k$ mit $\boldsymbol{v} = d\phi(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{u})$, $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(\forall t \in (-\delta, \delta)\,)$ $\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u} \in D$, und sei $\gamma \colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\gamma(t) = \phi(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u})$. Dann ist γ differenzierbar, $\gamma\big((-\delta, \delta)\big) \subset M$, $\gamma(0) = \phi(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a}$ und $\gamma'(0) = d\gamma(0)(1) = d\phi(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$. $\square$

Definition 10.8. Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $g = (g_1, \ldots, g_m)\colon D \to \mathbb{R}^m$ und $\boldsymbol{a} \in g^{-1}(\mathbf{0})$. Man sagt, f hat in $\boldsymbol{a}$ ein *lokales Extremum unter den Nebenbedingungen* $g_1 = \ldots = g_m = 0$, wenn $f \,|\, g^{-1}(\mathbf{0})$ in $\boldsymbol{a}$ ein lokales Extremum hat.

Satz 10.11 (Multiplikatorenregel von Lagrange)**.** *Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar, $m \in \mathbb{N}$, $g = (g_1, \ldots, g_m)\colon D \to \mathbb{R}^m$ sei eine C^1-Abbildung, $\boldsymbol{a} \in g^{-1}(\mathbf{0})$ und* $\mathrm{Rang}(dg(\boldsymbol{a})) = m$.

f habe in $\boldsymbol{a}$ ein lokales Extremum unter den Nebenbedingungen $g_1 = \ldots = g_m = 0$. Dann ist $df(\boldsymbol{a})$ linear abhängig von $dg_1(\boldsymbol{a}), \ldots, dg_m(\boldsymbol{a})$ (in $\mathsf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$). Insbesondere gilt:

$$(\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R})\;\; df(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j dg_j(\boldsymbol{a}) \;\;\Big[\iff \;\; (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\;\; \partial_i f(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial_i g_j(\boldsymbol{a})\Big].$$

Beweis. Wir benötigen den folgenden Hilfssatz aus der Linearen Algebra.

H. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \psi \in \mathsf{L}(V, \mathbb{R})$ und

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)\colon V \to \mathbb{R}^m.$$

Genau dann ist ψ linear abhängig von $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, wenn $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.

Beweis von **H.** Sei $\overline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \psi)\colon V \to \mathbb{R}^{m+1}$ und $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Basis von V. Dann ist $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) = \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\psi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$, und es gilt (mit $\varphi_{m+1} = \psi$):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi) \iff \mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) = \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = \dim \mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) \\
&\iff \dim \overline{\varphi}(V) = \dim \varphi(V) \iff \mathrm{Rang}\big(\varphi_j(u_i)\big)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,n}} = \mathrm{Rang}\big(\varphi_j(u_i)\big)_{\substack{j=1,\ldots,m+1 \\ i=1,\ldots,n}} \\
&\iff (\exists c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R})\; (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\;\; \psi(u_i) = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(u_i) \\
&\iff (\exists c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R})\;\; \psi = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j \iff \psi \text{ ist linear abhängig von } \varphi_1, \ldots, \varphi_m.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist

$$\mathrm{Rang}(dg(\boldsymbol{a})) = \mathrm{Rang}\big(\partial_i g_j(\boldsymbol{a})\big)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,n}} = m, \quad \text{also o. E.} \quad \mathrm{Rang}\big(\partial_i g_j(\boldsymbol{a})\big)_{j,\, i=1,\ldots,m} = m$$

(sonst nummerieren wir die Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ um). Da alle partiellen Ableitungen von g stetig sind, ist die Funktion $\Delta\colon D \to \mathbb{R}$, definiert durch $\Delta(\boldsymbol{x}) = \det\big[\big(\partial_i g_j(\boldsymbol{x})\big)_{j,\, i=1,\ldots,m}\big]$, stetig, und wegen $\Delta(\boldsymbol{a}) \neq 0$ ist die Menge $U = \{\boldsymbol{x} \in D \mid \Delta(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ offen. Dann ist $(\forall \boldsymbol{x} \in U)$ $\mathrm{Rang}(dg(\boldsymbol{x})) = m$, also $U \cap g^{-1}(\mathbf{0})$ eine gleichungsdefinierte m-dimensionale Fläche, und nach Satz 10.10 ist $\mathsf{T}_{\boldsymbol{a}}(U \cap g^{-1}(\mathbf{0})) = \mathrm{Ker}(dg(\boldsymbol{a}))$.

Nach **H** ist daher zu zeigen: $\mathsf{T}_{\boldsymbol{a}}(U \cap g^{-1}(\mathbf{0})) \subset \mathrm{Ker}(df(\boldsymbol{a}))$.

Sei $\boldsymbol{v} \in \mathsf{T}_{\boldsymbol{a}}(U \cap M)$. Dann gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine differenzierbare Abbildung $\gamma\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(\,(-\delta, \delta)\,) \subset U \cap M$, $\gamma(0) = \boldsymbol{a}$ und $\gamma'(0) = \boldsymbol{v}$. Die Funktion $f \circ \gamma\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ hat ein lokales Extremum bei 0, und daher ist $0 = (f \circ \gamma)'(0) = df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v})$. $\square$

11. Mehrdimensionale Integralrechnung: elementare Theorie

Im ganzen Abschnitt sei $n \in \mathbb{N}$.

11.1. Integration von Treppenfunktionen

Definition 11.1. Für $a \in \overline{\mathbb{R}}$ sei $[a,a] = \{a\}$ und $[a,a) = (a,a] = (a,a) = \emptyset$.

1. Eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}$ heißt 1-*dimensionaler Quader*, wenn
$$(\exists a,\, b \in \mathbb{R}) \quad a \leq b \ \wedge \ (a,b) \subset Q \subset [a,b]\,.$$
Man nennt dann $v(Q) = v_1(Q) = b - a$ den 1-*dimensionalen Inhalt* oder die *Länge* von Q.
2. Eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Quader*, wenn $Q = Q_1 \times \ldots \times Q_n$ mit 1-dimensionalen Quadern $Q_1, \ldots, Q_n \subset \mathbb{R}$. Man nennt dann
$$v(Q) = v_n(Q) = \prod_{\nu=1}^{n} v_1(Q_\nu) \ \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$
den (n-*dimensionalen elementargeometrischen*) *Inhalt* von Q. Man nennt Q *ausgeartet*, wenn $v_n(Q) = 0$.

Bemerkungen:

1. Genau dann ist $Q \subset \mathbb{R}$ ein 1-dimensionaler Quader, wenn entweder $|Q| \leq 1$ oder Q ein beschränktes Intervall von $\mathbb{R}$ ist.

2. Sei $\emptyset \neq Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $Q = Q_1 \times \ldots \times Q_n$ mit 1-dimensionalen Quadern $Q_1, \ldots, Q_n$. Dann gilt: Q offen [abgeschlossen] $\iff$ $(\forall \nu \in \{1, \ldots, n\})$ Q_ν offen [abgeschlossen].

3. Der Durchschnitt endlich vieler Quader in $\mathbb{R}^n$ ist wieder ein Quader.

4. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es einen offenen Quader $Q_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ mit $Q \subset Q_\varepsilon$ und $v(Q_\varepsilon) < v(Q) + \varepsilon$.

Definition 11.2.

1. Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ sei
$$1_M \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{definiert durch} \quad 1_M(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls} \quad \boldsymbol{x} \in M\,, \\ 0\,, & \text{falls} \quad \boldsymbol{x} \notin M\,. \end{cases}$$
1_M heißt *charakteristische Funktion* von M.
2. Eine Funktion $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es ein $p \in \mathbb{N}$, Quader $Q_1, \ldots, Q_p \subset \mathbb{R}^n$ und $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{C}$ gibt, so dass
$$(*) \qquad \varphi = \sum_{j=1}^{p} c_j 1_{Q_j}\,.$$
Ist φ durch $(*)$ gegeben, so nennt man
$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{p} v(Q_j) c_j$$
das *Integral* von φ über $\mathbb{R}^n$.

Obige Definition des Integrals ist unabhängig von der Darstellung $(*)$ von φ. Das folgt für $n=1$ aus Satz 11.2 und für $n>1$ aus Satz 11.3.

Satz 11.1.

1. *Sei $\mathcal{E}$ eine endliche Menge von Quadern in $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine endliche Menge $\mathcal{E}^*$ paarweiser disjunkter offener oder ausgearteter nicht-leerer Quader in $\mathbb{R}^n$, so dass*
$$(\forall Q^* \in \mathcal{E}^*)\ (\exists Q \in \mathcal{E}) \quad Q \supset Q^* \qquad \textit{und} \qquad (\forall Q \in \mathcal{E}) \quad Q = \bigcup_{Q^* \in \mathcal{E}^*,\, Q^* \subset Q} Q^*\,.$$
2. *Ist $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Treppenfunktion, so gibt ein $k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkte offene oder ausgeartete Quader $P_1, \ldots, P_k \subset \mathbb{R}^n$ und $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{C}$, so dass*
$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu 1_{P_\nu}\,.$$
Insbesondere folgt: Ist $\varphi(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}$ $[\varphi(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}_{\ge 0}]$, so ist $b_j \in \mathbb{R}$ $[b_j \in \mathbb{R}_{\ge 0}]$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Beweis. 1. Für $\emptyset \ne Q \in \mathcal{E}$ sei $Q = Q_1 \times \ldots \times Q_n$ mit $(a_i, b_i) \subset Q_i \subset [a_i, b_i]$ und $E_i(Q) = \{a_i,\, b_i\}$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei
$$E_i = \bigcup_{\emptyset \ne Q \in \mathcal{E}} E_i(Q) = \{c_{i,0}, \ldots, c_{i,N_i}\} \quad \text{mit} \quad c_{i,0} < \ldots < c_{i,N_i}\,.$$
Sei $\mathcal{E}'$ die Menge aller Quader der Form
$$J = \prod_{i=1}^{n} J_i \quad \text{mit} \quad J_i \in \big\{(c_{i,\nu}, c_{i,\nu+1}) \bigm| \nu \in \{0, \ldots, N_i - 1\}\big\} \cup \big\{\{c_{i,\nu}\} \bigm| \nu \in \{0, \ldots, N_i\}\big\}\,.$$
Dann sind die Quader in $\mathcal{E}'$ nicht leer, paarweise disjunkt, offen oder ausgeartet, und jeder Quader in $\mathcal{E}$ ist die Vereinigung von Quadern in $\mathcal{E}'$. Die Menge $\mathcal{E}^*$ aller Quader aus $\mathcal{E}'$, welche in einem $Q \in \mathcal{E}$ liegen, hat die gewünschten Eigenschaften.

2. Sei
$$\varphi = \sum_{j=1}^{p} c_j 1_{Q_j} \quad \text{mit} \quad p \in \mathbb{N}\,, \quad \text{Quadern} \quad Q_1, \ldots, Q_p \quad \text{und} \quad c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{C}\,.$$
Sei nun $\mathcal{E} = \{Q_1, \ldots, Q_p\}$ und $\mathcal{E}^*$ wie in 1. Dann folgt
$$\varphi = \sum_{j=1}^{p} c_j \sum_{\substack{Q^* \in \mathcal{E}^* \\ Q^* \subset Q_j}} 1_{Q^*} \;=\; \sum_{Q^* \in \mathcal{E}^*} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ Q^* \subset Q_j}} c_j \Big) 1_{Q^*}\,. \qquad \square$$

Satz 11.2. *Sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.*

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   (a) *φ ist eine Treppenfunktion.*
   (b) *Es gibt ein $l \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$ mit $a_0 < a_1 < \ldots < a_l$, so dass $\varphi \,|\, (-\infty, a_0) = 0$, $\varphi \,|\, (a_l, \infty) = 0$, und $(\forall k \in \{1, \ldots, l\})$ $\varphi \,|\, (a_{k-1}, a_k)$ ist konstant.*

(c) *Es gibt* $a, b \in \mathbb{R}$*, so dass* $a < b$*,* $\varphi \,|\, \mathbb{R} \setminus [a,b] = 0$*, und* $\varphi \,|\, [a,b]$ *ist eine Treppenfunktion im Sinne von* Definition 8.1.

2. *Sei* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *eine Treppenfunktion, und seien* a*,* $b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *und* $\varphi \,|\, \mathbb{R} \setminus [a,b] = 0$*. Dann ist* φ *eine Regelfunktion, und es ist*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_a^b \varphi\,,$$

unabhängig von der zur Definition verwendeten Darstellung $(*)$ *in* Definition 11.2.

Beweis. 1. (a) $\Rightarrow$ (b) Nach Satz 11.1 gibt es paarweise disjunkte nicht-leere offene oder ausgeartete Quader $P_1, \ldots, P_k \subset \mathbb{R}$ und $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{C}$, so dass

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu 1_{P_\nu}\,.$$

Seien $a_0 < a_1 < \ldots < a_l$, so dass für alle $\nu \in \{1, \ldots, k\}$ entweder $P_\nu = (a_{j-1}, a_j)$ mit einem $j \in \{1, \ldots, l\}$ oder $P_\nu = \{a_j\}$. Dann ist $\varphi \,|\, (-\infty, a_0) = 0$, $\varphi \,|\, (a_l, \infty) = 0$, und $(\forall k \in \{1, \ldots, l\})\ \varphi \,|\, (a_{k-1}, a_k)$ ist konstant.

(b) $\Rightarrow$ (c) Setze $a = a_0$ und $b = a_l$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sei $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_l = b$, und sei $\big(\forall j \in \{1, \ldots, l\}\big)\ \varphi \,|\, (a_{j-1}, a_j) = c_j \in \mathbb{C}$ (konstant). Dann ist

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{l} c_\nu 1_{(a_{\nu-1}, a_\nu)} \;+\; \sum_{\nu=0}^{l} \varphi(a_\nu) 1_{\{a_\nu\}}\,.$$

2. Nach 1.(c) ist φ eine Regelfunktion. Sei

$$\varphi = \sum_{j=1}^{p} c_j 1_{Q_j}$$

mit $p \in \mathbb{N}$, Quadern $Q_1, \ldots, Q_p \subset \mathbb{R}$ und $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{C}$ die zur Definition des Integrals verwendete Darstellung von φ, also

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi = \sum_{j=1}^{p} v(Q_j) c_j\,.$$

Seien a', $b' \in \mathbb{R}$ mit $a' \le a$ und $b \le b'$, so dass $(\forall j \in \{1, \ldots, p\})\ \overline{Q_j} \subset (a', b')$, und sei

$$\varphi_j = c_j 1_{Q_j} \,\big|\, [a', b']\colon\ [a', b'] \to \mathbb{C}\,, \quad \text{also} \quad \varphi \,|\, [a', b'] = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j\,.$$

Sei nun $j \in \{1, \ldots, p\}$. Ist $Q_j \subset \{a_j\}$ mit $a_j \in (a', b')$, so ist $\varphi_j \,|\, (a', a_j) = 0$ und $\varphi_j \,|\, (a_j, b') = 0$, also nach Satz 8.4

$$\int_{a'}^{b'} \varphi_j = 0 = v(Q_j) c_j\,.$$

Ist $(a_j, b_j) \subset Q_j \subset [a_j, b_j]$ mit $a' < a_j < b_j < b'$, so ist $\varphi_j \,|\, (a', a_j) = 0$, $\varphi_j \,|\, (a_j, b_j) = c_j$ und $\varphi_j \,|\, (b_j, c') = 0$, also nach Satz 8.4

$$\int_{a'}^{b'} \varphi_j = (b_j - a_j) c_j = v(Q_j) c_j\,.$$

Damit folgt

$$\int_{a'}^{b'} \varphi = \sum_{j=1}^{p} \int_{a'}^{b'} \varphi_j = \sum_{j=1}^{p} v(Q_j)c_j = \int_{\mathbb{R}} \varphi\,,$$

und wegen $\varphi\,|\,[a',a]=0$ und $\varphi\,|\,[b,b']=0$ ist

$$\int_{a'}^{b'} \varphi = \int_{a'}^{a} \varphi + \int_{a}^{b} \varphi + \int_{b}^{b'} \varphi = \int_{a}^{b} \varphi\,. \qquad \square$$

Satz 11.3.

1. *Die Definition des Integrals in* Definition 11.2 *ist unabhängig von dafür verwendeten Darstellung* $(*)$.
2. (Satz von Fubini für Treppenfunktionen) *Seien* $m,\,k \in \mathbb{N}$ *mit* $n = m+k$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, *und schreibe die Punkte* $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ *in der Form* $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})$ *mit* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ *und* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$. *Sei* $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *eine Treppenfunktion. Dann gilt:*
   Für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ *ist die Funktion* $\varphi(\boldsymbol{x},\cdot)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ *eine Treppenfunktion, die Funktion*
   $$\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}\,, \quad \textit{definiert durch} \quad \Phi(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(\boldsymbol{x},\cdot) = \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,,$$
   ist eine Treppenfunktion, und
   $$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = \int_{\mathbb{R}^m} \Phi\,, \quad \textit{also} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})\,d(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} \Big)\,d\boldsymbol{x}\,.$$
   Die analoge Aussage gilt unter Vertauschung von m *und* k, *insbesondere:*
   $$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})\,d(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}) \;=\; \int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x} \Big)\,d\boldsymbol{y}\,.$$

Beweis. Für $n=1$ ist die Definition des Integrals über eine Treppenfunktion unabhängig von deren Darstellung nach Satz 11.2. Wir nehmen nun an, es sei $n>1$, und für $n'<n$ sei die Definition des n'-dimensionalen Integrals über Treppenfunktionen unabhängig von deren Darstellung. Wir zeigen nun 2., indem wir für die Definition des n-dimensionales Integrals von φ eine beliebige Darstellung zugrunde legen. Da die dabei auftretenden m- und k-dimensionalen Integrale von dieser Darstellung unabhängig sind, gilt das auch für das n-dimensionale Integral von φ.

Sei

$$\varphi = \sum_{j=1}^{p} c_j 1_{Q_j} \quad \text{mit} \quad p \in \mathbb{N}\,, \quad \text{Quadern} \quad Q_1,\ldots,Q_p \quad \text{und} \quad c_1,\ldots,c_p \in \mathbb{C}\,.$$

Für $j \in \{1,\ldots,p\}$ sei $Q_j = Q_j' \times Q_j''$ mit Quadern $Q_j' \subset \mathbb{R}^m$ und $Q_j'' \subset \mathbb{R}^k$. Dann folgt $(\forall (\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n)$ $1_{Q_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1_{Q_j'}(\boldsymbol{x}) 1_{Q_j''}(\boldsymbol{y})$, also

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{p} c_j\, 1_{Q_j'}(\boldsymbol{x})\, 1_{Q_j''}(\boldsymbol{y})\,.$$

Daher ist für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ die Funktion $\varphi(\boldsymbol{x},\cdot)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ eine Treppenfunktion, es ist

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{p} c_j 1_{Q_j'}(\boldsymbol{x})\, v_k(Q_j'')\,, \quad \text{also} \quad \Phi = \sum_{j=1}^{p} c_j v_k(Q_j'')\, 1_{Q_j'}\,,$$

und die Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ hängt nach Induktionsvoraussetzung nicht von der Darstellung von φ ab. Φ ist eine Treppenfunktion, und

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Phi = \sum_{j=1}^{p} c_j v_k(Q_j'')\, v_m(Q_j') = \sum_{j=1}^{p} c_j v_n(Q_j) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,,$$

unabhängig von der Darstellung von φ. □

Satz 11.4.

1. *Ist* $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *eine Treppenfunktion, so sind auch* $\overline{\varphi}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *und* $|\varphi|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *Treppenfunktionen,*
$$\overline{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi} \quad \textit{und} \quad \Big|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big| \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|\,.$$
Insbesondere gilt:
$$\varphi(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R} \implies \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \in \mathbb{R} \qquad \textit{und} \qquad \varphi(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \implies \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \in \mathbb{R}_{\geq 0}\,.$$
2. *Sind* $\varphi,\, \psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *Treppenfunktionen und ist* $\lambda \in \mathbb{C}$, *so sind auch* $\lambda\varphi$, $\varphi + \psi$ *und* $\varphi\psi$ *Treppenfunktionen,*
$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda\varphi = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \quad \textit{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi + \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi + \int_{\mathbb{R}^n} \psi\,.$$
3. *Sind* $\varphi,\, \psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Treppenfunktionen, so ist auch* $\max(\varphi,\, \psi)$ *eine Treppenfunktion, und*
$$\varphi \leq \psi \implies \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} \psi\,.$$

Beweis. 1. Nach Satz 11.1 ist

$$\varphi = \sum_{j=1}^{p} c_j 1_{Q_j} \quad \text{mit} \quad p \in \mathbb{N}\,, \quad \text{disjunkten Quadern} \quad Q_1, \ldots, Q_p \quad \text{und} \quad c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{C}\,.$$

Dann folgt

$$\overline{\varphi} = \sum_{j=1}^{p} \overline{c_j}\, 1_{Q_j}\,, \quad \text{also} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi} = \sum_{j=1}^{p} \overline{c_j}\, v(Q_j) = \overline{\sum_{j=1}^{p} c_j\, v(Q_j)} = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi}\,,$$

und

$$|\varphi| = \sum_{j=1}^{p} |c_j| 1_{Q_j} \quad \text{und daher} \quad \Big|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big| \;=\Big|\sum_{j=1}^{p} c_j\, v(Q_j)\Big| \;\leq\; \sum_{j=1}^{p} |c_j|\, v(Q_j) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|\,.$$

2. Die Aussagen betreffend $\lambda\varphi$ und $\varphi + \psi$ sind offensichtlich. Um $\varphi\psi$ als Treppenfunktion zu erkennen, beachte man $1_P 1_Q = 1_{P\cap Q}$ für alle Quader $P,\, Q \subset \mathbb{R}^n$.

3. Nach 1. und 2. ist $\max(\varphi,\, \psi) = \frac{1}{2}\big(\varphi + \psi + |\varphi - \psi|\big)$ eine Treppenfunktion. Aus $\varphi \leq \psi$ folgt $\psi - \varphi = |\psi - \varphi|$ und daher

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} (\psi - \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} |\psi - \varphi| \geq \Big|\int_{\mathbb{R}^n} (\psi - \varphi)\Big| \geq 0\,.$$ □

11.2. Integrierbare Funktionen

Wir setzen $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und vereinbaren für das Symbol ∞ die folgenden Konventionen: Für $c \in \overline{\mathbb{C}}$ definieren wir $c + \infty = c - \infty = \infty$,

$$c \cdot \infty = \begin{cases} \infty\,, & \text{falls} \quad c \neq 0\,, \\ 0 & \text{falls} \quad c = 0\,, \end{cases} \quad \text{insbesondere} \quad (-1)\infty = \infty \quad \text{und} \quad |\infty| = \Re\infty = \Im\infty = \infty\,.$$

Für eine Teilmenge $A \subset [0, \infty]$ definieren wir

$$\inf(A) = \begin{cases} \infty\,, & \text{falls} \quad A = \{\infty\}\,, \\ \inf(A \setminus \{\infty\}) & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$.
Für eine Folge von Funktionen $(f_k \colon D \to [0, \infty])_{k \geq 0}$ sei

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \colon D \to [0, \infty]$$

wertweise definiert (unabhängig von der Reihenfolge der Summanden nach Satz 5.6).
Für Funktionen $f,\, g \colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ seien die Funktionen $f \pm g \colon D \to \overline{\mathbb{C}}$, $\lambda f \colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ und $|f| \colon D \to [0, \infty]$ wertweise definiert.
Für Funktionen $f,\, g \colon D \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definieren wir $f \leq g$, wenn $(\forall \boldsymbol{x} \in D)$ $f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$, und $\max(f, g) \colon D \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wertweise (dabei setzen wir $b \leq \infty$ und $\max(b, \infty) = \infty$ für alle $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$). Damit folgt

$$\max(f, g) = \frac{f + g}{2} + \frac{|f - g|}{2}\,.$$

Für eine Funktion $f \colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ sei

$$f_1 = \max\{\Re f, 0\} \colon D \to [0, \infty]\,, \quad f_2 = \max\{-\Re f, 0\} \colon D \to [0, \infty]\,,$$
$$f_3 = \max\{\Im f, 0\} \colon D \to [0, \infty] \quad \text{und} \quad f_4 = \max\{-\Im f, 0\} \colon D \to [0, \infty]\,.$$

Dann nennt man die Darstellung $f = (f_1 - f_2) + \mathrm{i}(f_3 - f_4)$ die *kanonoische Zerlegung* von f. Genau dann ist $f(D) \subset \mathbb{C}$, wenn $f_\nu(D) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ für alle $\nu \in \{1, \ldots, 4\}$, und in diesem Falle ist f genau dann stetig, wenn die Funktionen f_ν für alle $\nu \in \{1, \ldots, 4\}$ stetig sein.

Definition 11.3.

1. Für eine Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ sei $\mathcal{H}_f \subset [0, \infty]$ die Menge aller Summen

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k)\,,$$

gebildet mit Folgen $(c_k)_{k \geq 0}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und Folgen offener Quader $(Q_k)_{k \geq 0}$ in $\mathbb{R}^n$, so dass

$$|f| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k}\,.$$

Die Elemente von $\mathcal{H}_f$ heißen *Hüllreihen* von f. Es ist $\mathcal{H}_f \neq \emptyset$ (man setze $c_k = k$ und $Q_k = (-k, k)^n$). Man nennt

$$\|f\|_1 = \inf(\mathcal{H}_f) \in [0, \infty] \quad \text{die} \quad L^1\text{-}\mathit{Halbnorm} \quad \text{von } f.$$

2. Für eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ nennt man $v(D) = v_n(D) = \|1_D\|_1 \in [0,\infty]$ das (n-dimensionale) *Volumen*, den (n-dimensionalen) *Inhalt* oder das (n-dimenionale) äußere (Lebesgue'sche) *Maß* von D (für einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist diese Definition mit Definition 11.1 konsistent, siehe Satz 11.6).

   Ist $v(D) = 0$, so nennnt man D eine *Nullmenge.*

Satz 11.5 (Eigenschaften der L^1-Halbnorm)**.** *Seien* $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. *Sei* $\overline{\mathcal{H}}_f \subset [0,\infty]$ *die Menge aller Summen*
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k\,,$$
gebildet mit Folgen $(c_k)_{k\geq 0}$ *in* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *und Folgen beliebiger Quader* $(Q_k)_{k\geq 0}$*, so dass*
$$|f| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k}\,. \quad \textit{Dann ist} \ \ \|f\|_1 = \inf(\overline{\mathcal{H}}_f).$$
2. $\|f\|_1 = \big\||f|\big\|_1$, $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\,\|f\|_1$, *und* $|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\|_1 \leq \|g\|_1$.
3. *Für jede Folge* $(f_k\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty])_{k\geq 0}$ *gilt*
$$\Big\|\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big\|_1 \ \leq \ \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1\,.$$
4. $\|f \pm g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1\,,$ *und* $\|g\|_1 < \infty \ \Rightarrow \ \big|\|f\|_1 - \|g\|_1\big| \leq \|f \pm g\|_1\,.$

Beweis. 1. Wegen $\mathcal{H}_f \subset \overline{\mathcal{H}}_f$ ist $\inf(\overline{\mathcal{H}}_f) \leq \|f\|_1$. Sei nun $B \in \mathbb{R}$ und $B > \inf(\overline{\mathcal{H}}_f)$. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, eine Folge $(c_k)_{k\geq 0}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und eine Folge von Quadern $(Q_k)_{k\geq 0}$, so dass
$$|f| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k) < B - \varepsilon\,.$$
Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\varepsilon_k \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $c_k\varepsilon_k \leq 2^{-(k+1)}\varepsilon$, und es sei $Q_k' \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Quader mit $Q_k \subset Q_k'$ und $v(Q_k') < v(Q_k) + \varepsilon_k$. Dann ist
$$|f| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k'} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k') \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k) + \varepsilon < B\,,$$
also auch $\|f\|_1 < B$.

2. Wegen $\mathcal{H}_f = \mathcal{H}_{|f|}$ folgt $\|f\|_1 = \big\||f|\big\|_1$. Die Gleichung $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\,\|f\|_1$ ist für $\lambda = 0$ trivial. Ist $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, so gilt für jede Folge $(c_k)_{k\geq 0}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und jede Folge offener Quader $(Q_k)_{k\geq 0}$
$$\Big[\,|f| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k 1_{Q_k} \iff |\lambda f| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda c_k 1_{Q_k}\Big] \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda| c_k v(Q_k) = |\lambda| \sum_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k)\,.$$
Daher folgt $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\,\|f\|_1$. Ist $|f| \leq |g|$, so ist $\mathcal{H}_g \subset \mathcal{H}_f$ und daher $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$.

3. Wir zeigen:
$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}) \quad \Big\|\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 + \varepsilon\,. \quad \text{Sei dazu} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 < \infty\,.$$

Für $j \geq 0$ sei $(Q_{j,k})_{k\geq 0}$ eine Folge offener Quader und $(c_{j,k})_{k\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$f_j = |f_j| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k}\, 1_{Q_{j,k}} \quad \text{und} \quad \|f_j\|_1 \geq \sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k}\, v(Q_{j,k}) - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\,.$$

Dann folgt

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j \;=\; \Big|\sum_{j=0}^{\infty} f_j\Big| \;\leq\; \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k}\, 1_{Q_{j,k}}$$

und daher

$$\Big\|\sum_{j=0}^{\infty} f_j\Big\|_1 \;\leq\; \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k}\, v(Q_{j,k}) \;\leq\; \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\|f_j\|_1 + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\Big) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty}\|f_j\|_1 \;+\; \varepsilon\,.$$

4. Wegen $|f\pm g| \leq |f|+|g|$ folgt $\|f\pm g\|_1 = \big\||f\pm g|\big\|_1 \leq \big\||f|+|g|\big\|_1 \leq \|f\|_1+\|g\|_1$ nach 2. und 3.

Aus $|f| \leq |(f\pm g)\mp g| \leq |f\pm g|+|g|$ folgt $\|f\|_1 \leq \|f\pm g\|_1 + \|g\|_1$, und im Falle $\|g\|_1 < \infty$ folgt $\|f\|_1 - \|g\|_1 \leq \|f\pm g\|_1$. Ist nun auch $\|f\|_1 < \infty$, so folgt in gleicher Weise $\|g\|_1 - \|f\|_1 \leq \|g\pm f\|_1 = \|f\pm g\|_1$, also $\big|\|f\|_1 - \|g\|_1\big| \leq \|f\pm g\|_1$. Ist $\|f\|_1 = \infty$, so folgt die Behauptung wegen $\|f\|_1 - \|g\|_1 = \big|\|f\|_1 - \|g\|_1\big|$. □

Satz 11.6. *Für jede Treppenfunktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist*

$$\|\varphi\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|\,.$$

Insbesondere gilt für jeden Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$:

$v(Q) = \|1_Q\|_1$, und Q ist genau dann eine Nullmenge, wenn Q ausgeartet ist.

Beweis. Wegen $\big\||\varphi|\big\|_1 = \|\varphi\|_1$ können wir $\varphi = |\varphi| \geq 0$ annehmen. Wir zeigen die folgenden beiden Behauptungen.

A. Für jede Treppenfunktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist

$$\|\varphi\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,.$$

B. Für jeden abgeschlossenen Quader $A \subset \mathbb{R}^n$ ist $v(A) \leq \|1_A\|_1$.

Wir beweisen nun zunächst Satz 11.6 mit Hilfe von **A** und **B**. Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Treppenfunktion, A ein abgeschlossener Quader mit $\varphi\,|\,\mathbb{R}^n\setminus A = 0$ und $m = \|\varphi\|_A$. Dann ist $\varphi \leq m\,1_A$, also $\psi = m\,1_A - \varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Treppenfunktion und daher

$$\|\psi\|_1 \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n}\psi \;=\; m\,v(A) - \int_{\mathbb{R}^n}\varphi \;\leq\; \|m\,1_A\|_1 - \int_{\mathbb{R}^n}\varphi\,,$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi \;\leq\; \|m\,1_A\|_1 - \|\psi\|_1 \;\leq \|m\,1_A - \psi\|_1 \;=\; \|\varphi\|_1\,,$$

und gemeinsam mit **A** folgt die Behauptung.

Beweis von **A**. Nach Satz 11.1 gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, disjunkte Quader $Q_1, \dots, Q_m$ und $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} c_j \, 1_{Q_j} \,, \quad \text{also} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \;=\; \sum_{j=1}^{m} c_j \, v(Q_j) \geq \|\varphi\|_1 \quad \text{nach Satz 11.5.1}\,.$$

Beweis von **B**. Wir zeigen:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}) \quad (1-\varepsilon) v(A) \leq \|1_A\|_1 + \varepsilon \qquad (\text{dann folgt die Behauptung mit } \varepsilon \to 0\,).$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es eine Folge offener Quader $(Q_k)_{k \geq 0}$ und eine Folge $(c_k)_{k \geq 0}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$1_A \;\leq\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, 1_{Q_k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, v(Q_k) \;\leq\; \|1_A\|_1 + \varepsilon\,.$$

Zu jedem $\boldsymbol{z} \in A$ gibt es ein $N_{\boldsymbol{z}} \geq 0$, so dass

$$1 - \varepsilon \;\leq\; \sum_{k=0}^{N_{\boldsymbol{z}}} c_k \, 1_{Q_k}(\boldsymbol{z}) \;=\; \sum_{\substack{k=0 \\ \boldsymbol{z} \in Q_k}}^{N_{\boldsymbol{z}}} c_k\,, \quad \text{und es sei} \quad U_{\boldsymbol{z}} = \bigcap_{\substack{k=0 \\ \boldsymbol{z} \in Q_k}}^{N_{\boldsymbol{z}}} Q_k\,.$$

Dann ist $\{U_{\boldsymbol{z}} \mid \boldsymbol{z} \in A\}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge A. Daher gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_m \in A$, so dass $A \subset U_{\boldsymbol{z}_1} \cup \ldots \cup U_{\boldsymbol{z}_m}$, und es sei $N = \max(N_{\boldsymbol{z}_1}, \dots, N_{\boldsymbol{z}_m})$. Sei nun $\boldsymbol{x} \in A$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $\boldsymbol{x} \in U_{z_j}$. Dann ist

$$1 - \varepsilon \leq \sum_{\substack{k=0 \\ \boldsymbol{z}_j \in Q_k}}^{N_{\boldsymbol{z}_j}} c_k \;\leq\; \sum_{\substack{k=0 \\ \boldsymbol{x} \in Q_k}}^{N_{\boldsymbol{z}_j}} c_k \;\leq\; \sum_{k=0}^{N} c_k 1_{Q_k}(\boldsymbol{x})\,,$$

denn aus $\boldsymbol{x} \in U_{\boldsymbol{z}_j}$, $k \in \{0, \dots, N_{\boldsymbol{z}_j}\}$ und $\boldsymbol{z}_j \in Q_k$ folgt $\boldsymbol{x} \in Q_k$. Daher erhalten wir

$$(1-\varepsilon)\, 1_A \;\leq\; \sum_{k=0}^{N} c_k \, 1_{Q_k}$$

und damit schließlich

$$(1-\varepsilon)\, v(A) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} (1-\varepsilon)\, 1_A \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{N} c_k \, 1_{Q_k} \;=\; \sum_{k=0}^{N} c_k \, v(Q_k) \;\leq\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, v(Q_k) \;\leq\; \|1_A\|_1 + \varepsilon\,. \qquad \square$$

Bemerkungen:

1. Sei $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $1_A \leq 1_B$ und daher $v(A) \leq v(B)$. Insbesondere ist jede Teilmenge einer Nullmenge wieder eine Nullmenge.
2. Sei $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine höchstens abzählbare Familie von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Dann ist

   $$1_{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} 1_{A_\lambda} \quad \text{und daher} \quad v\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big) \;\leq\; \sum_{\lambda \in \Lambda} v(A_\lambda)\,.$$

   Daher ist die Vereinigung höchstens abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge. Insbesondere ist jede höchstens abzählbare Menge ist eine Nullmenge.

Satz 11.7. *Sei* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *und* $(\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k\ge 0}$ *eine Folge von Treppenfunktionen mit* $(\|f-\varphi_k\|_1)_{k\ge 0} \to 0$*. Dann konvergiert die Folge*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k\Big)_{k\ge 0} \quad (\,in\ \ \mathbb{C}\,)\,,$$

und der Grenzwert hängt nur von f *ab.*

Beweis. Für den Beweis der Konvergenz genügt es, zu zeigen:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists k_0 \ge 0)\ (\forall k,\, l \ge ki_0) \quad \Big|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \ - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_l\Big| < \varepsilon\,.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann

$$(\exists k_0 \ge 0)\ (\forall k \ge k_0) \quad \|f-\varphi_k\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

und für $k,\, l \ge k_0$ ist nach Satz 11.6 und Satz 11.4

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \ - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_l\Big| \ \le \ \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_k - \varphi_l| \ = \|\varphi_k - \varphi_l\|_1 \le \|f-\varphi_k\|_1 + \|f-\varphi_l\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Es bleibt die Unabhängigkeit von der Folge $(\varphi_k)_{k\ge 0}$ zu beweisen. Seien $(\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k\ge 0}$ und $(\psi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k\ge 0}$ Folgen von Treppenfunktionen mit $(\|f-\varphi_k\|_1)_{k\ge 0} \to 0$ und $(\|f-\psi_k\|_1)_{k\ge 0} \to 0$. Dann ist

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \ - \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k\Big| \ \le \ \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_k - \psi_k| \ = \|\varphi_k - \psi_k\|_1 \le \|f-\psi_k\|_1 + \|f-\varphi_k\|_1$$

und daher

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k\,. \qquad \square$$

Definition 11.4.

1. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ heißt *integrierbar* (über $\mathbb{R}^n$ im Lebesgue'schen Sinne), wenn es eine Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k\ge 0}$ gibt, so dass
$$(\|f-\varphi_k\|_1)_{k\ge 0} \to 0$$
[äquivalent: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es eine Treppenfunktion φ mit $\|f-\varphi\|_1 < \varepsilon$].
Dann definiert man
$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \ \in \mathbb{C} \quad \text{(nach Satz 11.7 ist diese Definition sinnvoll)}\,.$$
Insbesondere ist jede Treppenfunktion ist integrierbar, und die Definition des Integrals ist mit Definition 11.2 konsistent.
2. Sei $\emptyset \ne D \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ und $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann definiert man
$$f_A\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}} \quad \text{durch} \quad f_A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x})\,, & \text{falls} \quad \boldsymbol{x} \in D \cap A\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Man sagt, f *ist über* A *integrierbar*, wenn f_A über $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist, und dann definiert man
$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}^n} f_A\,. \qquad \text{Ist insbesondere } D \cap A = \emptyset, \text{ so ist } f_A = 0 \text{ und } \int_A f = 0\,.$$

3. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt *integrierbar* oder *endlich messbar*, wenn 1_D integrierbar ist. Insbesondere ist jeder Quader integrierbar.

Satz 11.8. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Dann ist f über $[a,b]$ integrierbar, und*
$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f\,.$$

Beweis. Sei zuerst f eine Treppenfunktion im Sinne von Definition 8.1. Dann ist $f_{[a,b]}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Treppenfunktion mit $f_{[a,b]}\,|\,[a,b] = f$ und $f_{[a,b]}\,|\,\mathbb{R}\setminus[a,b] = 0$, also folgt mit Satz 11.2
$$\int_{[a,b]} f \;=\; \int_{\mathbb{R}} f_{[a,b]} \;=\; \int_a^b f\,.$$
Sei nun $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine beliebige Regelfunktion und $(\varphi_i\colon [a,b] \to \mathbb{C})_{i\geq 0}$ eine Folgen von Treppenfunktionen mit $(\varphi_i)_{i\geq 0} \rightrightarrows f$, also $\big(\|f-\varphi_i\|_{[a,b]}\big)_{i\geq 0} \to 0$. Dann folgt
$$|f_{[a,b]} - (\varphi_i)_{[a,b]}| = \big|(f-\varphi_i)_{[a,b]}\big| \leq \|f-\varphi_i\|_{[a,b]}\, 1_{[a,b]}\,,$$
$$\|f_{[a,b]}-(\varphi_i)_{[a,b]}\|_1 \leq \|f-\varphi_i\|_{[a,b]}\,\|1_A\|_1 = \|f-\varphi_i\|_{[a,b]}\,(b-a)\,, \quad \text{also} \quad \big(\|f_{[a,b]}-(\varphi_i)_{[a,b]}\|_1\big)_{i\geq 0} \to 0\,.$$
Daher ist $f_{[a,b]}$ integrierbar, also f über $[a,b]$ integrierbar und nach Satz 8.4 ist
$$\int_{[a,b]} f \;=\; \int_{\mathbb{R}} f_{[a,b]} \;=\; \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (\varphi_i)_{[a,b]} \;=\; \lim_{i\to\infty} \int_a^b \varphi_i \;=\; \int_a^b f\,. \qquad \square$$

Satz 11.9 (Eigenschaften integrierbarer Funktionen)**.**

1. *Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind auch λf, $f+g$, $|f|$, $\Re f$, $\Im f$ und $\overline{f}$ integrierbar, und falls g beschränkt ist, so ist auch fg integrierbar. Es ist*
$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda f = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f\,, \quad \int_{\mathbb{R}^n} (f+g) = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g\,,$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} \Re f = \Re \int_{\mathbb{R}^n} f\,, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Im f = \Im \int_{\mathbb{R}^n} f\,, \quad \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f} \quad \text{und} \quad \Big|\int_{\mathbb{R}^n} f\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| = \|f\|_1\,.$$
Insbesondere gilt:
$$f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}\cup\{\infty\} \implies \int_{\mathbb{R}^n} f \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}\cup\{\infty\} \implies \int_{\mathbb{R}^n} f \in \mathbb{R}_{\geq 0}\,.$$
Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar, so ist
$$v(D) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_D\,.$$
2. *Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ integrierbar. Dann ist auch $\max(f,g)$ integrierbar, und*
$$f \leq g \implies \int_{\mathbb{R}^n} f \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} g\,.$$
3. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$, und sei $f = (f_1 - f_2) + \mathrm{i}(f_3 - f_4)$ mit $f_1, f_2, f_3, f_4\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ die kanonische Zerlegung von f. Dann gilt:*
   f ist genau dann integrierbar, wenn die Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 integrierbar sind.

4. (Kleiner Satz von Levi) *Sei* $(\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0})_{k\geq 0}$ *eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen,* $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ *und* $(\varphi_k)_{k\geq 0} \to f$.
Dann folgt $(\|\varphi_k\|_1)_{k\geq 0} \to \|f\|_1$, f *ist genau dann integrierbar, wenn* $\|f\|_1 < \infty$, *und dann ist*
$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k\,.$$

Beweis. Seien $(\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k\geq 0}$ und $(\psi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k\geq 0}$ Folgen von Treppenfunktionen mit $(\|f-\varphi_k\|_1)_{k\geq 0} \to 0$ und $(\|g-\psi_k\|_1)_{k\geq 0} \to 0$. Dann ist
$$\int_{\mathbb{R}^n} f \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} g \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k\,.$$

1. $(\lambda\varphi_k)_{k\geq 0}$ ist eine Folge von Treppenfunktionen, und wegen $\|\lambda f - \lambda\varphi_k\|_1 = |\lambda|\,\|f-\varphi_k\|_1$ folgt $(\|\lambda f - \lambda\varphi_k\|_1)_{k\geq 0} \to 0$. Daher ist ist λf integrierbar, und
$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda f \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \lambda\varphi_k \;=\; \lambda\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k \;=\; \lambda\int_{\mathbb{R}^n} f\,.$$
$(\overline{\varphi}_k)_{k\geq 0}$ ist eine Folge von Treppenfunktionen, und wegen $\|\overline{f}-\overline{\varphi}_k\|_1 = \|\overline{f-\varphi_k}\|_1 = \|f-\varphi_k\|_1$ folgt $(\|\overline{f}-\overline{\varphi}_k\|_1)_{k\geq 0} \to 0$. Daher ist ist $\overline{f}$ integrierbar, und
$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f} \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\varphi}_k \;=\; \lim_{k\to\infty}\overline{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k} \;=\; \overline{\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k} \;=\; \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f}\,.$$
$(\varphi_k+\psi_k)_{k\geq 0}$ ist eine Folge von Treppenfunktionen, und wegen
$$\|(f+g)-(\varphi_k+\psi_k)\|_1 \leq \|f-\varphi_k\|_1 + \|g-\psi_k\|_1 \quad \text{folgt} \quad (\|(f+g)-(\varphi_k+\psi_k)\|_1)_{k\geq 0} \;\to\; 0\,.$$
Daher ist $f+g$ integrierbar, und
$$\int_{\mathbb{R}^n}(f+g) \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(\varphi_k+\psi_k) \;=\; \lim_{n\to\infty}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k + \int_{\mathbb{R}^n}\psi_k\Big) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g\,.$$
Wegen $\Re f = \frac{1}{2}(f+\overline{f})$ ist $\Re f$ integrierbar, und
$$\int_{\mathbb{R}^n}\Re f = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{2}(f+\overline{f}) = \frac{1}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f + \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f}\Big) = \Re\int_{\mathbb{R}^n} f\,.$$
Die Aussage über $\Im f$ beweist man genauso.
$(|\varphi_k|)_{k\geq 0}$ ist eine Folge von Treppenfunktionen, und wegen $\big||f|-|\varphi_k|\big| \leq |f-\varphi_k|$ folgt $\big\||f|-|\varphi_k|\big\|_1 \leq \|f-\varphi_k\|_1$, also $(\|f-\varphi_k\|_1)_{k\geq 0} \to 0$. Daher ist $|f|$ integrierbar und
$$\int_{\mathbb{R}^n}|f| = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_k| \;=\; \lim_{n\to\infty}\|\varphi_k\|_1\,.$$
Nun ist aber
$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} f\Big| = \lim_{k\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k\Big| \quad \text{und} \quad (\forall k\geq 0)\quad \Big|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_k|\,, \quad \text{also} \quad \Big|\int_{\mathbb{R}^n} f\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n}|f|\,.$$
Ohne Einschränkung sei $(\forall k\geq 0)$ $\|f-\varphi_k\|_1 < \infty$. Dann ist
$$\|f\|_1 - \|f-\varphi_k\|_1 \;\leq\; \|\varphi_k\|_1 \;\leq\; \|f\|_1 + \|\varphi_k - f\|_1 = \|f\|_1 + \|f-\varphi_k\|_1\,,$$
und aus $(\|f-\varphi_k\|_1)_{k\geq 0} \to 0$ folgt $(\|\varphi_k\|_1)_{k\geq 0} \to \|f\|_1$.
Sei nun g beschränkt. Wir zeigen: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es eine Treppenfunktion $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit $\|fg-\psi\|_1 < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, und seien $\varphi, \gamma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Treppenfunktionen mit

$$2\|g\|_{\mathbb{R}^n} \|f-\varphi\|_1 < \varepsilon \quad \text{und} \quad 2\|\varphi\|_{\mathbb{R}^n} \|g-\gamma\|_1 < \varepsilon\,.$$

Dann ist auch $\varphi\gamma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Treppenfunktion, und

$$\begin{aligned}\|fg-\varphi\gamma\|_1 &= \|(f-\varphi)g+\varphi(g-\gamma)\|_1 \le \|(f-\varphi)g\|_1 + \|\varphi(g-\gamma)\|_1 \\ &\le \big\|\|g\|_{\mathbb{R}^n}(f-\varphi)\big\|_1 + \big\|\|\varphi\|_{\mathbb{R}^n}(g-\gamma)\big\|_1 \le \|g\|_{\mathbb{R}^n}\|f-\varphi\|_1 + \|\varphi\|_{\mathbb{R}^n}\|g-\gamma\big\|_1 < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

2. Nach 1. ist $\max(f,g) = \frac{1}{2}\big(f+g+|f-g|\big)$ integrierbar, und aus $f \le g$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \;-\; \int_{\mathbb{R}^n} f \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} (g-f) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |g-f| \;\ge\; \Big|\int_{\mathbb{R}^n} (g-f)\Big| \;\ge\; 0\,.$$

3. Wegen $f_1 = \max\{\Re f, 0\}$, $f_2 = \max\{-\Re f, 0\}$, $f_3 = \max\{\Im f, 0\}$ und $f_4 = \max\{-\Im f, 0\}$ folgt die Behauptung aus 1. und 2.

4. Sei ohne Einschränkung $\varphi_0 = 0$. Die Folge $(\|\varphi_k\|_1)_{k\ge 0}$ ist monoton wachsend, und es sei $(\|\varphi_k\|_1)_{k\ge0} \to c \in [0,\infty]$. Für alle $k \ge 0$ ist $\varphi_k \le f$, also auch $\|\varphi_k\|_1 \le \|f\|_1$ und daher $c \le \|f\|_1$. Für $j \ge 0$ ist

$$f - \varphi_j \;=\; \lim_{k\to\infty}(\varphi_k - \varphi_j) \;=\; \lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=j}^{k-1}(\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu) \;=\; \sum_{\nu=j}^{\infty}(\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu)$$

und daher

$$\begin{aligned}\|f-\varphi_j\|_1 \;&\le\; \sum_{\nu=j}^{\infty}\|\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu\|_1 \;=\; \sum_{\nu=j}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu) \;=\; \lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=j}^{k-1}\int_{\mathbb{R}^n}(\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu) \\ &=\; \lim_{k\to\infty}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k - \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_j\Big) \;=\; c - \|\varphi_j\|_1\,.\end{aligned}$$

Für $j = 0$ folgt daraus $\|f\|_1 \le c$, also $\|f\|_1 = c$.

Ist $c = \infty$, so ist f nicht integrierbar. Ist $c < \infty$, so folgt $(c - \|\varphi_k\|_1)_{k\ge0} \to 0$ und $(\|f - \varphi_k\|_1)_{k\ge0} \to 0$. Daher ist f integrierbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \;=\; \|f\|_1 = \lim_{k\to\infty}\|\varphi_k\|_1 \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k\,. \qquad \square$$

Definition 11.5. Sei $\emptyset \ne D \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to [0,\infty]$ und $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann definiert man

$$\int_A f = \|f_A\|_1 \in [0,\infty]\,.$$

Auf Grund von Satz 11.9.1 stimmen diese Definitionen für integrierbare Funktionen mit den bisherigen überein.

11.3. Nullmengen

Satz 11.10. *Sei* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$.

1. *Ist* $\|f\|_1 < \infty$, *so ist* $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = \infty\}$ *eine Nullmenge.*

2. *Ist* $\|f\|_1 = 0$*, so ist* f *integrierbar, und*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = 0\,.$$

Insbesondere ist jede Nullmenge integrierbar.

3. $\|f\|_1 = 0 \iff \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ *ist eine Nullmenge.*

Beweis. 1. Sei $N = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = \infty\}$. Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ ist dann $1_N \le \alpha|f|$ und daher $v(N) = \|1_N\|_1 \le \alpha\|f\|_1$, also $v(N) = 0$.

2. Ist $\|f\|_1 = 0$, so ist $(0)_{\nu\ge 0}$ eine (konstante) Folge von Treppenfunktionen mit $\|f-0\|_1 = 0$. Nach Definition ist dann f integrierbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} 0 = 0\,.$$

3. Sei $N = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$N_k = \Big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; |f(x)| \ge \frac{1}{k}\Big\}\,, \quad \text{also} \quad N = \bigcup_{k\ge 1} N_k\,.$$

Dann ist

$$\frac{1}{k}\,1_{N_k} \le |f| \quad \text{und daher} \quad \frac{1}{k}\,\|1_{N_k}\| \le \|f\|_1\,.$$

Ist $\|f\|_1 = 0$, so sind alle N_k Nullmengen, und daher ist auch N eine Nullmenge.

Sei nun N eine Nullmenge. Aus

$$|f| \le \sum_{\nu=0}^{\infty} 1_N \qquad \text{folgt dann} \qquad \|f\|_1 \;\le\; \sum_{\nu=0}^{\infty} \|1_N\|_1 \;=\; 0\,. \qquad \square$$

Satz 11.11. 1. *Seien* $f,\, g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$, f *integrierbar und* $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})\}$ *eine Nullmenge. Dann ist auch* g *integrierbar,* $\|f\|_1 = \|g\|_1$*, und*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} g\,.$$

2. *Sei* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *und* $N \subset \mathbb{R}^n$ *eine Nullmenge. Dann ist* f *über* N *integrierbar, und*

$$\int_N f = 0\,.$$

3. *Seien* $A,\, B \subset \mathbb{R}^n$*, sei* $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ *eine Nullmenge, und sei* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *integrierbar über* A*. Dann ist* f *auch integrierbar über* B*, und*

$$\int_A f = \int_B f\,.$$

4. *Seien* $A,\, B \subset \mathbb{R}^n$*, sei* $A \cap B$ *eine Nullmenge und sei* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *über* A *und über* B *integrierbar. Dann ist* f *auch über* $A \cup B$ *integrierbar, und*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f\,.$$

5. *Seien* $A,\, B \subset \mathbb{R}^n$ *integrierbar. Dann sind auch* $A \cup B$, $A \cap B$ *und* $A \setminus B$ *integrierbar,*
$$v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B) \quad \textit{und} \quad v(A \setminus B) = v(A) - v(A \cap B)\,.$$
6. *Sei* $k \in \mathbb{N}$, *und seien* $A_1, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ *integrierbar. Dann ist auch* $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ *integrierbar. Ist außerdem* $A_i \cap A_j$ *eine Nullmenge für alle* $i,\, j \in \{1, \ldots, k\}$ *mit* $i \neq j$, *so folgt*
$$v\Big(\bigcup_{i=1}^k A_i\Big) \;=\; \sum_{i=1}^k v(A_i)\,.$$

Beweis. 1. Es ist $\|g - f\|_1 = 0$ und $\big|\|g\|_1 - \|f|_1\big| \le \|g - f\|_1 = 0$. Daher ist $g - f$ integrierbar, also ist auch $g = (g - f) + f$ integrierbar, und
$$\int_{\mathbb{R}^n} g = \int_{\mathbb{R}^n} (g - f) + \int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f\,.$$
2. Es ist $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_N(\boldsymbol{x}) \neq 0\} \subset N$, also eine Nullmenge und daher
$$\int_N f = \int_{\mathbb{R}^n} f_N = \int_{\mathbb{R}^n} 0 = 0\,.$$
3. Es ist $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_A(\boldsymbol{x}) \neq f_B(\boldsymbol{x})\} \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, also eine Nullmenge und daher
$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}^n} f_A = \int_{\mathbb{R}^n} f_B = \int_B f\,.$$
4. Es ist $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_{A \cap B}$, und die Behauptung folgt aus 2.

5. Es ist $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$, $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$ und $1_{A \setminus B} = 1_A - 1_{A \cap B}$. Daher folgen die Behauptungen aus Satz 11.9.

6. Induktion nach k mit Hilfe von 5. □

Definition 11.6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a = \inf(I)$ und $b = \sup(I)$, und sei entweder $f\colon I \to [0, \infty]$ oder $f\colon I \to \overline{\mathbb{C}}$ über I integrierbar. Dann schreibt man
$$\int_I f = \int_a^b f$$
(für ein kompaktes Intervall A und eine Regelfunktion $f\colon A \to \mathbb{C}$ wird diese Schreibweise durch den folgenden Satz 11.8 gerechtfertigt, für ein beliebiges Intervall I ist $I \setminus (a, b)$ eine Nullmenge und daher das Integral nach obiger Bemerkung 4 nur von den Grenzen abhängig).

Definition 11.7. Eine Menge $W \subset \mathbb{R}^n$ heißt *dyadischer Würfel*, wenn
$$(\exists m \in \mathbb{N}_0)\ (\exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}) \quad W = W(c_1, \ldots, c_n, m) = \prod_{\nu=1}^n \Big[\frac{c_\nu}{2^m}, \frac{c_\nu + 1}{2^m}\Big]\,.$$
$\mathcal{W}$ bezeichne die Menge aller dyadischen Würfel im $\mathbb{R}^n$.

Satz 11.12 (Würfellemma)**.**
1. $\mathcal{W}$ *ist abzählbar, und*
$$(\forall\, W,\, W' \in \mathcal{W}) \quad \big[W \subset W'\big] \ \vee\ \big[W' \subset W\big] \ \vee\ \big[W \cap W' \textit{ ist ausgeartet}\big]\,.$$

2. $(\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n)\ (\forall U \in \mathcal{U}(\boldsymbol{a}))\ (\exists W \in \mathcal{W})\ \ \boldsymbol{a} \in W \subset U$.
3. *Ist* $\emptyset \ne U \subset \mathbb{R}^n$ *offen, so gibt es eine Folge* $(W_i)_{i\ge 0}$ *in* $\mathcal{W}$*, so dass*

$$U = \bigcup_{i\ge 0} W_i \quad \textit{und} \quad (\forall j > i \ge 0) \quad W_j \cap W_i \quad \textit{ist ausgeartet}.$$

Beweis. 1. Die Zuordnung $(c_1, \ldots, c_n, m) \mapsto W(c_1, \ldots, c_n, m)$ definiert eine surjektive Abbildung $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{N} \to \mathcal{W}$. Daher ist $\mathcal{W}$ abzählbar.

Seien nun $W = W(c_1, \ldots, c_n, m)$ und $W' = W(c'_1, \ldots, c'_n, m')$ mit $c_1, \ldots, c_n,\ c'_1, \ldots, c'_n \in \mathbb{Z}$, $m,\ m' \in \mathbb{N}$ und $m' \ge m$. Dann folgt

$$W \cap W' = \prod_{\nu=1}^{n} \Big(\Big[\frac{2^{m'-m} c_\nu}{2^{m'}},\ \frac{2^{m'-m} c_\nu + 2^{m'-m}}{2^{m'}} \Big] \cap \Big[\frac{c'_\nu}{2^{m'}},\ \frac{c'_\nu + 1}{2^{m'}} \Big] \Big).$$

und daher ist entweder $W' \subset W$ oder $W \cap W'$ ist ausgeartet.

2. Sei $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, und seien $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\prod_{\nu=1}^{n} (a_\nu - \varepsilon, a_\nu + \varepsilon) \subset U\,,$$

$m \in \mathbb{N}_0$ mit $2^{-m} < \varepsilon$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$, so dass $(\forall \nu \in \{1, \ldots, n\})\ 2^{-m} c_\nu \le a_\nu \le 2^{-m}(c_\nu + 1)$. Dann folgt $\boldsymbol{a} \in W(c_1, \ldots, c_n, m) \subset U$.

3. Sei $(W_i)_{i\ge 0}$ eine Folge verschiedener Würfel in $\mathcal{W}$ mit

$$\{W_i \mid i \ge 0\} = \{W \in \mathcal{W} \mid W \subset U\} \setminus \{W \in \mathcal{W} \mid \ (\exists W' \in \mathcal{W})\ W \subsetneq W' \subset U\}\,.$$

Nach 1. und 2. hat diese Folge die gewünschte Eigenschaft. □

Satz 11.13 (Überdeckungssatz von Lindelöf)**.** *Sei* $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *eine Familie offener Teilmengen des* $\mathbb{R}^n$*. Dann gibt es eine höchstens abzählbare Teilmenge* $\Gamma \subset \Lambda$*, so dass*

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Gamma} U_\lambda\,.$$

Beweis. Sei $\mathcal{W}^* = \{W \in \mathcal{W} \mid (\exists \lambda \in \Lambda)\ \ W \subset U_\lambda\} = \{W_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}_0\}$. Für $\nu \in \mathbb{N}_0$ sei $\lambda_\nu \in \Lambda$ mit $W_\nu \subset U_{\lambda_\nu}$. Nach Satz 11.12 ist dann

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\nu\ge 0} W_\nu \subset \bigcup_{\nu\ge 0} U_{\lambda_\nu} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\,,$$

und mit $\Gamma = \{\lambda_\nu \mid \nu \ge 0\}$ folgt die Behauptung. □

Satz 11.14.

1. *Sei* $\emptyset \ne U \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Dann gibt es eine Folge* $(W_\nu)_{\nu\ge 0}$ *in* $\mathcal{W}$*, so dass*

$$(\forall \mu > \nu \ge 0)\ \big[W_\mu \cap W_\nu \quad \textit{ist ausgeartet}\big]\,, \quad U = \bigcup_{\nu\ge 0} W_\nu\,, \quad v(U) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v(W_\nu)\,,$$

und U *ist genau dann integrierbar, wenn* $v(U) < \infty$*.*

2. *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$*,* $v(D) < \infty$ *und* $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$*.*
   (a) *Es gibt eine offene Menge* $U \subset \mathbb{R}^n$ *mit* $D \subset U$ *und* $v(U) < v(D) + \varepsilon$*.*

(b) *Es gibt eine Folge* $(Q_\nu)_{\nu\ge 0}$ *offener Quader mit*

$$D \subset \bigcup_{\nu\ge 0} Q_\nu \quad \textit{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} v(Q_\nu) < v(D) + \varepsilon\,.$$

Beweis. 1. Nach Satz 11.12 gibt es eine Folge $(W_\nu)_{\nu\ge 0}$ in $\mathcal{W}$, so dass

$$(\forall \mu > \nu \ge 0)\ \big[W_\mu \cap W_\nu \quad \text{ist ausgeartet}\,\big] \quad \text{und} \quad U = \bigcup_{\nu\ge 0} W_\nu\,.$$

Für $\nu \in \mathbb{N}_0$ sei $F_\nu = W_1 \cup \ldots \cup W_\nu$. Nach Satz 11.1 ist F_ν die Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten Quadern und daher 1_{F_ν} eine Treppenfunktion. Nach Satz 11.11 ist F_ν messbar, und $v(F_\nu) = v(W_1) + \ldots + v(W_\nu)$. $(1_{F_\nu})_{\nu\ge 0}$ ist eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit $(1_{F_\nu})_{\nu\ge 0} \to 1_U$. Nach Satz 11.9.4 folgt $(\|1_{F_\nu}\|_1)_{\nu\ge 0} \to \|1_U\|_1$, also

$$v(U) = \lim_{\nu\to\infty} v(F_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v(W_\nu)\,,$$

und 1_U ist genau dann integrierbar, wenn $\|1_U\|_1 < \infty$.

2. (a) Nach Definition von $\|1_D\|_1$ gibt es eine Folge $(c_\nu)_{\nu\ge 0}$ in $\mathbb{R}_{\ge 0}$ und eine Folge offener Quader $(Q_\nu)_{\nu\ge 0}$, so dass

$$1_D \le \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu 1_{Q_\nu} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu v(Q_\nu) < v(D) + \frac{\varepsilon}{2}\,. \quad \text{Sei} \quad 0 < \eta < \frac{\varepsilon}{2[v(D)+\varepsilon]}\,.$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\varphi_k = \sum_{\nu=0}^{k} c_\nu 1_{Q_\nu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0} \quad \text{und} \quad f = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu 1_{Q_\nu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0} \cup \{\infty\}\,.$$

Dann ist $(\varphi_k)_{k\ge 0}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, $(\varphi_k)_{k\ge 0} \to f$, und

$$(\forall k \in \mathbb{N}_0)\ \ \|\varphi_k\|_1 \le \sum_{\nu=0}^{k} c_\nu v(Q_\nu) < v(D) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Nach Satz 11.9.4 ist f integrierbar, und

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \le \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu v(Q_\nu) < v(D) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sei nun $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) > 1 - \eta\}$. Wir zeigen : U ist offen, und $U \supset D$.
Für $\boldsymbol{x} \in D$ ist $f(\boldsymbol{x}) \ge 1_D(\boldsymbol{x}) = 1 > 1 - \eta$, und daher ist $D \subset U$. Ist $\boldsymbol{z} \in U$, so gibt es eine endliche Menge $T \subset \mathbb{N}_0$ mit

$$\boldsymbol{z} \in Q = \bigcap_{\nu\in T} Q_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu\in T} c_\nu > 1 - \eta\,.$$

Dann folgt $(\forall \boldsymbol{x} \in Q)$ $f(\boldsymbol{x}) > 1 - \eta$, also $Q \subset D$. Da Q offen ist, folgt $U \in \mathcal{U}(\boldsymbol{z})$, und daher ist U offen.
Aus $(1-\eta)1_U \le f$ folgt

$$v(U) = \|1_U\| \le \frac{1}{1-\eta}\|f\|_1 < \frac{1}{1-\eta}\Big(v(D) + \frac{\varepsilon}{2}\Big) < v(D) + \varepsilon\,.$$

(b) Nach (a) gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und nach 1. gibt es eine Folge $(W_\nu)_{\nu\ge 0}$ abgeschlossener Quader, so dass

$$D \subset U = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}_0} W_\nu\,, \quad v(U) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v(W_\nu) < v(D) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Für $\nu \in \mathbb{N}_0$ sei $Q_\nu \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Quader mit $W_\nu \subset Q_\nu$ und $v(Q_\nu) < v(W_\nu) + 2^{-\nu-2}\varepsilon$. Dann ist

$$D \subset \bigcup_{\nu\ge 0} Q_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} v(Q_\nu) < \sum_{\nu=0}^{\infty}\big(v(W_\nu) + 2^{-\nu-2}\varepsilon\big) < v(D) + \varepsilon\,. \qquad \square$$

Satz 11.15. *Sei $k \in \{1,\ldots,n\}$.*

1. *Sei $\emptyset \ne D \subset \mathbb{R}^k$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, und für alle $\boldsymbol{a} \in D$ existiere ein $U \in \mathcal{U}(\boldsymbol{a})$, so dass $f\,|\,U\cap D$ einer Lipschitzbedingung genügt (diese Bedingung ist erfüllt, falls D offen und f eine C^1-Abbildung ist). Ist dann entweder $k < n$ oder $k = n$ und D eine Nullmenge, so ist auch $f(D)$ eine Nullmenge.*
2. *Ist $k < n$, so ist jede k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge.*

Beweis. 1. FALL 1: $k = n$, $v(D) = 0$, und f genügt einer Lipschitzbedingung.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $L \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D \;\; \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|_\infty \le L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_\infty$. Nach Satz 11.14 gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $D \subset U$ und $v(U) < L^{-n}\varepsilon$, und es gibt eine Folge $(W_\nu)_{\nu\ge 0}$ in $\mathcal{W}$ mit

$$U = \bigcup_{\nu\ge 0} W_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} v(W_\nu) = v(U) < L^{-n}\varepsilon\,.$$

Sei nun $W \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Würfel der Kantenlänge $r \in \mathbb{R}_{>0}$, und seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W\cap D$. Dann ist $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|_\infty \le L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty \le Lr$ und daher $f(W\cap D)$ in einem abgeschlossenen Würfel der Kantenlänge Lr enthalten, also $v\big(f(W\cap D)\big) \le (Lr)^n = L^n\, v(W)$. Damit folgt

$$v\big(f(D)\big) \le v\big(f(U\cap D)\big) \le \sum_{\nu=0}^{\infty} v\big(f(W_\nu\cap D)\big) \le L^n \sum_{\nu=0}^{\infty} v(W_\nu) = L^n\, v(U) < \varepsilon\,.$$

FALL 2: $k = n$, $v(D) = 0$, und für jedes $\boldsymbol{a} \in D$ existiere eine offene Umgebung $U_{\boldsymbol{a}} \in \mathcal{U}(\boldsymbol{a})$, so dass $f\,|\,D\cap U_{\boldsymbol{a}}$ einer Lipschitzbedingung genügt (und nach FALL 1 ist dann $f(D\cap U_{\boldsymbol{a}})$ eine Nullmenge.

Nach Satz 11.13 gibt es eine höchstens abzählbare Menge $A \subset D$, so dass

$$D = \bigcup_{\boldsymbol{a}\in D} U_{\boldsymbol{a}} \cap D = \bigcup_{\boldsymbol{a}\in A} U_{\boldsymbol{a}} \cap D\,, \quad \text{und daher ist} \quad f(D) = \bigcup_{\boldsymbol{a}\in A} f(U_{\boldsymbol{a}}\cap D) \quad \text{eine Nullmenge}\,.$$

FALL 3: $k < n$. Sei $\widetilde{D} = D\times\{\boldsymbol{0}\} \subset \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n$ und $\widetilde{f}\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\widetilde{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{x})$. Dann ist $\widetilde{f}(\widetilde{D}) = f(D)$, und mit f erfüllt auch $\widetilde{f}$ die lokale Lipschitzbedingung. Nun ist

$$\mathbb{R}^k\times\{\boldsymbol{0}\} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} [-N,N]^k\times\{\boldsymbol{0}\}$$

eine Vereinigung abzählbar vieler ausgearteter Quader, also eine Nullmenge. Daher ist auch $\widetilde{D}$ eine Nullmenge und die Behauptung folgt nach FALL 2.

Sei nun D offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Für $\boldsymbol{a} \in D$ sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset D$. Dann ist $\|df\|_{B_\varepsilon(\boldsymbol{a})} \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, und aus Satz 9.10 folgt

$$(\forall \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{a}))\ \ \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| \le \|df\|_{\overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{a})}\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|\,.$$

2. Nach 1. ist jedes k-dimensionale C^1-Flächenstück im $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit. Für jedes $\boldsymbol{a} \in M$ gibt es eine offene Menge $U_{\boldsymbol{a}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{a} \in U_{\boldsymbol{a}}$, so dass $U_{\boldsymbol{a}} \cap M$ ein k-dimensionales C^1-Flächenstück ist. Nach Satz 11.13 gibt es eine höchstens abzählbare Menge $A \subset M$, so dass

$$M = \bigcup_{\boldsymbol{a} \in M} U_{\boldsymbol{a}} \cap M = \bigcup_{\boldsymbol{a} \in A} U_{\boldsymbol{a}} \cap M\,,$$

und daher ist auch M eine Nullmenge. □

11.4. Integration stetiger Funktionen

Satz 11.16 (Approximationssatz für stetige Funktionen). *Sei $\emptyset \ne D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f\colon D \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ stetig. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0})_{i \ge 0}$ mit $(\varphi_i)_{i\ge 0} \to f_D$.*

Beweis. Sei $\{W_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{W \in \mathcal{W} \mid W \subset D\}$. Für $i \in \mathbb{N}$ sei $c_i = \min f(W_i)$ (existiert nach Satz 4.17), $y_i \in W_i$ mit $f(y_i) = c_i$ und

$$\varphi_i = \max\bigl\{c_\nu\, 1_{W_\nu} \bigm| \nu \in \{1, \ldots, i\}\bigr\}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}\,.$$

Dann ist $(\varphi_i)_{i\ge 0}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, $(\forall i \ge 0)\ \varphi_i \le f_D$, und wir behaupten $(\varphi_i)_{i \ge 0} \to f_D$. Wir müssen zeigen:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)\ (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists i_0 \ge 0)\ (\forall i \ge i_0)\quad f_D(\boldsymbol{x}) \le \varphi_i(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\,.$$

Sei $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Ist $\boldsymbol{x} \notin D$, so ist $f_D(\boldsymbol{x}) = 0$ und nichts zu zeigen. Sei also $\boldsymbol{x} \in D$. Dann ist $f_D(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, f ist stetig in $\boldsymbol{x}$ und D ist offen. Daher gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\delta(\boldsymbol{x}) \subset D$, so dass $(\forall \boldsymbol{y} \in B_\delta(\boldsymbol{x}))\ |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$. Nach Satz 11.12 gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $\boldsymbol{x} \in W_{i_0} \subset B_\delta(\boldsymbol{x})$. Dann folgt $|f(\boldsymbol{x}) - c_{i_0}| = |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}_{i_0})| < \varepsilon$, und für alle $i \ge i_0$ ist

$$f_D(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \le c_{i_0} + \varepsilon = c_{i_0}\, 1_{W_{i_0}}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \le \varphi_{i_0}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \le \varphi_i(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\,.$$ □

Satz 11.17 (Fortsetzungssatz von Tietze). *Sei X ein normierter Raum, $D \subset X$ abgeschlossen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann gibt es eine stetige Funktion $F\colon X \to \mathbb{R}$ mit $F \,|\, D = f$ und $\|F\|_X = \|f\|_D$.*

Vorbemerkungen zum Beweis des Fortsetzungssatzes von Tietze. Sei X ein normierter Raum.

A. Für $\emptyset \ne A \subset X$ sei $d_A\colon X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ definiert durch

$$d_A(x) = \inf\bigl\{\|x - a\| \bigm| a \in A\bigr\}\,.$$

$d_A(x)$ heißt *Abstand* des Punktes x zur Menge A.

Eigenschaften der Abstandsfunktion. *Seien $x, y \in X$.*

1. $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$.
2. $|d_A(x) - d_A(y)| \le \|x - y\|$. *Insbesondere ist $d_A\colon X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ stetig.*

Beweis der Eigenschaften der Abstandsfunktion.

1. $d_A(x) = 0 \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists a \in A)\ \|x - y\| < \varepsilon \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \iff x \in \overline{A}$.

2. Wir zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\quad |d_A(x) - d_A(y)| \le \|x - y\| + \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a \in A$ mit $\|x - a\| < d_A(x) + \varepsilon$. Dann folgt $d_A(y) \le \|y - a\| \le \|x - a\| + \|y - x\| < \|x - y\| + d_A(x) + \varepsilon$, also $d_A(y) - d_A(x) < \|x - y\| + \varepsilon$. In gleicher Weise zeigt man $d_A(x) - d_A(y) < \|x - y\| + \varepsilon$. $\square$

B. Approximationslemma. *Sei $D \subset X$ abgeschlossen und $g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\|g\|_D \le a$. Dann gibt es eine stetige Funktion $h\colon X \to \mathbb{R}$ mit*

$$\|h\|_X \le \frac{a}{3} \quad \textit{und} \quad \|g - h\|_D \le \frac{2a}{3}\,.$$

Beweis des Approximationslemmas. Sei

$$D^- = \Big\{x \in D \;\Big|\; g(x) \le -\frac{a}{3}\Big\} \quad \text{und} \quad D^+ = \Big\{x \in D \;\Big|\; g(x) \ge \frac{a}{3}\Big\}.$$

Da g stetig ist, sind D^+ und D^- abgeschlossen. Im Falle $D^- = \emptyset$ sei $h = \frac{a}{3}$ (konstant), und im Falle $D^+ = \emptyset$ sei $h = -\frac{a}{3}$ (konstant). Sei also $D^- \neq \emptyset$, $D^+ \neq \emptyset$, sei $\Phi\colon X \to [-1, 1]$ definiert durch

$$\Phi(x) = \frac{d_{D^-}(x) - d_{D^+}(x)}{d_{D^+}(x) + d_{D^+}(x)}\,, \quad \text{und sei} \quad h = \frac{a}{3}\,\Phi\colon X \to \mathbb{R}\,.$$

Dann ist $\Phi \,|\, D^- = -1$ und $\Phi \,|\, D^+ = 1$, nach **A** ist Φ stetig, und h leistet das Gewünschte. $\square$

Beweis von Satz 11.17. Wir konstruieren eine Folge stetiger Funktionen $(f_i\colon X \to \mathbb{R})_{i \ge 0}$ mit $f_0 = 0$, so dass für alle $k \ge 0$

$$\Big\|f - \sum_{i=0}^k f_i\Big\|_D \le \Big(\frac{2}{3}\Big)^k \|f\|_D \quad \text{und} \quad \|f_k\|_X \le \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{k-1} \|f\|_D\,.$$

Dann ist

$$\sum_{i \ge 0} f_i \quad \text{normal konvergent, und wir definieren} \quad F = \sum_{i=0}^\infty f_i\colon X \to \mathbb{R}\,.$$

F ist stetig, $\|f - F\|_D = 0$, also $F \,|\, D = f$, und

$$\|f\|_D \le \|F\|_X \le \sum_{i=0}^\infty \|f_i\|_X \le \frac{1}{3}\|f\|_D \sum_{i=1}^\infty \Big(\frac{2}{3}\Big)^{k-1} = \|f\|_D\,.$$

Rekursive Konstruktion: Sei $k \in \mathbb{N}_0$, und seien $f_0, \ldots, f_k$ bereits konstruiert. Das Approximationslemma mit

$$g = f - \sum_{i=0}^k f_i \quad \text{und} \quad a = \Big(\frac{2}{3}\Big)^k \|f\|_D$$

sichert die Existenz einer Funktion $f_{k+1}\colon X \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f_{k+1}\|_X \le \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^k \|f\|_D \quad \text{und} \quad \Big\|f - \sum_{i=0}^k f_i - f_{k+1}\Big\|_X \le \frac{2}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^k \|f\|_D\,. \qquad \square$$

Satz 11.18 (Integrierbarkeit stetiger Funktionen; kleiner Satz von Fubini)**.** *Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller integrierbaren Funktionen $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:*

Sind $m,\, k \in \mathbb{N}$ mit $n = m + k$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, und schreibt man die Punkte $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ in der Form $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ und $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$, so gilt:

- *Für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ ist die Funktion $g(\boldsymbol{x}, \cdot)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ integrierbar;*
- *die Funktion*
$$\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}\,, \quad \textit{definiert durch} \quad \Phi(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^k} g(\boldsymbol{x}, \cdot) = \int_{\mathbb{R}^k} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}\,,$$
ist integrierbar,
- *und*
$$\int_{\mathbb{R}^n} f_D = \int_{\mathbb{R}^m} \Phi\,, \quad \textit{also} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^k} f_D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \Big)\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Die analoge Aussage gilt unter Vertauschung von m und k, insbesondere:
$$\int_{\mathbb{R}^n} f_D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \;=\; \int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f_D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x} \Big)\, d\boldsymbol{y}\,.$$

Dann gilt:

Ist $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und entweder offen oder abgeschlossen, und ist $f\colon D \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, so folgt $f_D \in \mathcal{L}$.

Beweis. Offensichtlich ist $\mathcal{L} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum.

FALL 1: D ist offen und $f(D) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Sei Q ein abgeschlossener Quader mit $D \subset Q$ und $M = \|f\|_D$. Dann ist $f_D \leq M\, 1_Q$, und nach Satz 11.16 gibt es eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0})_{i \geq 0}$ mit $(\varphi_i)_{i\geq 0} \to f_D$. Für $i \geq 0$ ist $\varphi_i \leq f_D \leq M\, 1_Q$ und daher $\|\varphi_i\|_1 \leq \|M 1_Q\|_1 = M v(Q) < \infty$. Nach Satz 11.9.4 ist f_D integrierbar, und
$$\int_{\mathbb{R}^n} f_D \;=\; \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i\,.$$

Sei nun $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ und $Q = Q' \times Q''$ mit Quadern $Q' \subset \mathbb{R}^m$ und $Q'' \subset \mathbb{R}^k$. Nach Satz 11.3 gilt für alle $i \geq 0$:

Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ ist $\varphi_i(\boldsymbol{x}, \cdot)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Treppenfunktion, die Funktion $\Phi_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definiert durch
$$\Phi_i(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^k} \varphi_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}\,, \quad \text{ist eine Treppenfunktion, und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i = \int_{\mathbb{R}^m} \Phi_i\,.$$

Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ ist $(\varphi_i(\boldsymbol{x}, \cdot)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0})_{i\geq 0}$ monoton wachsend, $(\varphi_i(\boldsymbol{x}, \cdot))_{i\geq 0} \to f_D(\boldsymbol{x}, \cdot)$, und $\varphi_i(\boldsymbol{x}, \cdot) \leq M\, 1_Q(\boldsymbol{x}, \cdot) = M\, 1_{Q'}(\boldsymbol{x}) 1_{Q''} \leq M 1_{Q''}$, also $\|\varphi_i(\boldsymbol{x}, \cdot)\|_1 \leq \|M 1_{Q''}\|_1 = M v_k(Q'') < \infty$. Nach Satz 11.9.3 ist $f_D(\boldsymbol{x}, \cdot)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrierbar, und
$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^k} f_D(\boldsymbol{x}, \cdot) \;=\; \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} \varphi_i(\boldsymbol{x}, \cdot) \;=\; \lim_{i\to\infty} \Phi_i(\boldsymbol{x})\,.$$

Die Folge $(\Phi_i)_{i\geq 0}$ ist monoton wachsend, und
$$(\forall i \in \mathbb{N}_0) \quad \|\Phi_i\|_1 = \int_{\mathbb{R}^m} \Phi_i \;= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i \;= \|\varphi_i\|_1 \;\leq\; M\, v(Q)\,,$$

also folgt (wieder nach Satz 11.9.3)

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Phi = \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \Phi_i = \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i = \int_{\mathbb{R}^n} f_D\,, \quad \text{und daher ist } f_D \in \mathcal{L}.$$

FALL 2: D ist offen und $f\colon D \to \mathbb{C}$ ist stetig.

Sei $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$ die kanonische Zerlegung von f. Dann sind die Funktionen $f_\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ stetig, und es ist $f_D = (f_{1D} - f_{2D}) + i(f_{3D} - f_{4D})$. Für alle $\nu \in \{1,\ldots,4\}$ ist $f_{\nu D} \in \mathcal{L}$ (nach FALL 1). Daher ist auch $f_D \in \mathcal{L}$.

FALL 3: D ist abgeschlossen.

Nach Satz 11.17 gibt es stetige Funktionen $F_1,\, F_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so dass $F_1 \,|\, D = \Re f_D$ und $F_2 \,|\, D = \Im f_D$. Dann ist $F = F_1 + iF_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig und $F \,|\, D = f$. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Quader mit $D \subset Q$. Dann ist auch $Q \setminus D = Q \cap (\mathbb{R}^n \setminus D)$ offen, und $f_D = F_Q - F_{Q\setminus D}$. Es ist $F_Q = (F\,|\,Q)_Q$, $F_{Q\setminus D}\,|\,Q\setminus D)_{Q\setminus D}$, und die Funktionen $F\,|\,Q$ und $F\,|\,Q\setminus D$ sind stetig. Nach FALL 1 ist $F_Q \in \mathcal{L}$ und $F_{Q\setminus D} \in \mathcal{L}$, also auch $f_D \in \mathcal{L}$. □

Bemerkung:

Sei $\mathcal{L}$ wie in Satz 11.18, $n = m+k$ mit $m,\, k \in \mathbb{N}$ und $\emptyset \ne D \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit $f_D \in \mathcal{L}$. Für $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ seien die Niveaumengen von D definiert durch

$$D_{\boldsymbol{y}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in D\} \quad \text{und} \quad D_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k \mid (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in D\}\,.$$

Seien die Projektionen $\pi_1\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ und $\pi_2\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ definiert durch $\pi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$ und $\pi_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$. Dann ist $\pi_1(D) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid D_{\boldsymbol{x}} \ne \emptyset\}$, $\pi_2(D) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k \mid D_{\boldsymbol{y}} \ne \emptyset\}$, $f_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$, falls $\boldsymbol{y} \notin D_{\boldsymbol{x}}$, und

$$\int_{\mathbb{R}^k} f_D(\boldsymbol{x},\cdot) = 0\,, \quad \text{alls} \quad \boldsymbol{x} \notin \pi_1(D)\,.$$

Dann ist $D = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \mid \boldsymbol{x} \in \pi_1(D)\,,\ \boldsymbol{y} \in D_{\boldsymbol{x}}\}$, und daher kann die Aussage des kleinen Satzes von Fubini wie folgt formuliert werden:

Für $\boldsymbol{x} \in \pi_1(D)$ ist die Funktion $f(\boldsymbol{x},\cdot)$ über $D_{\boldsymbol{x}}$ integrierbar, die Funktion

$$\Phi\colon \pi_1(D) \to \mathbb{C}\,, \quad \textit{definiert durch} \quad \Phi(\boldsymbol{x}) = \int_{D_{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,,$$

ist über $\pi_1(D)$ integrierbar, und

$$\int_D f = \int_{\pi_1(D)} \Phi\,, \quad \textit{also} \quad \int_D f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int_{\pi_1(D)} \Big(\int_{D_{\boldsymbol{x}}} f_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\Big)\,d\boldsymbol{x}\,.$$

Die analoge Aussage gilt unter Vertauschung von m und k, insbesondere:

$$\int_D f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int_{\pi_2(D)} \Big(\int_{D_{\boldsymbol{y}}} f_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\Big)\,d\boldsymbol{y}\,.$$

Wichtiger Spezialfall:

$m = n-1$, $k = 1$, für alle $\boldsymbol{x} \in B = \pi_1(D) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ sei $D_{\boldsymbol{x}} = [a(\boldsymbol{x}), b(\boldsymbol{x})]$ mit $a(\boldsymbol{x}),\, b(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ und $a(\boldsymbol{x}) \le b(\boldsymbol{x})$. Für $\boldsymbol{x} \in D$ ist die Funktion $f(\boldsymbol{x},\cdot)\colon [a(\boldsymbol{x}), b(\boldsymbol{x})] \to \mathbb{C}$ stetig. Daher ist das Integral über $D_{\boldsymbol{x}}$ ein Cauchyintegral, und wir erhalten

$$\int_D f(\boldsymbol{x},y)\,d(\boldsymbol{x},y) = \int_B \Big(\int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x},y)\,dy\Big)\,d\boldsymbol{x}\,.$$

Beispiel 1: Integration über ein Rechteck.

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$ und $D = [a, b] \times [c, d]$. Dann gilt für jede stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$

$$\int_D f(x,y)\, d(x,y) \;=\; \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\, dy \Big)\, dx \;=\; \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\, dx \Big)\, dy\,.$$

Beispiel 2: Integration über einen Kreis.

Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $D = \overline{B}_r(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2\}$, also

$$D = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x \in [-r, r]\,,\; y \in \big[-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\,\big] \,\big\}\,.$$

Daher gilt für jede stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$

$$\int_D f(x,y)\, d(x,y) = \int_{-r}^{r} \Big(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x,y)\, dy \Big)\, dx\,.$$

11.5. Volumsberechnungen

Satz 11.19 (Elementare Eigenschaften des Volumens)**.**

1. *Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und entweder offen oder abgeschlossen, so ist D integrierbar.*
2. *Sei $\emptyset \ne D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ integrierbar über D. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Treppenfunktion $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, so dass*

$$\operatorname{supp}(\psi) = \overline{\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \psi(\boldsymbol{x}) \ne 0\}} \subset D \quad \textit{und} \quad \|f_D - \psi\|_1 < \varepsilon\,.$$

Beweis. 1. Nach Satz 11.18.

2. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Treppenfunktion mit $\|f_D - \varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Wegen $|f_D - 1_D\varphi| \le |f_D - \varphi|$ ist dann auch $\|f_D - 1_D\varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $M \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\|\varphi\|_{\mathbb{R}^n} < M$, und sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Quader mit $\varphi \,|\, \mathbb{R}^n \setminus B = 0$. Dann ist $D \cap B$ offen und beschränkt, also messbar. Nach Satz 11.12 gibt es eine Folge abgeschlossener Würfel $(W_k)_{k \ge 0}$, so dass

$$D \cap B = \bigcup_{k \ge 0} W_k \quad \text{und} \quad (\forall l > k \ge 0)\;\; v(W_k \cap W_l) = 0\,, \quad \text{also} \quad v(D \cap B) = \sum_{k=0}^{\infty} v(W_k)\,.$$

Sei $m \in \mathbb{N}$ mit

$$v(D \cap B) \;-\; \sum_{k=0}^{m} v(W_k) \;<\; \frac{\varepsilon}{2M}\,, \quad \text{und} \quad W \;=\; \bigcup_{k=0}^{m} W_k \subset D \cap B\,.$$

W ist abgeschlossen, und nach Satz 11.1 ist $W = R_1 \cup \ldots \cup R_l$ mit paarweise disjunkten Quadern $R_1, \ldots, R_l$. Daher ist $1_W = 1_{R_1} + \ldots + 1_{R_l}$ eine Treppenfunktion, $\psi = 1_W\varphi$ ist eine Treppenfunktion, $\operatorname{supp}(\psi) \subset W \subset B \cap D$,

$$\|1_D\varphi - \psi\|_1 = \|1_{D\cap B}\varphi - \psi\|_1 \le M\, v(D \cap B \setminus W) < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

und folglich $\|f_D - \psi\|_1 \le \|f_D - 1_D\varphi\|_1 + \|1_D\varphi - \psi\| < \varepsilon$. $\square$

Beispiele:

1. Ordinatenflächen.

Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und seien $f,\, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f \le g$. Dann ist die Menge

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,\, b]\,,\ y \in [f(x),\, g(x)]\,\}$$

kompakt und daher integrierbar. Mit Hilfe des Satzes von Fubini (Bemerkungen nach Satz 11.18) folgt

$$v_2(D) = \int_D d(x,y) = \int_a^b \Big(\int_{f(x)}^{g(x)} dy\Big) dx = \int_a^b \big[g(x) - f(x)\big]\, dx\,.$$

Beispiel Kreisfläche: Sei $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$,

$$\begin{aligned}\overline{B}_r(0) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2\} \\ &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; -r \le x \le r\,,\ -\sqrt{r^2 - x^2} \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}\,\big\}\,.\end{aligned}$$

Dann ist

$$v_2\big(\overline{B}_r(0)\big) = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = r^2\,\Big[\,\frac{x}{r}\,\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}\ -\ \arccos\frac{x}{r}\,\Big]_{-r}^{r} = \pi r^2\,.$$

2. Rotationskörper.

Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ stetig. Dann ist die Menge

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b\,,\ y^2 + z^2 \le f(x)^2\}$$

kompakt und daher integrierbar. Mit Hilfe des Satzes von Fubini (Bemerkungen nach Satz 11.18) folgt

$$v_3(D) = \int_D 1\, d(x,y,z) = \int_a^b \Big(\int_{D_x} 1\, d(y,z)\Big) dx = \int_a^b v_2\big(\overline{B}_{f(x)}(0)\big)\, dx = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx\,.$$

Satz 11.20 (Kleiner Transformationssatz)**.** *Sei* $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *eine bijektive Abbildung und* $\Delta(\sigma) \in \mathbb{R}_{>0}$*, so dass für jede Teilmenge* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *gilt:*

$$\sigma(Q) \ \text{ist ein Quader} \iff Q \ \text{ist ein Quader}\,, \ \text{und dann ist}\ v(\sigma(Q)) = \Delta(\sigma)\, v(Q)\,.$$

1. *Für jede Abbildung* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *ist* $\|f\circ\sigma\|_1 = \Delta(\sigma)^{-1}\|f\|_1$.
2. *Ist* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *integrierbar, so ist auch* $f\circ\sigma$ *integrierbar, und*
$$\int_{\mathbb{R}^n} f\circ\sigma = \Delta(\sigma)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f\,.$$
3. *Ist* $D \subset \mathbb{R}^n$ *integrierbar, so ist auch* $\sigma(D)$ *integrierbar, und*
$$v(\sigma(D)) = \Delta(\sigma)\, v(D)\,.$$

Beweis. Mit σ erfüllt auch σ^{-1} die Voraussetzungen des Satzes, und $\Delta(\sigma^{-1}) = \Delta(\sigma)^{-1}$.

1. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$, $(c_i)_{i\ge 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{\ge 0}$ und $(Q_i)_{i\ge 0}$ eine Folge von Quadern mit

$$|f| \le \sum_{i=0}^\infty c_i 1_{Q_i}\,. \quad \text{Dann ist} \quad |f\circ\sigma| \le \sum_{i=0}^\infty c_i(1_{Q_i}\circ\sigma) \ = \ \sum_{i=0}^\infty c_i 1_{\sigma^{-1}(Q_i)}\,.$$

Wegen

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i v(\sigma^{-1}(Q_i)) \;=\; \Delta(\sigma)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} c_i v(Q_i) \quad \text{folgt} \quad \|f\circ\sigma\|_1 = \Delta(\sigma)^{-1}\|f\|_1 \,.$$

2. Sei zuerst $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Treppenfunktion,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} c_j 1_{Q_j} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}\,, \quad \text{Quadern } Q_1,\ldots,Q_m \subset \mathbb{R}^n \ \text{ und } c_1,\ldots,c_m \in \mathbb{C}\,.$$

Dann ist

$$\varphi\circ\sigma = \sum_{j=1}^{m} c_j 1_{Q_j}\circ\sigma = \sum_{j=1}^{m} c_j 1_{\sigma^{-1}Q_j} \quad \text{ebenfalls eine Treppenfunktion, und}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\circ\sigma = \sum_{j=1}^{m} c_j v(\sigma^{-1}Q_j) = \Delta(\sigma)^{-1} \sum_{j=1}^{m} c_j v(Q_j) = \Delta(\sigma)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,.$$

Sei nun $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ integrierbar und $(\varphi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{i\geq 0}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $(\|f-\varphi_i\|_1)_{i\geq 0} \to 0$. Dann ist $(\|f\circ\sigma - \varphi_i\circ\sigma\|_1)_{i\geq 0} = \Delta(\sigma)^{-1}\|f-\varphi_i\|_1)_{i\geq 0} \to 0$, also auch $f\circ\sigma$ integrierbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\circ\sigma \;=\; \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i\circ\sigma \;=\; \Delta(\sigma)^{-1} \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i \;=\; \Delta(\sigma)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f\,.$$

3. Ist 1_D integrierbar, so ist auch $1_{\sigma(D)} = 1_D\circ\sigma^{-1}$ integrierbar, und

$$v(\sigma(D)) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_D\circ\sigma^{-1} \;=\; \Delta(\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} 1_D = \Delta(\sigma) v(D)\,. \qquad \square$$

Beispiele für bijektive Abbildungen $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften von Satz 11.20 (im Folgenden quadertreue Abbildungen genannt).

1. Koordinatenvertauschungen: Seien ν, $\mu \in \{1,\ldots,n\}$ und $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\sigma(x_1,\ldots,x_\nu,\ldots,x_\mu,\ldots,x_n) = x_1,\ldots,x_\mu,\ldots,x_\nu,\ldots,x_n)\,.$$

Dann ist σ quadertreu, und $\Delta(\sigma) = 1$.

2. Koordinatenstreckungen: Seien $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}^\times$, und sei $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\sigma(x_1,\ldots,x_n) = (\lambda_1 x_1,\ldots,\lambda_n x_n)\,.$$

Dann ist σ quadertreu, und $\Delta(\sigma) = |\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n|$.

3. Translationen: Sei $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ und $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$. Dann ist σ quadertreu, und $\Delta(\sigma) = 1$.

Satz 11.21 (Prinzip von Cavalieri)**.** *Sei $n \geq 2$. Für eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ sei $D_y = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (\boldsymbol{x}, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$.*

1. *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und entweder offen oder abgeschlossen. Dann gilt:*
Für alle $y \in \mathbb{R}$ ist D_y integrierbar, die Funktion $y \mapsto v_{n-1}(D_y)$ ist integrierbar, und

$$v_n(D) = \int_{\mathbb{R}} v_{n-1}(D_y)\,dy\,.$$

2. *Seien D', $D'' \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und entweder offen oder abgeschlossen, und sei*
$$(\forall y \in \mathbb{R}) \quad v_{n-1}(D'_y) = v_{n-1}(D''_y)\,.$$
Dann ist $v_n(D') = v_n(D'')$.

Beweis. Nach Satz 11.18 (man beachte $1_{D_y} = 1_D(.,y)$). □

Beispiel 1: Prismen.
Sei $n \ge 2$, $\emptyset \ne B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt, $h \in \mathbb{R}_{>0}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und
$$D = \bigcup_{y\in[0,h]} \Big(B + \frac{y}{h}\boldsymbol{v}\Big)\times\{y\} = \Big\{\Big(x + \frac{y}{h}\boldsymbol{v}, y\Big) \;\Big|\; \boldsymbol{x} \in B\,,\ y \in [0,h]\Big\} \subset \mathbb{R}^n$$
$\big[\,D \subset \mathbb{R}^n$ ist ein (schiefes) Prisma mit Grundfläche $B\times\{0\} \subset \mathbb{R}^n$, Höhe h und Verschiebungsvektor $\boldsymbol{v}$; im Falle $n = 2$ ist D ein Parallelogramm; im Falle $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ ist $D = B\times[0,h]$ ein gerades Prisma.$\,\big]$
D ist kompakt, und für $y \in [0,h]$ ist
$$D_y = \frac{y}{h}\,\boldsymbol{v} + B\,, \quad \text{also} \quad v_{n-1}(D_y) = v_{n-1}(B) \quad \text{nach Satz 11.20}\,.$$
Für $y \notin [0,h]$ ist $D_y = \emptyset$, und daher folgt
$$v_n(D) \;=\; \int_{\mathbb{R}} v_{n-1}(D_y)\,dy \;=\; v_{n-1}(B)\int_{\mathbb{R}} 1_{[0,h]} \;=\; v_{n-1}(B)\,h\,.$$

Beispiel 2: Pyramiden.
Sei $n \ge 2$, $\emptyset \ne B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt, $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $h \in \mathbb{R}_{>0}$, $\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{g},h)$ und
$$D = \big\{(\boldsymbol{b},0) + t\big[(\boldsymbol{g},h) - (\boldsymbol{b},0)\big] \;\big|\; \boldsymbol{b} \in B\,,\ t \in [0,1]\,\big\} = \bigcup_{\boldsymbol{b}\in B}\big[(\boldsymbol{b},0),\,\boldsymbol{s}\big] \subset \mathbb{R}^n$$
$\big[\,D$ ist eine (schiefe) Pyramide mit Grundfläche $B\times\{0\} \subset \mathbb{R}^n$, Höhe h und Spitze $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$; im Falle $n = 2$ ist D ein Dreieck.$\,\big]$.
D ist kompakt, und für $y \in [0,h]$ ist
$$D_y = \Big(1 - \frac{y}{h}\Big)B \;+\; \frac{y}{h}\,\boldsymbol{g}\,, \quad \text{also} \quad v_{n-1}(D_y) = v_{n-1}\Big(\Big(1 - \frac{y}{h}\Big)B\Big) = \Big(1 - \frac{y}{h}\Big)^{n-1} v_{n-1}(B)$$
nach Satz 11.20. Für $y \notin [0,h]$ ist $D_y = \emptyset$, und daher folgt
$$v_n(D) = \int_{\mathbb{R}} v_{n-1}(D_y)\,dy = v_{n-1}(B)\int_0^h \Big(1-\frac{y}{h}\Big)^{n-1} dy \;=\; v_{n-1}(B)\left[\frac{-h}{n}\Big(1-\frac{y}{h}\Big)^n\right]_0^h = v_{n-1}(B)\frac{h}{n}\,.$$

Beispiel 3: Kugeln.
Sei $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ und $K_n(r) = \overline{B}_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ die n-dimensionale kompakte Kugel mit Radius r. Dann ist $K_n(r) = rK_n(1)$, und nach Satz 11.20 folgt
$$v_n(K_n(r)) = r^n\kappa_n \quad \text{mit} \quad \kappa_n = v_n(K_n(1))\,.$$
Es ist $K_1(1) = [-1,1]$ und daher $\kappa_1 = 2$. Für $n \ge 2$ ist
$$K_n(1) = \big\{(\boldsymbol{x},y) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \;\big|\; \|\boldsymbol{x}\|^2 + y^2 \le 1\big\}$$

und

$$K_n(1)_y = \begin{cases} \emptyset\,, & \text{falls} \quad y \notin [-1,1]\,, \\ K_{n-1}(\sqrt{1-y^2})\,, & \text{falls} \quad y \in [-1,1]\,. \end{cases}$$

Daher folgt (mit Hilfe der Substitution $y = \cos t$)

$$\kappa_n = \int_{\mathbb{R}} v_{n-1}\big(K_n(1)_y\big)\,dy = \kappa_{n-1}\int_{-1}^{1}\big(\sqrt{1-y^2}\big)^{n-1}\,dy = 2\kappa_{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt = 2\kappa_{n-1}J_n\,,$$

und nach 8.2 gilt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$J_{2k} = \frac{\pi}{2^{2k+1}}\binom{2k}{k} \quad \text{und} \quad J_{2k+1} = \frac{2^{2k}}{2k+1}\binom{2k}{k}^{-1}, \quad \text{also} \quad J_{2k}J_{2k+1} = \frac{\pi}{2(2k+1)}\,.$$

Mittels Induktion folgt $(\forall n \in \mathbb{N})\;\; \kappa_n = 2^n J_2 J_3 \cdot \ldots \cdot J_n$ und daher für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\kappa_{2m+1} = 2^{2m+1}\prod_{k=1}^{m}(J_{2k}J_{2k+1}) = \frac{2^{m+1}\pi^m}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2m+1)} \quad \text{und} \quad \kappa_{2m} = 2\kappa_{2m-1}J_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}\,.$$

11.6. Das Riemann'sche Integral

Satz 11.22. *Sei* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt,* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *beschränkt und* $\{\boldsymbol{x} \in D \mid f \text{ unstetig in } \boldsymbol{x}\}$ *eine Nullmenge. Dann ist* f *integrierbar über* D.

Beweis. Wir zeigen: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es eine Treppenfunktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, so dass $\|f_D - \varphi\|_1 < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $M = \|f\|_D$. Nach Satz 11.14 gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\{\boldsymbol{x} \in D \mid f \text{ unstetig in } \boldsymbol{x}\} \subset U$ und $2M\,v(U) < \varepsilon$. $D \setminus U$ ist kompakt und $f \,|\, D\setminus U$ ist stetig, also über $D \setminus U$ integrierbar. Daher gibt es eine Treppenfunktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit

$$\|f_{D\setminus U} - \varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{und aus} \;\; |f - f_{D\setminus U}| \le M\,1_U \;\; \text{folgt} \quad \|f_D - f_{D\setminus U}\|_1 < M\,v(U) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Damit erhalten wir $\|f_D - \varphi\|_1 \le \|f_D - f_{D\setminus U}\|_1 + \|f_{D\setminus U} - \varphi\|_1 < \varepsilon$. □

Definition 11.8. Seien X, Y normierte Räume, $\emptyset \neq D \subset X$ und $f\colon D \to Y$.

1. f heißt *gleichmäßig stetig*, wenn
$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\;(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\;(\forall x, y \in D)\;\;\big[\,\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon\,\big]\,.$$
2. Sei $a \in D$. Für $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $\omega(f,a,\delta) = \sup\big\{\|f(x) - f(y)\| \;\big|\; x, y \in D \cap B_\delta(a)\big\} \in [0,\infty]$, und
$$\omega(f,a) = \inf\{\omega(f,a,\delta) \mid \delta \in \mathbb{R}_{>0}\} \in [0,\infty]\,.$$
$\omega(f,a)$ heißt *Stetigkeitsmodul* von f in a.

Satz 11.23. *Seien* X, Y *normierte Räume,* $D \subset X$, $a \in D$, $f\colon D \to Y$ *und* $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. f *stetig in* $a \iff \omega(f,a) = 0$.
2. *Ist* D *abgeschlossen, so ist auch die Menge* $D_\eta = \{x \in D \mid \omega(f,x) \ge \eta\}$ *abgeschlossen.*

3. *Sei D kompakt und* $(\forall x \in D)\ \omega(f, x) < \eta$. *Dann*

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x,\, x' \in D)\ \big[\, \|x - x'\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(x')\| < \eta \,\big]\,.$$

4. *Sei D kompakt und f stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. 1. $\Longrightarrow$: Wir müssen zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ \ \omega(f, a, \delta) \le \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x \in D \cap B_\delta(a))\ \ \|f(x) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Für $x,\, y \in D \cap B_\delta(a)$ folgt $\|f(x) - f(y)\| \le \|f(x) - f(a)\| + \|f(y) - f(a)\| < \varepsilon$, und daher $\omega(f, a, \delta) \le \varepsilon$.

$\Longleftarrow$: Wir müssen zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x \in D \cap B_\delta(a))\ \ \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\omega(f, a, \delta) < \varepsilon$, und für alle $x \in D \cap B_\delta(a)$ folgt $\|f(x) - f(a)\| \le \omega(f, a, \delta) < \varepsilon$.

2. Sei $z \in \overline{D_\eta} \subset \overline{D} = D$. Wir müssen zeigen: $(\forall \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ \ \omega(f, z, \delta) \ge \eta$. Sei $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $u \in B_\delta(z) \cap D_\eta$ und $\varepsilon \in (0, \delta)$ mit $B_\varepsilon(u) \subset B_\delta(z)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\omega(f, z, \delta) &= \sup\big\{\|f(x) - f(y)\| \,\big|\, x,\, y \in D \cap B_\delta(z)\big\} \\ &\ge \sup\big\{\|f(x) - f(y)\| \,\big|\, x,\, y \in D \cap B_\varepsilon(u)\big\} = \omega(f, u, \varepsilon) \ge \omega(f, u) \ge \eta\,.\end{aligned}$$

3. Durch Widerspruch. Angenommen,

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ (\exists x_k,\, x'_k \in D)\ \ \|x_k - x'_k\| < \frac{1}{k}\ \wedge\ \|f(x_k) - f(x'_k)\| \ge \eta\,.$$

Nach Satz 4.16 gibt es eine Teilfolge $(x_k)_{k\in T}$ von $(x_k)_{k\ge1}$ mit $(x_k)_{k\in T} \to a \in D$. Wegen $(x_k - x'_k)_{k\ge1} \to 0$ ist dann auch $(x'_k)_{k\in T} \to a$. Wegen $\omega(f, a) < \eta$ gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\omega(f, a, \delta) < \eta$. Sei $k \in T$ mit $x_k,\, x'_k \in B_\delta(a)$. Dann folgt $\eta \le \|f(x_k) - f(x'_k)\| \le \omega(f, a, \delta) < \eta$, ein Widerspruch.

4. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach 1. ist $(\forall x \in D)\ \ \omega(f, x) < \varepsilon$, und aus 3. folgt die Behauptung. □

Definition 11.9. Sei $\emptyset \ne Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader.

1. Unter einer *Zerlegung* von Q versteht man eine endliche Menge $\mathfrak{z}$ abgeschlossener nicht-leerer Quader, so dass

$$Q = \bigcup_{P\in\mathfrak{z}} P \quad \text{und} \quad (\forall P,\, P' \in \mathfrak{z})\ \ \big[\, P \ne P' \implies P \cap P' \text{ ist ausgeartet} \,\big]\,.$$

Insbesondere folgt dann

$$v(Q) = \sum_{P\in\mathfrak{z}} v(P)\,.$$

Es sei $\mathfrak{Z}_Q$ die Menge aller Zerlegungen von Q.

2. Sei $f\colon Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_Q$. Dann heißt

$$\mathsf{S}^*(f,\mathfrak{z}) \;=\; \sum_{P\in\mathfrak{z}} \sup f(P)\, v(P) \quad \text{die } \textit{Obersumme} \text{ von } f \text{ zur Zerlegung } \mathfrak{z}, \text{ und}$$

$$\mathsf{S}_*(f,\mathfrak{z}) \;=\; \sum_{P\in\mathfrak{z}} \inf f(P)\, v(P) \quad \text{die } \textit{Untersumme} \text{ von } f \text{ zur Zerlegung } \mathfrak{z}\,.$$

$$\overline{\int_Q} f \;=\; \inf\{\, \mathsf{S}^*(f,\mathfrak{z}) \mid \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_Q \,\} \quad \text{heißt } \textit{Oberintegral} \text{ von } f \text{ über } Q\,, \text{ und}$$

$$\underline{\int_Q} f \;=\; \sup\{\, \mathsf{S}_*(f,\mathfrak{z}) \mid \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_Q \,\} \quad \text{heißt } \textit{Unterintegral} \text{ von } f \text{ über } Q\,.$$

f heißt *Riemann-integrierbar* über Q, wenn das Ober- und das Unterintegral von f über Q übereinstimmen. Dann heißt

$$(\mathsf{R}\text{-})\int_Q f = \overline{\int_Q} f = \underline{\int_Q} f \quad \text{das } \textit{Riemann'sche Integral} \text{ von } f \text{ über } Q\,.$$

Satz 11.24 (Hauptsatz über das Riemann-Integral)**.** *Sei* $\emptyset \neq Q \subset \mathbb{R}^n$ *ein abgeschlossener Quader und* $f\colon Q \to \mathbb{R}$ *beschränkt.*

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent*:
   (a) f *ist Riemann-integrierbar.*
   (b) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_Q)\ \ \mathsf{S}^*(f,\mathfrak{z}) - S_*(f,\mathfrak{z}) < \varepsilon$.
   (c) *Die Menge* $\{\boldsymbol{x} \in Q \mid f \textit{ ist unstetig in } \boldsymbol{x}\}$ *ist eine Nullmenge.*
2. *Ist* f *Riemann-integrierbar über* Q, *so ist* f *integrierbar über* Q, *und*

$$(\mathsf{R}\text{-})\int_Q f = \int_Q f\,.$$

Beweis. 1. (a) $\Rightarrow$ (b) Seien $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}' \in \mathfrak{Z}_Q$. Man sagt, $\mathfrak{z}$ ist feiner als $\mathfrak{z}'$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $(\forall P \in \mathfrak{z})\ (\exists P' \in \mathfrak{z}')\ \ P \subset P'$.
- $(\forall P' \in \mathfrak{z}')\ \ \{P \in \mathfrak{z} \mid P \subset P'\} \in \mathfrak{Z}_{P'}$.

Es genügt nun, zu zeigen:

A. Sind $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}' \in \mathfrak{Z}_Q$ und ist $\mathfrak{z}$ feiner als $\mathfrak{z}'$, so folgt $S^*(f,\mathfrak{z}') \geq S^*(f,\mathfrak{z})$ und $S_*(f,\mathfrak{z}') \leq S_*(f,\mathfrak{z})$.
B. Sind $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}'' \in \mathfrak{Z}_Q$, so gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_Q$, die feiner als $\mathfrak{z}'$ und $\mathfrak{z}''$ ist.

Seien **A** und **B** gezeigt, sei f Riemann-integrierbar und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es Zerlegungen $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}'' \in \mathfrak{Z}_Q$, so dass

$$0 \;\leq\; S^*(f,\mathfrak{z}') - (\mathsf{R}\text{-})\int_Q f \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad 0 \;\leq\; (\mathsf{R}\text{-})\int_Q f - S_*(f,\mathfrak{z}'') \;<\; \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Nach **B** gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_Q$, die feiner als $\mathfrak{z}'$ und $\mathfrak{z}''$ ist, und mit **A** folgt

$$S^*(f,\mathfrak{z}) - S_*(f,\mathfrak{z}) \;\leq\; S^*(f,\mathfrak{z}') - S_*(f,\mathfrak{z}'') \;<\; \varepsilon\,.$$

Beweis von **A.** Sei $\mathfrak{z}$ feiner als $\mathfrak{z}'$. Dann folgt

$$\begin{aligned} S^*(f,\mathfrak{z}') &= \sum_{P'\in\mathfrak{z}'} \sup f(P')\, v(P') = \sum_{P'\in\mathfrak{z}'} \sum_{\substack{P\in\mathfrak{z}\\ P\subset P'}} \sup f(P')\, v(P) \\ &\geq \sum_{P'\in\mathfrak{z}'} \sum_{\substack{P\in\mathfrak{z}\\ P\subset P'}} \sup f(P)\, v(P) = \sum_{P\in\mathfrak{z}} \sup f(P)\, v(P) = S^*(f,\mathfrak{z})\,, \end{aligned}$$

denn liegt ein Quader $P \in \mathfrak{z}$ in zwei verschiedenen Quadern von $\mathfrak{z}'$, so ist $v(P) = 0$. Die Ungleichung für die Untersummen beweist man genauso.

Beweis von **B.** Seien $\mathfrak{z}', \mathfrak{z}'' \in \mathfrak{Z}_Q$. Dann ist $\mathfrak{z} = \{P' \cap P'' \mid P' \in \mathfrak{z}',\ P'' \in \mathfrak{z}'',\ P'\cap P'' \neq \emptyset\} \in \mathfrak{Z}_Q$ feiner als $\mathfrak{z}'$ und als $\mathfrak{z}''$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_Q$ mit $S^*(f,\mathfrak{z}) - S_*(f,\mathfrak{z}) < \varepsilon$, also

$$0 \leq \overline{\int_Q} f - \underline{\int_Q} f \leq S^*(f,\mathfrak{z}) - S_*(f,\mathfrak{z}) < \varepsilon\,, \quad \text{und daher} \quad \overline{\int_Q} f = \underline{\int_Q} f\,.$$

Für den Nachweis der Äquivalenz von (b) und (c) sei (für $k \in \mathbb{N}$)

$$\Sigma_k = \Big\{\boldsymbol{x} \in Q \;\Big|\; \omega(f,\boldsymbol{x}) \geq \frac{1}{k}\Big\}, \quad \text{also} \quad \{\boldsymbol{x}\in Q \mid f \text{ unstetig in } \boldsymbol{x}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Sigma_k\,.$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Es genügt zu zeigen: $(\forall k \in \mathbb{N})\ v(\Sigma_k) = 0$. Sei $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_Q$ mit

$$S^*(f,\mathfrak{z}) - S_*(f,\mathfrak{z}) < \frac{\varepsilon}{k}\,.$$

Sei $P \in \mathfrak{z}$ mit $\Sigma_k \cap P^\circ \neq \emptyset$, $\boldsymbol{z} \in \Sigma_k \cap P^\circ$ und $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\delta(\boldsymbol{z}) \subset P$. Dann ist

$$\frac{1}{k} \leq \omega(f,\boldsymbol{z}) \leq \omega(f,\boldsymbol{z},\delta) = \sup\big\{|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \;\big|\; \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in B_\delta(\boldsymbol{z})\big\} \leq \sup f(P) - \inf f(P)$$

und daher

$$\frac{\varepsilon}{k} > S^*(f,\mathfrak{z}) - S_*(f,\mathfrak{z}) \geq \sum_{\substack{P\in\mathfrak{z}\\ \Sigma_k\cap P^\circ\neq\emptyset}} [\sup f(P) - \inf f(P)]\, v(P) \geq \frac{1}{k} \sum_{\substack{P\in\mathfrak{z}\\ \Sigma_k\cap P^\circ\neq\emptyset}} v(P)\,.$$

Es ist

$$\Sigma_k = \bigcup_{P\in\mathfrak{z}} \Sigma_k \cap P = \bigcup_{P\in\mathfrak{z}} (\Sigma_k \cap P^\circ) \cup \bigcup_{P\in\mathfrak{z}} \Sigma_k \cap (P \setminus P^\circ)\,,$$

und die Mengen $\Sigma_k \cap (P\setminus P^\circ)$ sind Nullmengen. Daher folgt

$$v(\Sigma_k) = \sum_{\substack{P\in\mathfrak{z}\\ \Sigma_k\cap P^\circ\neq\emptyset}} v(\Sigma_k \cap P^\circ) \leq \sum_{\substack{P\in\mathfrak{z}\\ \Sigma_k\cap P^\circ\neq\emptyset}} v(P) < \varepsilon\,.$$

(c) $\Rightarrow$ (b) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $k \in \mathbb{N}$ mit $2v(Q) < k\varepsilon$ und $M = \sup f(Q) - \inf f(Q) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Nach Satz 11.23 ist Σ_k kompakt, und nach Satz 11.14 gibt es offene Quader $P_1, \ldots, P_m \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\Sigma_k \subset \bigcup_{j=1}^m P_j \quad \text{und} \quad 2M \sum_{j=1}^m v(P_j) < \varepsilon\,.$$

Dann ist $D = Q \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_m)$ kompakt,

$(\forall \boldsymbol{x} \in D)\ \omega(f, \boldsymbol{x}) < \dfrac{1}{k}$ und $(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in D)\ \left[\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| < \delta \implies \left|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')\right| < \dfrac{1}{k} \,\right]$.

nach Satz 11.23. Sei nun $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{Z}_Q$ so, dass

$$(\forall P \in \mathfrak{z}_0)\quad \sup\left\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| \;\middle|\; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in P\right\} < \delta\,, \quad \text{sei} \quad \mathcal{E} = \mathfrak{z}_0 \cup \left\{Q \cap \overline{P}_1, \ldots, Q \cap \overline{P}_m\right\},$$

und sei $\mathcal{E}^*$ eine endliche Menge paarweise disjunkter Quader, so dass

$$(\forall P^* \in \mathcal{E}^*)\ (\exists P \in \mathcal{E})\ \ P^* \subset P \quad \text{und} \quad (\forall P \in \mathcal{E})\ \ P = \bigcup_{P^* \in \mathcal{E}^*, P^* \subset P} P^*$$

(siehe Satz 11.1). Dann ist

$$\mathfrak{z} = \{\overline{P^*} \mid P^* \in \mathcal{E}^*\} \in \mathfrak{Z}_Q\,, \quad \text{und} \quad (\forall P \in \mathfrak{z})\ \ \sup\left\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| \;\middle|\; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in P\right\} < \delta\,.$$

Ist $P \in \mathfrak{z}$ und $P \subset D$, so folgt $\sup f(P) - \inf f(P) \le \frac{1}{k}$. Ist $P \in \mathfrak{z}$ und $P \not\subset D$, so folgt $P \subset Q \cap \overline{P_j}$ für ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ und natürlich $\sup f(P) - \inf f(P) \le M$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} S^*(f, \mathfrak{z}) - S_*(f, \mathfrak{z}) \ &= \ \sum_{P \in \mathfrak{z}} [\,\sup f(P) - \inf f(P)\,]\, v(P) \ \le \ \sum_{\substack{P \in \mathfrak{z} \\ P \subset D}} \frac{1}{k} v(P) + \sum_{j=1}^{m} M v(\overline{P_j}) \\ &\le \ \frac{1}{k} v(Q) \ + \ M \sum_{j=1}^{m} v(P_j) \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon\,. \end{aligned}$$

2. Sei f Riemann-integrierbar über Q und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es ein $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_Q$ mit $S^*(f, \mathfrak{z}) - S_*(f, \mathfrak{z}) < \varepsilon$. Nach Satz 11.22 ist f integrierbar über Q und über alle $P \in \mathfrak{z}$. Damit folgt

$$S_*(f, \mathfrak{z}) = \sum_{P \in \mathfrak{z}} \inf f(P)\, v(P) = \sum_{P \in \mathfrak{z}} \int_P \inf f(P) \ \le \ \sum_{P \in \mathfrak{z}} \int_P f = \int_Q f\,,$$

und ebenso

$$S^*(f, \mathfrak{z}) \ge \int_Q f\,,$$

also

$$-\varepsilon \ < S_*(f, \mathfrak{z}) - S^*(f, \mathfrak{z}) \ \le \int_Q f \ - \ (\mathsf{R}\text{-})\!\int_Q f \ \le \ S^*(f, \mathfrak{z}) - S_*(f, \mathfrak{z}) \ < \ \varepsilon\,,$$

und daher

$$\int_Q f \ = \ (\mathsf{R}\text{-})\!\int_Q f\,.$$

□

12. Mehrdimensionale Integralrechnung: Die Hauptsätze

Im ganzen Abschnitt sei $n \in \mathbb{N}$.

12.1. Die Konvergenzsätze

Definition 12.1. Eine Folge $(f_k \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}})_{k\ge 0}$ heißt L^1-*Cauchyfolge*, wenn

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists l \in \mathbb{N}_0)\ (\forall i,\, j \ge l)\ \ \|f_i - f_j\|_1 < \varepsilon\,.$$

Bemerkungen: Sei $(f_k \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}})_{k\ge 0}$ eine Folge von Funktionen.

1. Seien $f,\, \widetilde{f} \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ mit $(\|f - f_k\|_1)_{k\ge 0} \to 0$ und $(\|\widetilde{f} - f_k\|_1)_{k\ge 0} \to 0$. Dann ist $\|f - \widetilde{f}\|_1 = 0$, und $(f_k)_{k\ge 0}$ ist eine L^1-Cauchyfolge..
2. Sei
$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_1 < \infty\,.$$
Dann ist $(f_k \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}})_{k\ge 0}$ eine L^1-Cauchyfolge.
Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibe es ein $l \in \mathbb{N}_0$, so dass
$$\sum_{k=l}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_1 < \varepsilon\,.$$
Ist nun $j > i \ge l$, so folgt
$$\|f_j - f_i\|_1 = \Big\|\sum_{k=i}^{j-1}(f_{k+1} - f_k)\Big\|_1 \le \sum_{k=i}^{j-1} \|f_{k+1} - f_k\|_1 \le \sum_{k=l}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_1 < \varepsilon\,. \qquad \square$$
3. Ist $(f_k \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}})_{k\ge 0}$ eine L^1-Cauchyfolge, so gibt es eine Teilfolge $(f_{k_i})_{i\ge 0}$ von $(f_k)_{k\ge 0}$, so dass
$$\sum_{i=0}^{\infty} \|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|_1 < \infty\,.$$
Beweis. Sei $(k_i)_{i\ge 0}$ rekursiv definiert durch
$$k_0 = 0 \quad \text{und} \quad k_{i+1} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > k_i\,,\ (\forall l \ge k)\ \|f_l - f_k\|_1 < 2^{-i-1}\}\,.$$
Dann ist $(k_i)_{i\ge 0}$ monoton wachsend, und $(\forall i \in \mathbb{N})$ $\|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|_1 < 2^{-i}$. Die Teilfolge $(f_{k_i})_{i\ge 0}$ hat die gewünschte Eigenschaft.

Satz 12.1 (Vollständigkeitssatz von Riesz-Fischer)**.** *Sei* $(f_k \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}})_{k\ge 0}$ *eine* L^1*-Cauchyfolge.*

1. *Es gibt eine Funktion* $\widetilde{f} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$*, so dass* $(\|\widetilde{f} - f_k\|_1)_{k\ge 0} \to 0$*, und für jede Funktion* $f \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *mit* $(\|f - f_k\|_1)_{k\ge 0} \to 0$ *gilt:*
Es gibt eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ *und eine Teilfolge* $(f_{k_i})_{i\ge 0}$ *von* $(f_k)_{k\ge 0}$*, so dass*
$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N)\ \big[\,(\forall i \in \mathbb{N}_0)\ f_{k_i}(\boldsymbol{x}) \ne \infty\ \wedge\ \big(f_{k_i}(\boldsymbol{x})\big)_{i\ge 0} \to f(\boldsymbol{x}) \ne \infty\,\big]\,.$$
Sind alle f_k *integrierbar, so ist auch* f *integrierbar, und*
$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,.$$

2. *Sei* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *eine Funktion und* $N \subset \mathbb{R}^n$ *eine Nullmenge, so dass*

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N)\ \big[\,(\forall k \in \mathbb{N}_0)\ \ f_k(\boldsymbol{x}) \neq \infty\ \wedge\ (f_k(\boldsymbol{x}))_{k\geq 0} \to f(\boldsymbol{x}) \neq \infty\,\big]\,.$$

Dann folgt $(\|f - f_k\|_1)_{k\geq 0} \to 0$, *und es gilt*:
Sind alle f_k *integrierbar, so ist auch* f *integrierbar, und*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,.$$

Beweis. 1. Sei $(f_{k_i})_{i\geq 0}$ eine Teilfolge von $(f_k)_{k\geq 0}$, so dass

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|_1 < \infty\,, \quad \text{sei} \quad g = \sum_{i=0}^{\infty} |f_{k_{i+1}} - f_{k_i}|\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]\,,$$

und sei ohne Einschränkung $f_{k_0} = 0$. Dann ist

$$\|g\|_1 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|_1 < \infty$$

und daher $N_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\boldsymbol{x}) = \infty\}$ eine Nullmenge. Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N_1$ ist dann auch $(\forall i \in \mathbb{N}_0)\ \ f_{k_i}(\boldsymbol{x}) \neq \infty$. Wir definieren $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ durch

$$\widetilde{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \big[f_{k_{i+1}}(\boldsymbol{x}) - f_{k_i}(\boldsymbol{x})\big] = \lim_{i\to\infty} f_{k_i}(\boldsymbol{x})\,, \quad \text{falls} \quad \boldsymbol{x} \notin N_1\,, \quad \text{und} \quad \widetilde{f}(\boldsymbol{x}) = 0\,, \quad \text{falls} \quad \boldsymbol{x} \in N_1\,.$$

Für $l \in \mathbb{N}_0$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N_1$ ist dann

$$|\widetilde{f}(\boldsymbol{x}) - f_{k_l}(\boldsymbol{x})| = \Big|\sum_{i=0}^{\infty} \big[f_{k_{i+1}}(\boldsymbol{x}) - f_{k_i}(\boldsymbol{x})\big] - \sum_{i=0}^{l-1} \big[f_{k_{i+1}}(\boldsymbol{x}) - f_{k_i}(\boldsymbol{x})\big]\Big| \leq \sum_{i=l}^{\infty} |f_{k_{i+1}}(\boldsymbol{x}) - f_{k_i}(\boldsymbol{x})|$$

und daher

$$\|\widetilde{f} - f_{k_l}\|_1 \leq \sum_{i=l}^{\infty} \|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|_1\,.$$

Wir zeigen $(\|\widetilde{f} - f_k\|_1)_{k\geq 0} \to 0$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es ein $l \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\|\widetilde{f} - f_{k_l}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad (\forall i,\, j \geq k_l)\ \ \|f_i - f_j\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Für $j \geq k_l$ folgt dann $\|\widetilde{f} - f_j\|_1 \leq \|\widetilde{f} - f_{k_l}\|_1 + \|f_{k_l} - f_j\|_1 < \varepsilon$.

Sei nun $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ eine Funktion mit $(\|f - f_k\|_1)_{k\geq 0} \to 0$. Dann ist $\|\widetilde{f} - f\|_1 = 0$ und $\|f\|_1 < \infty$, also $N_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \widetilde{f}(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x})\} \cup \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = \infty\}$ eine Nullmenge, und $N = N_1 \cup N_2$ hat die gewünschte Eigenschaft.

Seien nun alle f_k integrierbar und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei

$$k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad \|f - f_k\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \quad \text{eine Treppenfunktion mit} \quad \|f_k - \varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dann ist $\|f - \varphi\|_1 \leq \|f - f_k\|_1 + \|f_k - \varphi\|_1 < \varepsilon$ und daher f integrierbar. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} f - \int_{\mathbb{R}^n} f_k\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_k| = \|f - f_k\|_1\,, \quad \text{und daher} \quad \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_k\Big)_{k\geq 0} \to \int_{\mathbb{R}^n} f\,.$$

2. Nach 1. gibt es eine Funktion $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit $(\|\widetilde{f} - f_k\|_1)_{k\ge 0} \to 0$, eine Nullmenge $\widetilde{N} \subset \mathbb{R}^n$ und eine Teilfolge $(f_{k_i})_{i\ge 0}$ von $(f_k)_{k\ge 0}$, so dass

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{N}) \ \big[\, (\forall i \in \mathbb{N}_0)\ f_{k_i}(\boldsymbol{x}) \ne \infty \ \wedge \ \big(f_{k_i}(\boldsymbol{x})\big)_{i\ge 0} \to \widetilde{f}(\boldsymbol{x}) \,\big]\,.$$

Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus (N \cup \widetilde{N})$ ist dann $f(\boldsymbol{x}) = \widetilde{f}(\boldsymbol{x})$, und da $N \cup \widetilde{N}$ eine Nullmenge ist, folgt $\|f - f_k\|_1 = \|\widetilde{f} - f_k\|_1$. □

Satz 12.2 (Satz von Levi)**.** *Sei* $(f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\})_{k\ge 0}$ *eine (punktweise) monotone Folge von Funktionen und* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *definiert durch*

$$f(\boldsymbol{x}) = \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})\,, \quad \textit{falls} \ \ (f_k(\boldsymbol{x}))_{k\ge 0} \ \ \textit{beschränkt ist, und} \quad f(\boldsymbol{x}) = \infty \ \ \textit{sonst.}$$

Seien alle f_k *integrierbar, und sei*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_k\Big)_{k\ge 0} \quad \textit{beschränkt}\,.$$

Dann ist f *integrierbar,* $(\|f - f_k\|)_{k\ge 0} \to 0$*, und*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,.$$

Beweis. FALL 1: $(f_k)_{k\ge 0}$ ist monoton wachsend.
Dann ist

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_k\Big)_{k\ge 0} \quad \text{monoton wachsend, und es sei} \quad L = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \in \mathbb{R}\,.$$

Es genügt, zu zeigen, dass $(f_k)_{k\ge 0}$ eine L^1-Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $l_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass $(\forall l \ge l_0)\ L - \int_{\mathbb{R}^n} f_l < \varepsilon$. Für $j \ge i \ge l_0$ ist dann $\|f_j - f_i\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} (f_j - f_i) \le L - \int_{\mathbb{R}^n} f_i < \varepsilon$.

FALL 2: $(f_k)_{k\ge 0}$ ist monoton fallend. Betrachte $(-f_k)_{k\ge 0}$. □

Satz 12.3 (Lemma von Fatou)**.** *Sei* $(f_k\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty])_{k\ge 0}$ *eine Folge integrierbarer Funktionen, und sei* $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ *definiert durch* $f(\boldsymbol{x}) = \liminf_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})$*. Dann ist*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \|f\|_1 \ \le \ \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,, \quad \textit{und im Falle} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f < \infty \quad \textit{ist} \ \ f \ \ \textit{integrierbar.}$$

Beweis. Für $m,\, \nu \in \mathbb{N}_0$ sei $F_{m,\nu} = \min\{f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+\nu}\}\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$. Für $m \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(F_{m,\nu})_{\nu\ge 0}$ monoton fallend, und es sei

$$F_m \ = \ \lim_{\nu\to\infty} F_{m,\nu} \ = \ \inf\{f_{m+\nu} \mid \nu \in \mathbb{N}_0\}\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty] \quad \text{(punktweise)}\,.$$

Dann ist $(F_m)_{m\ge 0}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen nach Satz 12.2, und für alle $m \le k$ ist $F_m \le f_k$, also auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_m \le \int_{\mathbb{R}^n} f_k \quad \text{und daher} \quad \int_{\mathbb{R}^n} F_m \ \le \ \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,.$$

Nach Satz 3.17 ist

$$f = \liminf_{k\to\infty} f_k = \lim_{m\to\infty} F_m\,,$$

und die Behauptung folgt aus Satz 12.2. □

Satz 12.4 (Satz von der dominanten Konvergenz)**.** *Sei* $(f_k\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}})_{k\ge 0}$ *eine Folge integrierbarer Funktionen,* $g\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$*,* $\|g\|_1 < \infty$*,* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *und* $N \subset \mathbb{R}^n$ *eine Nullmenge, so dass*

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N)\ \big[\,(\forall k \in \mathbb{N}_0)\ \ |f_k(\boldsymbol{x})| \le g(\boldsymbol{x}) < \infty \quad\wedge\quad (f_k(\boldsymbol{x}))_{k\ge 0} \to f(\boldsymbol{x}) \ne \infty\,\big]\,.$$

Dann ist f *integrierbar,* $(\|f - f_k\|_1)_{k\ge 0} \to 0$*, und*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,.$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $h_k\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ definiert durch

$$h_k(\boldsymbol{x}) = \sup\big\{|f_i(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x})| \;\big|\; i,\, j \ge k\big\}\,.$$

Dann ist $(h_k)_{k\ge 0}$ monoton fallend, $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N)\ \ |h_k(\boldsymbol{x})| \le 2g(\boldsymbol{x})$, also $\|h_k\|_1 \le 2\|g\|_1$, und wir werden zeigen:

A. $(\forall k \in \mathbb{N}_0)\ \big[\,h_k$ ist integrierbar$\,\big]$. **B.** $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N)\ \ (h_k(\boldsymbol{x}))_{k\ge 0} \to 0$.

Seien **A** und **B** gezeigt. Nach Satz 12.2 folgt dann

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} h_k\Big)_{k\ge 0} \to 0\,, \quad \text{also} \quad \big(\|h_k\|_1\big)_{k\ge 0} \to 0\,.$$

Daher gilt: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})\ (\exists k_0 \ge 0)\ (\forall i,\, j \ge k_0)\ \ \|f_i - f_j\|_1 \le \|h_{k_0}\|_1 < \varepsilon$. Also ist $(f_k)_{k\ge 0}$ eine L^1-Cauchyfolge, und die Behauptung folgt aus Satz 12.1.

Beweis von **A.** Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Für $l \ge k$ sei $h_{k,l}\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ definiert durch

$$h_{k,l}(\boldsymbol{x}) = \max\big\{|f_i(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x})| \;\big|\; k \le i < j \le l\big\}\,.$$

Dann ist $(h_{k,l})_{l\ge k}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen, $(h_{k,l})_{l\ge k} \to h_k$, und $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N)\ \ h_{k,l}(\boldsymbol{x}) \le 2g(\boldsymbol{x})$, also

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_{k,l} \ = \|h_{k,l}\|_1 \le\ 2\|g\|_1 \ <\ \infty\,.$$

Nach Satz 12.2 ist daher h_k integrierbar.

Beweis von **B.** Sei $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $k_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$(\forall k \ge k_0)\ \ |f(\boldsymbol{x}) - f_k(\boldsymbol{x})| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Für $k \ge k_0$ und $i,\, j \ge k$ ist dann

$$|f_i(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x})| \le |f(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{x})| + |f(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x})| < \varepsilon\,, \quad \text{also} \quad h_k(\boldsymbol{x}) \le \varepsilon\,. \qquad \square$$

Satz 12.5 (Integration von Reihen)**.** *Sei* $(f_k\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}})_{k\ge 0}$ *eine Folge integrierbarer Funktionen und*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 < \infty\,.$$

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *definiert durch*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\boldsymbol{x})\,, \quad \textit{falls} \quad \sum_{k\ge 0} f_k(\boldsymbol{x}) \quad \textit{konvergiert,} \quad \textit{und} \quad f(\boldsymbol{x}) = \infty \quad \textit{sonst.}$$

Dann ist f integrierbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \,.$$

Beweis. Für $l \in \mathbb{N}_0$ sei

$$g_l = \sum_{k=0}^{l} |f_k| \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty] \,.$$

Dann ist $(g_l)_{l\ge 0}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen,

$$(g_l)_{l\ge 0} \to F = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \quad \text{und} \quad (\forall l \in \mathbb{N}_0) \;\; \int_{\mathbb{R}^n} g_l \;=\; \|g_l\|_1 \;\le\; \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 < \infty \,.$$

Nach Satz 12.2 ist F integrierbar, und nach Satz 11.10 ist $N = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid F(\boldsymbol{x}) = \infty\}$ eine Nullmenge. Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N$ ist

$$\sum_{k\ge 0} f_k(\boldsymbol{x}) \;\text{ absolut konvergent,} \quad f(\boldsymbol{x}) = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=0}^{l} f_k(\boldsymbol{x}) \quad \text{und} \quad \Big|\sum_{k=0}^{l} f_k(\boldsymbol{x})\Big| \le F(\boldsymbol{x}) \,.$$

Nach Satz 12.4 ist f integrierbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \;=\; \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{l} f_k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \,. \qquad \square$$

Satz 12.6 (Integration durch Aussschöpfung)**.** *Sei $(D_k)_{k\ge 0}$ eine Folge von Teilmengen in $\mathbb{R}^n$,*

$$(\forall k \in \mathbb{N}_0) \;\; D_k \subset D_{k+1} \,, \quad D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} D_k \quad \textit{und} \quad f \colon D \to \overline{\mathbb{C}} \,.$$

Sei $(\forall k \in \mathbb{N}_0)$ f integrierbar über D_k. Dann ist

$$\|f_D\|_1 = \lim_{k\to\infty} \|f_{D_k}\|_1 \,.$$

Insbesondere gilt: Sind alle D_k integrierbar, so folgt $v(D) = \lim_{k\to\infty} v(D_k)$.
Ist $\|f_D\|_1 < \infty$, so ist f über D integrierbar, und

$$\int_D f = \lim_{k\to\infty} \int_{D_k} f \,.$$

Sind alle D_k integrierbar und ist $v(D) < \infty$, so ist auch D integrierbar.

Beweis. Es ist $(f_{D_k})_{k\ge 0} \to f_D$, $(|f_{D_k}|)_{k\ge 0}$ ist monoton wachsend, und $(|f_{D_k}|)_{k\ge 0} \to |f_D|$, also $|f_{D_k}| \le |f_D|$ für alle $k \ge 0$. Nach Satz 12.2 folgt $(\|f_{D_k}\|_1)_{k\ge 0} \to \|f_D\|_1$, und mit $f = 1_D$ folgt auch $(v(D_k))_{k\ge 0} \to v(D)$. Im Falle $\|f_D\| < \infty$ ist nach Satz 12.4 f_D integrierbar, und

$$\int_D f \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f_D \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_{D_k} \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_{D_k} f \,. \qquad \square$$

12.2. Messbare Mengen und Funktionen

Definition 12.2. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$.

1. Eine Funktion $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ die Funktion f_K integrierbar ist.
2. D heißt *messbar*, wenn 1_D lokal integrierbar ist [$\iff$ für jede kompakte Menge K ist $D \cap K$ integrierbar].

Satz 12.7. *Seien C, $D \subset \mathbb{R}^n$, und sei $(A_k)_{k\geq 0}$ eine Folge messbarer Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.*

1. *D integrierbar $\iff$ D messbar, und $v(D) < \infty$.*
2. *Ist D offen oder abgeschlossen, so ist D messbar.*
3. *Sind C und D messbar, so sind auch die Mengen $\mathbb{R}^n \setminus C$, $C \cap D$, $C \cup D$ und $C \setminus D$ messbar.*
4. *Sei*
$$A = \bigcup_{k\geq 0} A_k \quad \textit{und} \quad B = \bigcap_{k\geq 0} A_k \,.$$
Dann sind A und B messbar, und es gilt:
$$\begin{aligned} v(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} v(A_k)\,, \quad \textit{falls} \quad v(A_i \cap A_j) = 0 \quad \textit{für alle } i,\, j \geq 0 \textit{ mit } i \neq j\,; \\ v(A) &= \lim_{k\to\infty} v(A_k)\,, \quad \textit{falls} \quad (\forall k \geq 0) \quad A_k \subset A_{k+1}\,; \\ v(B) &= \lim_{k\to\infty} v(A_k)\,, \quad \textit{falls} \quad (\forall k \geq 0) \quad A_k \supset A_{k+1} \quad \textit{und} \quad v(A_0) < \infty\,. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Satz 11.19 ist jede kompakte Menge und jede offene und beschränkte Menge integrierbar.

1. Ist D integrierbar, so ist $v(D) < \infty$, und für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist auch $D \cap K$ integrierbar (siehe Satz 11.11). Daher ist D messbar.

Sei nun D messbar und $v(D) < \infty$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $D_k = D \cap [-k, k]^n$. Dann ist D_k integrierbar, $D_k \subset D_{k+1}$, $v(D_k) \leq v(D)$ und
$$D = \bigcup_{k\geq 1} D_k \,.$$
Nach Satz 12.6 (angewandt mit $f = 1_D$) ist D integrierbar.

2. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Ist D abgeschlossen, so ist $D \cap K$ kompakt, also integrierbar. Ist D offen, so ist $K \setminus D$ kompakt, also integrierbar, und daher ist auch $D \cap K = K \setminus (K \setminus D)$ integrierbar nach Satz 11.11.

3. Seien C und D messbar und K kompakt, also $C \cap K$ und $D \cap K$ integrierbar. Nach Satz 11.11 sind auch die Mengen $(\mathbb{R}^n \setminus C) \cap K = K \setminus (C \cap K)$, $C \cap D \cap K = (C \cap K) \cap (D \cap K)$, $(C \cup D) \cap K = (C \cap K) \cup (D \cap K)$ und $(C \setminus D) \cap K = (C \cap K) \setminus (D \cap K)$ integrierbar.

4. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

FALL 1: $(\forall k \geq 0)$ $A_k \subset A_{k+1}$.

Nach Satz 12.6 ist $(v(A_k))_{k\geq 0} \to v(A)$ und $(v(A_k \cap K))_{k\geq 0} \to v(A \cap K)$. Für alle $k \geq 0$ ist $v(A_k \cap K) \leq v(K) < \infty$, und daher ist nach Satz 12.6 auch $A \cap K$ integrierbar.

FALL 2. $(\forall k \geq 0)$ $A_k \supset A_{k+1}$. Dann ist
$$A_0 \setminus B = \bigcup_{k\geq 0} (A_0 \setminus A_k) \quad \text{und} \quad v(A_0 \setminus B) = \lim_{k\to\infty} v(A_0 \setminus A_k)\,,$$

also $B = A_0 \setminus (A_0 \setminus B)$ messbar. Ist $v(A_0) < \infty$, so sind B und alle A_k integrierbar nach 1., $v(A_0 \setminus B) = v(A_0) - v(B)$ und $v(A_0 \setminus A_k) = v(A_0) - v(A_k)$, also

$$v(B) = \lim_{k\to\infty} v(A_k)\,.$$

FALL 3: $(A_k)_{k\ge 0}$ beliebig.
Für $k \ge 0$ sei

$$\widetilde{A}_k = \bigcup_{i=0}^{k} A_i \quad \text{und} \quad \widetilde{B}_k = \bigcap_{i=0}^{k} A_i\,, \quad \text{also} \quad A = \bigcup_{k\ge 0} \widetilde{A}_k \quad \text{und} \quad B = \bigcap_{k\ge 0} \widetilde{B}_k\,.$$

Dann sind alle $\widetilde{A}_k$ und $\widetilde{B}_k$, also auch A und B messbar. Ist $v(A_i \cap A_j) = 0$ für alle $i, j \ge 0$ mit $i \ne j$, so ist

$$(\forall k \ge 0)\ \ v(\widetilde{A}_k) = \sum_{i=0}^{k} v(A_i) \quad \text{und} \quad v(A) = \lim_{k\to\infty} v(\widetilde{A}_k) = \sum_{k=0}^{\infty} v(A_k)\,. \qquad \square$$

Definition 12.3. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt

- *einfach*, wenn
$$f = \sum_{j=1}^{m} c_j 1_{D_j}$$
mit $m \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ und messbaren Mengen $D_1, \ldots, D_m \subset \mathbb{R}^n$.
- *messbar*, wenn es eine Folge einfacher Funktionen $(f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k\ge 0}$ gibt, so dass $(f_k)_{k\ge 0} \to f$.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ heißt *messbar*, wenn es eine Folge einfacher Funktionen $(f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0})_{k\ge 0}$ gibt, so dass $(f_k)_{k\ge 0} \to f$.

Bemerkungen.

1. Jede Treppenfunktion ist einfach, und jede einfache Funktion ist messbar.
2. Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ einfach, so hat f eine Darstellung
$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{C_i}$$
mit paarweise disjunkten messbare Mengen $C_1, \ldots, C_k \subset \mathbb{R}^n$ und $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$. Ist insbesondere $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}_{\ge 0}$, so folgt $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.
Beweis. Sei
$$f = \sum_{j=1}^{m} c_j 1_{D_j}$$
mit $m \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ und messbaren Mengen $D_1, \ldots, D_m \subset \mathbb{R}^n$. Es genügt, zu zeigen:
A. Es gibt paarweise disjunkte messbare Mengen $C_1, \ldots, C_k \subset \mathbb{R}^n$, so dass
$$\bigcup_{j=1}^{m} D_j = \bigcup_{i=1}^{k} C_i \quad \text{und} \quad (\forall i \in \{1, \ldots, k\})\ (\exists j \in \{1, \ldots, m\})\ \ C_i \subset D_j\,.$$

Mit **A** folgt nämlich

$$f \;=\; \sum_{j=1}^{m} c_j 1_{D_j} \;=\; \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ D_j\supset C_i}}^{m} c_j\Big)\, 1_{C_i}\,.$$

Wir beweisen **A** mittels Induktion nach m.

Sei also $m \geq 2$ und $D_1 \cup \ldots \cup D_{m-1} = C_1' \cup \ldots \cup C_l'$ mit paarweise disjunkten messbaren Mengen $C_1', \ldots, C_l' \subset \mathbb{R}^n$, so dass $(\forall i \in \{1,\ldots,l\})\;(\exists j \in \{1,\ldots,m-1\})\;\; C_i' \subset D_j$. Dann ist $D_1 \cup \ldots \cup D_m = (C_1' \setminus D_m) \cup \ldots \cup (C_l' \setminus D_m) \cup (D_m \setminus D) \cup (C_1' \cap D_1) \cup \ldots \cup (C_l' \cap D_m)$ die gewünschte Zerlegung.. □

3. Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ einfach und $D \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar, so ist f_D integrierbar.

Satz 12.8.

1. *Seien* $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *messbare Funktionen,* $\lambda \in \mathbb{C}$ *und* $p \in \mathbb{R}_{>0}$. *Dann sind auch die Funktionen* $\Re f$, $\Im f$, $\overline{f}$, $|f|^p$, λf, $f+g$ *und* fg *messbar.*
2. *Seien* $f, g\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ *messbare Funktionen und* $\lambda, p \in \mathbb{R}_{>0}$. *Dann ist auch die Funktionen* $f+g$, λf, f^p *und* $\max\{f,g\}\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ *messbar.*
3. *Sei* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, *und sei* $f = (f_1 - f_2) + \mathsf{i}(f_3 - f_4)$ *mit* $f_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *die kanonische Zerlegung von* f. *Dann gilt:*

$$f \quad \textit{messbar} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall j \in \{1,\ldots,4\}\;\; f_j \quad \textit{messbar}.$$

Beweis. 1. Seien $(\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k\geq 0}$ und $(\psi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k\geq 0}$ Folgen einfacher Funktionen mit $(\varphi_k)_{k\geq 0} \to f$ und $(\psi_k)_{k\geq 0} \to g$. Für $k \geq 0$ sind dann auch die Funktionen $\Re\varphi_k$, $\Im\varphi_k$, $\overline{\varphi}_k$, $|\varphi_k|^p$, $\lambda\varphi_k$, $\varphi_k + \psi_k$ und $\varphi_k\psi_k$ einfach, $(\Re\varphi_k)_{k\geq 0} \to \Re f$, $(\Im\varphi_k)_{k\geq 0} \to \Im f$, $(\overline{\varphi}_k)_{k\geq 0} \to \overline{f}$, $(|\varphi_k|^p)_{k\geq 0} \to |f|^p$, $(\lambda\varphi_k)_{k\geq 0} \to \lambda f$, $(\varphi_k + \psi_k)_{k\geq 0} \to f + g$ und $(\varphi_k\psi_k)_{k\geq 0} \to fg$.

2. beweist man genauso, und 3. folgt unmittelbar aus 1. und 2. □

Definition 12.4. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ und $f = (f_1 - f_2) + \mathsf{i}(f_3 - f_4)$ die kanonische Zerlegung von f mit Funktionen $f_j\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$. f heißt *messbar*, wenn die Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 alle messbar sind.

Ist entweder $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{C}$ oder $f(\mathbb{R}^n) \subset [0,\infty]$, so ist auf Grund von Satz 12.8 diese Definition mit der bisherigen konsistent.

Satz 12.9. *Seien* $f, g\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$.

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   (a) f *ist messbar.*
   (b) *Für alle* $c \in \mathbb{R}_{>0}$ *sind die Mengen* $f^{-1}([c,\infty])$ *und* $f^{-1}([0,c])$ *messbar.*
   (c) *Für jedes Intervall* $I \subset [0,\infty]$ *ist* $f^{-1}(I)$ *messbar.*
   (d) *Es gibt eine monoton wachsende Folge* $(\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0})_{k\geq 0}$ *(integrierbarer) einfacher Funktionen mit* $(\varphi_k)_{k\geq 0} \to f$.
2. *Sei* $(f_k\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty])_{k\geq 0}$ *eine Folge messbarer Funktionen mit* $(f_k)_{k\geq 0} \to f$. *Dann ist auch* f *messbar.*

3. *Genau dann ist f messbar, wenn für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ die Funktion $f\,\mathbf{1}_K$ messbar ist.*
4. *Sei f messbar und $N = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})\}$ eine Nullmenge. Dann ist auch g messbar.*

Beweis. Wir zeigen zuerst:

A. Sei $(f_k \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty])_{k\ge 0}$ eine Folge von Funktionen, so dass für alle $k \ge 0$ und alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$ die Mengen $f_k^{-1}([c,\infty])$ und $f_k^{-1}([0,c])$ messbar sind. Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ und $(f_k)_{k\ge 0} \to f$. Dann sind für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$ auch die Mengen $f^{-1}([c,\infty])$ und $f^{-1}([0,c])$ messbar.

Beweis von **A**. Sei $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$f(\boldsymbol{x}) \ge c \iff (\forall l \in \mathbb{N})\ (\exists k \in \mathbb{N}_0)\ (\forall j \ge k)\ \ f_j(\boldsymbol{x}) \ge c - \frac{1}{l}\,,$$

also

$$f^{-1}\big([c,\infty]\big) \;=\; \bigcap_{l\in\mathbb{N}}\ \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}\ \bigcap_{j\ge k} f_j^{-1}\Big(\Big[c - \frac{1}{l},\,\infty\Big]\Big)\,, \quad \text{und diese Menge ist messbar.}$$

In gleicher Weise folgt

$$f^{-1}\big([0,c]\big) \;=\; \bigcap_{l\in\mathbb{N}}\ \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}\ \bigcap_{j\ge k} f_j^{-1}\Big(\Big[0,\, c + \frac{1}{l}\Big]\Big)\,. \quad \square$$

(a) $\Rightarrow$ (b) Sei zuerst $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ einfach. Dann ist

$$f = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{1}_{D_j}$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}_{>0}$ und paarweise disjunkten messbaren Mengen $D_1, \ldots, D_m \subset \mathbb{R}^n$. Für $c \in \mathbb{R}_{>0}$ ist dann

$$f^{-1}\big([c,\infty]\big) = \bigcup_{\substack{j=1\\ c_j \ge c}} D_j \quad \text{und} \quad f^{-1}\big([0,c]\big) = \bigcup_{\substack{j=1\\ c_j \le c}} D_j\,,$$

und diese Mengen sind messbar.

Ist $f \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ messbar, so ist f Limes einer Folge einfacher Funktionen, und die Behauptung folgt mittels **A.**

(b) $\Rightarrow$ (c) Man beachte, dass abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte sowie Komplemente von messbaren Mengen wieder messbar sind. Für $0 \le a < c < \infty$ ist

$$f^{-1}\big([a,c)\big) = f^{-1}\big([a,\infty]\big) \setminus f^{-1}\big([c,\infty]\big)\,, \quad f^{-1}\big((a,c)\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\Big(\Big[a + \frac{1}{n}, c\Big)\Big)\,,$$

$$f^{-1}\big(\{a\}\big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\Big(\Big[a,\, a + \frac{1}{n}\Big)\Big)\,, \quad f^{-1}\big((a,c]\big) = f^{-1}\big([0,c]\big) \setminus f^{-1}\big([0,a]\big)\,,$$

$$f^{-1}\big([a,c]\big) = f^{-1}\big([0,c]\big) \setminus f^{-1}\big([0,a)\big)\,, \quad f^{-1}\big((c,\infty]\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\Big(\Big[c + \frac{1}{n}, \infty\Big]\Big)\,,$$

$$f^{-1}\big(\{\infty\}\big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\big((n,\infty]\big) \quad \text{und} \quad f^{-1}\big([(c,\infty)\big) = f^{-1}\big([(c,\infty]\big) \setminus f^{-1}\big(\{\infty\}\big)\,.$$

Daher ist $f^{-1}(I)$ für alle Intervalle $I \subset [0,\infty]$ messbar.

(c) $\Rightarrow$ (d) Für $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1,\dots,2^k k\}$ sei $B_k = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \geq k\}$,

$$A_{j,k} = \Big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \frac{j-1}{2^k} \leq f(\boldsymbol{x}) < \frac{j}{2^k}\Big\} \quad \text{und} \quad f_k = \sum_{j=1}^{2^k k} \frac{j-1}{2^k} 1_{A_{j,k}} \;+\; k\, 1_{B_k}\,.$$

Dann ist $(f_k)_{k\geq 0}$ eine monoton wachsende Folge einfacher Funktionen mit $(f_k)_{k\geq 0} \to f$, und $\big(f_k\, 1_{[-k,k]^n}\big)_{k\geq 1}$ ist eine monoton wachsende Folge integrierbarer einfacher Funktionen mit $\big(f_k\, 1_{[-k,k]^n}\big)_{k\geq 1} \to f$.

(d) $\Rightarrow$ (a) Nach Definition.

2. Nach **A** und 1.

3. Ist f messbar und K kompakt, so ist auch $f\, 1_K$ messbar. Ist $f\, 1_K$ für jede kompakte Menge K messbar, so ist wegen $\big(f\, 1_{[-k,k]^n}\big)_{k\geq 1} \to f$ auch f messbar.

4. Sei $I \subset [0,\infty]$ eine Intervall. Dann ist $f^{-1}(I)$ messbar, also ist auch $g^{-1}(I)\backslash N = f^{-1}(I)\backslash N$ messbar, $g^{-1}(I) = \big(g^{-1}(I) \setminus N\big) \cup \big(g^{-1}(I) \cap N\big)$, und $g^{-1}(I) \cap N$ ist eine Nullmenge, also ebenfalls messbar. Daher ist $g^{-1}(I)$ messbar, also g messbar nach 1. $\square$

Satz 12.10. *Für eine Funktion* $f \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *sind äquivalent*:

(a) f *ist integrierbar.*

(b) f *ist messbar, und* $\|f\|_1 < \infty$.

(c) f *ist lokal integrierbar, und* $\|f\|_1 < \infty$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (c) Ist f integrierbar und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist auch $f_K = f 1_K$ integrierbar.

(c) $\Rightarrow$ (a) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $D_k = [-k,k]^n$. Dann ist f über D_k integrierbar, und nach Satz 12.6 ist f integrierbar.

Sei nun $f = (f_1 - f_2) + \mathrm{i}(f_3 - f_4)$ die kanonische Zerlegung von f. Sowohl (a) als auch (b) gelten für f genau dann, wenn sie für alle f_j gelten. Daher genügt es, die Äquivalenz von (a) und (b) für eine Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ zu beweisen.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ integrierbar. Dann gibt es eine Folge $(\varphi_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k\geq 0}$ von Treppenfunktionen mit $(\|f - \varphi_k\|_1)_{k\geq 0} \to 0$. Nach Satz 12.1 gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ und eine Teilfolge $(\varphi_k)_{k\in T}$ von $(\varphi_k)_{k\geq 0}$, so dass $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N)$ $(\varphi_k(\boldsymbol{x}))_{k\in T} \to f(\boldsymbol{x}) \neq \infty$. Für $k \in T$ sei $\psi_k \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ definiert durch

$$\psi_k(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} |\varphi_k(\boldsymbol{x})|\,, & \text{falls} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N\,, \\ f(\boldsymbol{x})\,, & \text{falls} \quad \boldsymbol{x} \in N\,. \end{cases}$$

Nach Satz 12.9.3 ist $(\psi_k)_{k\in T}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $(\psi_k)_{k\geq 0} \to f$, und daher ist f messbar.

(b) $\Rightarrow$ (a) Nach Satz 12.9 gibt es eine monoton wachsende Folge integrierbarer einfacher Funktionen $(\varphi_k \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $(\varphi_k)_{k\geq 0} \to f$, und für alle $k \geq 0$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = \|\varphi_k\|_1 \leq \|f\|_1 < \infty\,.$$

Nach Satz 12.2 ist f integrierbar. $\square$

12.3. Uneigentliche Integrale und Parameterintegrale

Satz 12.11. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a = \inf(I)$, $b = \sup(I)$ und $f\colon I \to \overline{\mathbb{C}}$ messbar. Dann ist*

$$\|f_I\|_1 = \int_a^b |f| = \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^b |f| = \lim_{\beta \to b-} \int_a^\beta |f|\,.$$

Im Falle $\|f_I\|_1 < \infty$ ist f über I integrierbar, und

$$\int_a^b f = \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^b f = \lim_{\beta \to b-} \int_a^\beta f\,,$$

Beweis. Sei $F\colon I \to [0,\infty]$ definiert durch

$$F(\beta) = \int_a^\beta |f| \in [0,\infty]\,. \quad \text{Dann ist} \quad (\forall \beta \in I) \;\; F(\beta) = \|f_{(a,\beta)}\|_1 \le \|f_I\|_1 \in [0,\infty]\,.$$

F ist monoton wachsend, und nach Satz 4.8 existiert

$$L = \lim_{\beta \to b-} F(\beta) = \lim_{\beta \to b-} \int_a^\beta |f|\,, \quad \text{und es ist} \quad L \le \|f\|_1\,.$$

Im Falle $L = \infty$ ist nichts zu zeigen. Sei also $L < \infty$ und $(\beta_k)_{k\ge 0}$ eine monoton wachsende Folge in $I \setminus \{b\}$ mit $(\beta_k)_{k\ge 0} \to b$. Dann ist

$$(a,b) = \bigcup_{k\ge 0} (a,\beta_k)\,,$$

und mit Satz 12.6 folgt

$$\int_I |f| = \int_a^b |f| = \lim_{k\to\infty} \int_a^{\beta_k} |f| = L\,, \quad \text{und} \quad \int_I f = \int_a^b f = \lim_{k\to\infty} \int_a^{\beta_k} f\,.$$

Den Limes an der unteren Grenze behandelt man genauso. □

Definition 12.5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \overline{\mathbb{C}}$ lokal integrierbar und $J \in \mathbb{C}$. f heißt *uneigentlich integrierbar* und J das (uneigentliche) Integral von f über I, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

- $I = [a,b)$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ und
$$J = \lim_{\beta \to b-} \int_a^\beta f\,.$$
- $I = (a,b]$ mit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und
$$J = \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^b f\,.$$
- $I = (a,b)$ mit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ und für ein [und dann für alle] $c \in (a,b)$ ist
$$J = \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^c f \;+\; \lim_{\beta \to b-} \int_c^\beta f\,.$$

Ist $\inf(I) = a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\sup(I) = b \in \overline{\mathbb{R}}$ und ist f über I (uneigentlich) integrierbar mit Integral $J \in \mathbb{C}$, so schreibt man

$$J = \int_a^b f\,.$$

Im Falle $I \neq [a, b]$ sagt man auch, das Integral von f über I konvergiert. Ist

$$\int_a^b |f| < \infty\,,$$

so sagt man, das Integral von f über I konvergiert absolut.

Man sagt im ersten Falle, das Integral sei an der oberen Grenze uneigentlich, im zweiten Falle, das Integral sei an der unteren Grenze uneigentlich, und im dritten Falle, das Integral sei an beiden Grenzen uneigentlich.

Nach Satz 12.11 sind die obigen Definitionen im Falle $f(I) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit Definition 11.5 konsistent, jedes absolut konvergente uneigentliche Integral konvergiert (und dann stimmt das uneigentliche Integral mit dem gewöhnlichen Legesgue'schen Integral überein).

Beispiel 1.

Sei $c \in \mathbb{R}_{>0}$, $s \in \mathbb{C}$ und $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) = x^s \mathsf{e}^{-cx} = \mathsf{e}^{s\log x - cx}$. f ist stetig, also lokal integrierbar, und wir betrachten das an der oberen Grenze uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty x^s \mathsf{e}^{-cx}\, dx\,.$$

Sei zuerst $s = 0$. Für $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ ist

$$\int_0^\beta \mathsf{e}^{-cx}\, dx \;=\; \Big[-\frac{1}{c}\mathsf{e}^{-cx}\Big]_0^\beta \;=\; -\frac{1}{c}\Big[\mathsf{e}^{-c\beta} - 1\Big] \quad \text{und daher} \quad \lim_{\beta\to\infty} \int_0^\beta \mathsf{e}^{-cx} dx \;=\; \frac{1}{c}\,.$$

Folglich ist e^{-cx} integrierbar über $[0, \infty)$, und

$$\int_0^\infty \mathsf{e}^{-cx}\, dx = \frac{1}{c}\,.$$

Sei nun $s \in \mathbb{C}$ und $\sigma = \Re s$. Wegen

$$\lim_{x\to\infty} x^\sigma \mathsf{e}^{-\frac{cx}{2}} = 0 \quad \text{folgt:} \quad (\exists C \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 1})\ \ x^\sigma \mathsf{e}^{-\frac{cx}{2}} \leq C\,, \quad \text{also} \quad |x^s \mathsf{e}^{-cx}| \leq C\mathsf{e}^{-\frac{cx}{2}}\,.$$

Da $\mathsf{e}^{-\frac{cx}{2}}$ über $[0, \infty)$ integrierbar ist, ist auch $x^s \mathsf{e}^{-cx}$ über $[0, \infty)$ integrierbar.

Beispiel 2.

Sei $s \in \mathbb{C}$ und $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) = x^s = \mathsf{e}^{s\log x}$. f ist stetig, also lokal integrierbar, und das Integral

$$\int_0^\infty x^s\, dx \quad \text{ist an beiden Grenzen uneigentlich.}$$

Für $\alpha \in (0, 1]$ ist

$$\int_\alpha^1 x^s\, dx \;=\; \Big[\frac{x^{s+1}}{s+1}\Big]_\alpha^1 \;=\; \frac{1 - \alpha^{s+1}}{s+1}\,, \quad \text{falls } s \neq -1\,, \quad \text{und} \quad \int_\alpha^1 x^{-1}\, dx \;=\; \big[\log x\big]_\alpha^1 = -\log\alpha\,.$$

Wegen $|\alpha^{s+1}| = \alpha^{\Re s + 1}$ existiert

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_\alpha^1 x^s\, dx$$

genau dann in $\mathbb{C}$, wenn $\Re s > -1$, und dann ist

$$\int_0^1 x^s\,dx \;=\; \frac{1}{s+1} \quad \text{und} \quad \int_0^1 |x^s|\,dx \;=\; \frac{1}{\Re s+1} \in \mathbb{R}_{>0}\,.$$

Insbesondere ist für $\Re s > -1$ die Funktion x^s integrierbar über $(0,1]$.

Für $\beta \in [1,\infty)$ ist

$$\int_1^\beta x^s\,dx \;=\; \Big[\frac{x^{s+1}}{s+1}\Big]_1^\beta \;=\; \frac{\beta^{s+1}-1}{s+1}\,, \quad \text{falls } s \neq -1\,, \quad \text{und} \qquad \int_1^\beta x^{-1}\,dx \;=\; \big[\log x\big]_1^\beta \;=\; \log\beta\,.$$

Daher existiert

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta x^s\,dx$$

genau dann in $\mathbb{C}$, wenn $\Re s < -1$, und dann ist

$$\int_1^\infty x^s\,dx \;=\; \frac{-1}{s+1} \quad \text{und} \quad \int_1^\infty |x^s|\,dx \;=\; \frac{-1}{\Re s+1} \in \mathbb{R}_{>0}\,.$$

Insbesondere ist für $\Re s < -1$ die Funktion x^s integrierbar über $[1,\infty)$, und für kein $s \in \mathbb{C}$ ist x^s uneigentlich integrierbar über $(0,\infty)$.

Beispiel 3: Die Euler'sche Gammafunktion.

Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re s = \sigma > 0$ betrachten wir das an beiden Grenzen uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x^{s-1}\mathsf{e}^{-x}\,dx\,.$$

Für $x \in (0,1]$ ist $|x^{s-1}\mathsf{e}^{-x}| = x^{\sigma-1}\mathsf{e}^{-x} \le x^{\sigma-1}$, nach Beispiel 2. ist $x^{\sigma-1}$ integrierbar über $(0,1]$, und daher ist auch $x^{s-1}\mathsf{e}^{-x}$ integrierbar über $(0,1]$. Nach Beispiel 1. ist $x^{s-1}\mathsf{e}^{-x}$ integrierbar über $[1,\infty)$, und daher ist $x^{s-1}\mathsf{e}^{-x}$ integrierbar über $(0,\infty)$. Die Funktion

$$\Gamma\colon \{s \in \mathbb{C} \mid \Re s > 0\} \to \mathbb{C}\,, \quad \text{definiert durch} \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\mathsf{e}^{-x}\,dx\,,$$

heißt *Euler'sche Gammafunktion*. Wir werden zeigen:

- **a.** Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re s > 0$ ist $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
- **b.** Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\Gamma(k+1) = k!$.
- **c.** Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re s > 0$ ist

$$\Gamma(s) \;=\; \lim_{k\to\infty}\frac{k!k^s}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+k)}\,.$$

- **d.** Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re s \in (0,1)$ ist

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) \;=\; \frac{\pi}{\sin\pi s}\,.$$

Beweis von **a.** Für $0 < \alpha < \beta < \infty$ ist

$$\int_\alpha^\beta x^{s-1}\mathsf{e}^{-x}\,dx \;=\; \Big[\frac{x^s}{s}\mathsf{e}^{-x}\Big]_\alpha^\beta \;+\; \frac{1}{s}\int_\alpha^\beta x^s\mathsf{e}^{-x}\,dx\,.$$

Für $\alpha \to 0$ und $\beta \to \infty$ folgt

$$\Gamma(s) \;=\; \int_0^\infty x^{s-1}\mathsf{e}^{-x}\,dx \;=\; \frac{1}{s}\Gamma(s+1)\,.$$

Beweis von **b.** Es ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathsf{e}^{-x}\,dx \;=\; \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to\infty}} \Big[-\mathsf{e}^{-x}\Big]_\alpha^\beta \;=\; 1 \;=\; 0!\,,$$

und die Behauptung folgt aus **a.** mittels Induktion nach k.

Beweis von **c.** Wir zeigen zuerst: Für $k,\, j \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\int_0^k (1-\frac{x}{k})^j\, x^{s-1}\,dx \;=\; \frac{j!k^s}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+j)}\,.$$

Induktion nach j. Für $j=0$ ist die Behauptung offensichtlich.

$j \geq 0,\;\; j \to j+1:$ Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^k \Big(1-\frac{x}{k}\Big)^{j+1} x^{s-1}\,dx \;&=\; \Big[(1-\frac{x}{k})^{j+1}\frac{x^s}{s}\Big]_0^k \;+\; \int_0^k \frac{j+1}{k}\Big(1-\frac{x}{k}\Big)^j \frac{x^s}{s}\,dx\\ &=\; \frac{j+1}{sk}\int_0^k \Big(1-\frac{x}{k}\Big)^j x^s\,dx \;=\; \frac{j+1}{sk}\,\frac{j!k^{s+1}}{(s+1)(s+2)\cdot\ldots\cdot(s+j+1)}\\ &=\; \frac{(j+1)!k^s}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+j+1)}\,.\end{aligned}$$

Nach Satz 3.13 ist

$$\Big(\Big(1-\frac{x}{k}\Big)^k\Big)_{k\geq\lfloor x\rfloor+1} \quad \text{monoton wachsend, und} \quad \lim_{k\to\infty}\Big(1-\frac{x}{k}\Big)^k = \mathsf{e}^{-x}\,.$$

Sei nun $f_k\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f_k(x) = \Big(1-\frac{x}{k}\Big)^k x^{s-1}\,,\quad \text{falls } x \leq k\,, \quad \text{und} \quad f_k(x) = 0\,,\quad \text{falls } x > k\,.$$

Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) \;=\; \mathsf{e}^{-x}x^{s-1}\,, \quad \text{und} \quad (\forall k \geq \lfloor x\rfloor + 1)\;\; |f_k(x)| \leq \mathsf{e}^{-x}x^{\Re s-1}\,.$$

Nach Satz 12.4 folgt nun

$$\begin{aligned}\Gamma(s) \;&=\; \int_0^\infty \mathsf{e}^{-x}x^{s-1}\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_0^\infty f_k(x)\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_0^k \Big(1-\frac{x}{k}\Big)^k x^{s-1}\,dx\\ &=\; \lim_{k\to\infty}\frac{k!k^s}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+k)}\,.\end{aligned}$$

Beweis von **d.** Nach **c.** ist

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) \;&=\; \lim_{k\to\infty}\frac{k!^2k}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+k)(1-s)(2-s)\cdot\ldots\cdot(k+1-s)}\\ &=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{s\big(1-\frac{s^2}{1^2}\big)\big(1-\frac{s^2}{2^2}\big)\cdot\ldots\cdot\big(1-\frac{s^2}{k^2}\big)}\,\frac{k}{k+1-s}\\ &=\; \frac{\pi}{\sin\pi s} \quad \text{nach Satz 7.15.} \quad \square\end{aligned}$$

Beispiel 4: Das Gauß'sche Fehlerintegral.

Das an beiden Seiten uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^\infty \mathsf{e}^{-x^2}\,dx$$

heißt *Gaußsches Fehlerintegral*. Die Substitution $t = x^2$ liefert für $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\int_0^\beta \mathsf{e}^{-x^2}\,dx \;=\; \int_0^{\beta^2} \mathsf{e}^{-t}\,\frac{dt}{2\sqrt{t}} \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{\beta^2} t^{-\frac{1}{2}}\mathsf{e}^{-t}\,dt\,,$$

und

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta \mathsf{e}^{-x^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\mathsf{e}^{-t}\,dt \;=\; \frac{1}{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\,.$$

Daher ist e^{-x^2} integrierbar über $[0,\infty)$, und wegen

$$\int_{-\beta}^0 \mathsf{e}^{-x^2}\,dx \;=\; \int_0^\beta \mathsf{e}^{-x^2}\,dx$$

ist e^{-x^2} auch integrierbar über $(-\infty,0]$. Damit folgt

$$\int_{-\infty}^\infty \mathsf{e}^{-x^2}\,dx \;=\; 2\int_0^\infty \mathsf{e}^{-x^2}dx \;=\; \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\,.$$

Nach Beispiel 3 ist

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 \;=\; \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} \;=\; \pi\,, \quad \text{und daher folgt} \quad \int_{-\infty}^\infty \mathsf{e}^{-x^2}\,dx \;=\; \sqrt{\pi}\,.$$

Beispiel 5.
Sei $f\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) \;=\; \frac{\sin x}{x}\,, \quad \text{falls} \quad x\neq 0\,, \quad \text{und} \quad f(0)=1\,.$$

f ist stetig, also lokal integrierbar über $[0,\infty)$. Wir zeigen:

f ist nicht integrierbar über $[0,\infty)$, aber uneigentlich integrierbar, und $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}\,.$

Für $k\in\mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx \;&\geq\; \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\,dx \;=\; \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx\\ &=\; \frac{1}{(k+1)\pi}\big[-\cos x\big]_0^\pi \;=\; \frac{2}{(k+1)\pi}\,,\end{aligned}$$

und daher

$$\int_0^{(k+1)\pi}\Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx \;\geq\; \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^k\frac{1}{j+1}\,, \quad \text{also} \quad \int_0^\infty\Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_0^{(k+1)\pi}\Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx \;=\; \infty\,.$$

Folglich ist f nicht über $[0,\infty)$ integrierbar. Für $\beta\in\mathbb{R}_{>1}$ ist

$$\int_1^\beta \frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \Big[\frac{-\cos x}{x}\Big]_1^\beta \;-\; \int_1^\beta\frac{\cos x}{x^2}\,dx \;=\; \frac{-\cos\beta}{\beta} \;+\; \cos 1 \;-\; \int_1^\beta\frac{\cos x}{x^2}dx\,,$$

also

$$\int_0^\beta \frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx \;+\; \cos 1 \;-\; \frac{\cos\beta}{\beta} \;-\; \int_1^\beta\frac{\cos x}{x^2}\,dx\,.$$

Wegen

$$\int_1^\infty\Big|\frac{\cos x}{x^2}\Big|\,dx \;\leq\; \int_1^\infty\frac{dx}{x^2} \;<\; \infty \quad \text{(siehe Beispiel 1)}$$

ist

$$\frac{\cos x}{x^2} \quad \text{integrierbar über } [1,\infty)\text{, und daher existiert} \quad \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{\cos x}{x^2}\,dx\,.$$

Wegen

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{\cos\beta}{\beta} = 0 \quad \text{existiert} \quad \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta \frac{\sin x}{x}\,dx\,, \quad \text{also das uneigentliche Integral} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$

Um es zu berechnen, genügt es, zu zeigen:

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{(k+\frac12)\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}\,.$$

Sei $k\in\mathbb{N}$ und $D_k\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definiert durch

$$D_k(x) \;=\; \sum_{\nu=-k}^{k}\mathsf{e}^{i\nu x} \;=\; 1+2\sum_{\nu=1}^{k}\sin\nu x\,.$$

Für $x\notin\pi\mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned} D_k(x) \;&=\; \mathsf{e}^{-ikx}\sum_{\nu=0}^{2k}\mathsf{e}^{i\nu x} \;=\; \mathsf{e}^{-ikx}\,\frac{\mathsf{e}^{(2k+1)ix}-1}{\mathsf{e}^{ix}-1} = \frac{\mathsf{e}^{(k+1)ix}-\mathsf{e}^{-ikx}}{\mathsf{e}^{ix}-1}\,\frac{\mathsf{e}^{-\frac{ix}{2}}}{\mathsf{e}^{-\frac{ix}{2}}}\\ &=\; \frac{\mathsf{e}^{(k+\frac12)ix}-\mathsf{e}^{-(k+\frac12)ix}}{\mathsf{e}^{\frac{ix}{2}}-\mathsf{e}^{-\frac{ix}{2}}} \;=\; \frac{\sin\bigl(k+\frac12\bigr)x}{\sin\frac{x}{2}}\,, \end{aligned}$$

und für $m\in\mathbb{Z}$ ist

$$D_k(m\pi) \;=\; 1+2k \;=\; \lim_{x\to m\pi}\frac{\sin(k+\frac12)x}{\sin\frac{x}{2}}\,.$$

Es folgt

$$\int_0^\pi \frac{\sin\bigl(k+\frac12\bigr)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx \;=\; \int_0^\pi D_k(x)\,dx \;=\; \pi\,.$$

Sei nun $h\colon(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) \;=\; \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \;-\; \frac{2}{x}\,, \quad \text{falls} \quad x\neq 0\,, \quad \text{und} \quad h(0)=0\,.$$

In einer Umgebung von 0 ist

$$h(x) \;=\; \frac{x-2\sin\frac{x}{2}}{x\sin\frac{x}{2}} \;=\; \frac{x-2\Bigl[\frac{x}{2}-\frac{1}{3!}\bigl(\frac{x}{2}\bigr)^3+-\dots\Bigr]}{x\Bigl[\frac{x}{2}-\frac{1}{3!}\bigl(\frac{x}{2}\bigr)^3+-\dots\Bigr]} \;=\; \frac{x^4P(x)}{x^2Q(x)}$$

mit Potenzreihen $P(x)$ und $Q(x)$, so dass $P(0)Q(0)\neq 0$. Daher ist h analytisch, und für $k\in\mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin(k+\frac12)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx \;-\; \int_0^\pi\frac{\sin(k+\frac12)x}{x}\,dx \;&=\; \frac12\int_0^\pi h(x)\sin\Bigl(k+\frac12\Bigr)x\,dx\\ &=\; \Bigl[\frac{1}{k+\frac12}\cos\Bigl(k+\frac12\Bigr)x\Bigr]_0^\pi \;-\; \frac{1}{k+\frac12}\int_0^\pi h'(x)\cos\Bigl(k+\frac12\Bigr)x\,dx\\ &=\; \frac{1}{k+\frac12}\int_0^\pi h'(x)\cos\Bigl(k+\frac12\Bigr)x\,dx\,. \end{aligned}$$

Wegen

$$\Big|\int_0^\pi h'(x)\cos\big(k+\frac{1}{2}\big)x\,dx\Big| \;\le\; \int_0^\pi |h'(x)|\,dx \quad \text{folgt} \quad \lim_{k\to\infty}\int_0^\pi h(x)\sin\Big(k+\frac{1}{2}\Big)x\,dx = 0\,.$$

Damit erhalten wir

$$\int_0^{(k+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \int_0^\pi \frac{\sin\big(k+\frac{1}{2}\big)x}{x}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}dx} \;-\; \frac{1}{2}\int_0^\pi h(x)\sin\Big(k+\frac{1}{2}\Big)x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \;-\; \frac{1}{2}\int_0^\pi h(x)\sin\Big(k+\frac{1}{2}\Big)x\,dx \;\to\; \frac{\pi}{2} \quad \text{für}\;\; k\to\infty\,. \quad \square$$

Satz 12.12 (Parameterintegrale)**.** *Sei X ein normierter Raum, $E\subset X$, $a\in E$, $\emptyset\ne D\subset\mathbb{R}^n$, $N\subset\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, $g\colon D\to[0,\infty]$ mit $\|g\|_1<\infty$ und $f\colon E\times D\to\mathbb{C}$. Für jedes $z\in E$ sei $f(z,\cdot)\colon D\to\mathbb{C}$ integrierbar (über D), und $F\colon E\to\mathbb{C}$ sei definiert durch*

$$F(z) \;=\; \int_D f(z,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,.$$

1. *Sei $c\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$. Für alle $\boldsymbol{x}\in D\setminus N)$ sei $|f(\cdot,\boldsymbol{x})|\le g(\boldsymbol{x})$ und*
$$\lim_{z\to a} f(z,\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x})\,.$$
Dann ist c integrierbar, und
$$\lim_{z\to a} F(z) = \int_D c\,.$$
Insbesondere gilt: Ist $(\forall\boldsymbol{x}\in D\setminus N)$ $f(\cdot,\boldsymbol{x})$ stetig in a, so ist auch F stetig in a.
2. *Sei $X=\mathbb{C}$ und E konvex. Für alle $\boldsymbol{x}\in D\setminus N$ sei $f(\cdot,\boldsymbol{x})\colon E\to\mathbb{C}$ differenzierbar mit Ableitung $f'(\cdot,\boldsymbol{x})$, so dass $|f'(\cdot,\boldsymbol{x})|\le g(\boldsymbol{x})$. Dann ist F differenzierbar in a, $f'(a,\cdot)$ ist integrierbar über D, und*
$$F'(a) \;=\; \int_D f'(a,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,.$$

Beweis. 1. Sei $(z_k)_{k\ge0}$ eine Folge in $E\setminus\{a\}$ mit $(z_k)_{k\ge0}\to a$. Für $\boldsymbol{x}\in D\setminus N$ ist dann $(f(z_k,\boldsymbol{x}))_{k\ge0}\to c(\boldsymbol{x})$ und $|f(z_k,\boldsymbol{x})|\le g(\boldsymbol{x})$. Nach Satz 12.4 ist daher c integrierbar, und

$$\int_D c \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_D f(z_k,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} F(z_k)\,.$$

Die Aussage über die Stetigkeit folgt mit $c=f(\cdot,a)$.

2. Für $z\in E$ und $\boldsymbol{x}\in D\setminus N$ sei $\varphi\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ definiert durch $\varphi(t)=f\big(a+t(z-a),\boldsymbol{x}\big)$. Dann ist φ differenzierbar, und nach Satz 7.8 folgt (für $\boldsymbol{x}\in D\setminus N$)

$$|f(z,\boldsymbol{x})-f(a,\boldsymbol{x})| = |\varphi(1)-\varphi(0)| \le \|\varphi'\|_{[0,1]} = \sup\big\{|f'(w,\boldsymbol{x})(z-a)| \;\big|\; w\in[a,z]\big\} \le |z-a|g(\boldsymbol{x})\,,$$

also

$$f'(a,\boldsymbol{x}) = \lim_{z\to a}\frac{1}{z-a}\big[f(z,\boldsymbol{x})-f(a,\boldsymbol{x})\big] \quad \text{und} \quad \Big|\frac{1}{z-a}\big[f(z,\boldsymbol{x})-f(a,\boldsymbol{x})\big]\Big| \le g(\boldsymbol{x})\,.$$

Nach 1. folgt nun: $f'(a,\cdot)$ ist integrierbar, und

$$\int_D f'(a,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \;=\; \lim_{z\to a}\int_D \frac{1}{z-a}\big[f(z,\boldsymbol{x})-f(a,\boldsymbol{x})\big]\,d\boldsymbol{x} \;=\; \lim_{z\to a}\frac{1}{z-a}\big[F(z)-F(a)\big]\,. \qquad \square$$

Beispiel:
Sei $D = (0,\infty)$, $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\}$ und $f(z,x) = x^{z-1}\mathsf{e}^{-x} = \mathsf{e}^{(z-1)\log x - x}$. Dann ist die Gammafunktion

$$\Gamma\colon E \to \mathbb{C} \quad \text{gegeben durch} \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty f(z,x)\,dx\,.$$

Wir zeigen: Γ ist eine C^∞-Funktion, und

$$(\forall m \in \mathbb{N}_0)\ (\forall z \in E)\ \ \Gamma^{(m)}(z) = \int_0^\infty (\log x)^m x^{z-1}\mathsf{e}^{-x}\,dx\,.$$

Für α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ sei $E_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \Re z < \beta\}$. Es genügt, zu zeigen:
Für alle α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < \beta$ und $m \in \mathbb{N}_0$ ist $\Gamma \,|\, E_{\alpha,\beta}$ m-mal differenzierbar, und für alle $z \in E_{\alpha,\beta}$ hat $\Gamma^{(m)}(z)$ die angegebene Integraldarstellung.
Seien α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < \beta$. Wir zeigen:

A. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es eine integrierbare Funktion $g_m\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass

$$(\forall z \in E_{\alpha,\beta})\ (\forall x \in (0,\infty))\ \ |(\log x)^m x^{z-1}\mathsf{e}^{-x}| \leq g_m(x)\,.$$

Dann ist insbesondere für alle $z \in E_{\alpha,\beta}$ die Funktion $x \mapsto (\log x)^m x^{z-1}\mathsf{e}^{-x}$ integrierbar über $(0,\infty)$, und

$$\big(\forall x \in (0,\infty)\big)\ \ \left|\frac{d}{dz}(\log x)^m x^{z-1}\mathsf{e}^{-x}\right| = |(\log x)^{m+1} x^{z-1}\mathsf{e}^{-x}| \leq g_{m+1}(x)\,.$$

Nach Satz 12.12 folgt für alle $z \in E_{\alpha,\beta}$ und alle $m \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{d}{dz}\int_0^\infty (\log x)^m x^{z-1}\mathsf{e}^{-x}\,dx \ = \ \int_0^\infty (\log x)^{m+1} x^{z-1}\mathsf{e}^{-x}\,dx$$

und daraus die Behauptung durch Induktion nach m.

Beweis von **A.** Sei $z \in E_{\alpha,\beta}$ und $\sigma = \Re z$. Nach Satz 4.14 ist

$$\lim_{x\to\infty} x^{\sigma-\beta}(\log x)^m \ = \ \lim_{x\to 0} x^{\sigma-\alpha}(\log x)^m \ = \ 0\,,$$

und daher gibt es ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\big(\forall x \in [1,\infty)\big)\ \ x^{\sigma-\beta}(\log x)^m \leq C \quad \text{und} \quad \big(\forall x \in (0,1]\big)\ \ x^{\sigma-\alpha}(\log x)^m \leq C\,.$$

Sei nun $g_m\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} Cx^\beta\mathsf{e}^{-x}\,, & \text{falls} \quad x \geq 1\,,\\ Cx^\alpha\mathsf{e}^{-x}\,, & \text{falls} \quad x \leq 1\,. \end{cases}$$

Dann ist g_m eine integrierbare Funktion mit den gewünschten Eigenschaften. □

12.4. Produktintegration

Satz 12.13 (Satz von Fubini und Tonelli)**.** *Seien* $m\,, n \in \mathbb{N}$. *Wir schreiben die Punkte von* $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *in der Form* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *mit* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *und* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$.

1. *Sei* $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{C}}$ *integrierbar. Dann gibt es eine Nullmenge* $N'' \subset \mathbb{R}^m$ *mit folgenden Eigenschaften*:

Für alle $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N''$ ist die Funktion $f(\cdot, \boldsymbol{y}) \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ integrierbar. Die Funktion $F \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$F(\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, \boldsymbol{y})\,, \quad \textit{falls} \quad \boldsymbol{y} \notin N''\,, \quad \textit{und} \quad F(\boldsymbol{y}) = 0\,, \quad \textit{falls} \quad \boldsymbol{y} \in N''\,,$$

ist integrierbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^m} F = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f\,.$$

Kurzschreibweise (auch unter Vertauschung der Faktoren):

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x} \Big)\, d\boldsymbol{y} \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \Big)\, d\boldsymbol{x}\,.$$

2. *Sei $f \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ messbar. Dann gibt es eine Nullmenge $N'' \subset \mathbb{R}^m$ mit folgender Eigenschaft:*

Für alle $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N''$ ist die Funktion $f(\cdot, \boldsymbol{y}) \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ messbar, die Funktion $F \colon \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$, definiert durch

$$F(\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, \boldsymbol{y})\,, \quad \textit{falls} \quad \boldsymbol{y} \notin N''\,, \quad \textit{und} \quad F(\boldsymbol{y}) = 0\,, \quad \textit{falls} \quad \boldsymbol{y} \in N''\,,$$

ist messbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^m} F = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f\,.$$

Insbesondere folgt für eine messbare Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{C}}$: Ist

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|\, d\boldsymbol{x} \Big)\, d\boldsymbol{y} < \infty \quad \textit{oder} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|\, d\boldsymbol{y} \Big)\, d\boldsymbol{x} < \infty\,,$$

so ist f integrierbar.

Beweis. Wir führen den Beweis mit Hilfe der folgenden beiden Behauptungen.

I. Es gibt eine Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_k \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C})_{k \ge 0}$ und eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 < \infty \quad \text{und} \quad \big(\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus N\big) \quad (\varphi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))_{k \ge 0} \to f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,.$$

II. Es gibt eine Nullmenge $N_1'' \subset \mathbb{R}^m$, so dass

$$(\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N_1'') \quad N_{\boldsymbol{y}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in N\} \quad \text{ist eine Nullmenge}\,.$$

Beweis von **I.** Da f integrierbar ist, gibt es eine Folge $(\psi_k \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C})_{k \ge 0}$ von Treppenfunktionen mit $(\|f - \psi_k\|_1)_{k \ge 0} \to 0$. Dann ist $(\psi_k)_{k \ge 0}$ eine L^1-Cauchyfolge, und und es gibt eine Teilfolge $(\psi_{k_i})_{i \ge 0}$ von $(\psi_k)_{k \ge 0}$, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 < \infty\,.$$

Nach Satz 12.1 gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und eine Teilfolge $(\psi_{k_i})_{i \in T}$ von $(\psi_{k_i})_{i \ge 0}$, so dass $\big(\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus N\big)$ $(\psi_{k_i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))_{i \in T} \to f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Die Folge $(\varphi_k)_{k \ge 0} = (\varphi_{k_i})_{i \in T}$ hat die gewünschte Eigenschaft.

Beweis von **II.** Sei $a\colon \mathbb{R}^m \to [0,\infty]$ definiert durch $a(\boldsymbol{y}) = \|1_{N_{\boldsymbol{y}}}\|_1$. Wir zeigen: $\|a\|_1 = 0$. Nach Satz 11.10 ist dann $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \mid v(N_{\boldsymbol{y}}) \neq 0\}$ eine Nullmenge.
Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach Satz 11.14 gibt es eine Folge $(Q_\nu)_{\nu\geq 0}$ offener Quader in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, so dass

$$N \subset \bigcup_{\nu\geq 0} Q_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} v(Q_\nu) < \varepsilon\,.$$

Für $\nu \in \mathbb{N}_0$ sei $Q_\nu = Q'_\nu \times Q''_\nu$ mit Quadern $Q'_\nu \subset \mathbb{R}^n$ und $Q''_\nu \subset \mathbb{R}^m$. Für $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ ist dann $1_{(Q_\nu)_{\boldsymbol{y}}} = 1_{Q''_\nu}(\boldsymbol{y})1_{Q'_\nu}$, also

$$1_{N_{\boldsymbol{y}}} \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} 1_{(Q_\nu)_{\boldsymbol{y}}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} 1_{Q''_\nu}(\boldsymbol{y})1_{Q'_\nu} \quad \text{und} \quad \|1_{N_{\boldsymbol{y}}}\|_1 \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} 1_{Q''_\nu}(\boldsymbol{y})\|1_{Q'_\nu}\|_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} 1_{Q''_\nu}(\boldsymbol{y})v(Q'_\nu)\,.$$

Damit erhalten wir

$$a \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} v(Q'_\nu)1_{Q''_\nu} \quad \text{und} \quad \|a\|_1 \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} v(Q'_\nu)v(Q''_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v(Q_\nu) < \varepsilon\,.$$

Damit sind die Behauptungen **I** und **II** gezeigt.

Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ sind die Funktionen

$$\varphi_k(\cdot,\boldsymbol{y})\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \quad \text{und} \quad |\varphi_{k+1}(\cdot,\boldsymbol{y}) - \varphi_k(\cdot,\boldsymbol{y})|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Treppenfunktionen, und wir definieren

$$\Phi_k(\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(\cdot,\boldsymbol{y}) \quad \text{und} \quad H_k(\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_{k+1}(\cdot,\boldsymbol{y}) - \varphi_k(\cdot,\boldsymbol{y})| = \|\varphi_{k+1}(\cdot,\boldsymbol{y}) - \varphi_k(\cdot,\boldsymbol{y})\|_1\,.$$

Nach Satz 11.3 sind dann auch $\Phi_k\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ und $H_k\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Treppenfunktionen,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Phi_k = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} \varphi_k \quad \text{und} \quad \|H_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}^m} H_k = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} |\varphi_{k+1} - \varphi_k| = \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1\,.$$

Nach Satz 12.5 gibt es eine Nullmenge $N''_2 \subset \mathbb{R}^m$, so dass

$$(\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N''_2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} H_k(\boldsymbol{y}) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k+1}(\cdot,\boldsymbol{y}) - \varphi_k(\cdot,\boldsymbol{y})\|_1 < \infty\,.$$

Sei nun $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N''_2$. Dann ist die Folge $(\varphi_k(\cdot,\boldsymbol{y}))_{k\geq 0}$ eine L^1-Cauchyfolge. Nach Satz 12.1 gibt es eine Nullmenge $L_{\boldsymbol{y}} \subset \mathbb{R}^n$, eine Teilfolge $(\varphi_k(\cdot,\boldsymbol{y}))_{k\in T}$ von $(\varphi_k(\cdot,\boldsymbol{y}))_{k\geq 0}$ und eine integrierbare Funktion $\widetilde{f}_{\boldsymbol{y}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, so dass

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus L_{\boldsymbol{y}}) \;\; (\varphi_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_{k\geq 0} \to \widetilde{f}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_{\boldsymbol{y}} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(\cdot,\boldsymbol{y})\,.$$

Die Menge $N'' = N''_1 \cup N''_2 \subset \mathbb{R}^m$ ist eine Nullmenge. Für $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N''$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N_{\boldsymbol{y}}$ ist $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \notin N$ und daher $(\varphi_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_{k\geq 0} \to f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Ist nun $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N''$, so ist $N_{\boldsymbol{y}} \cup L_{\boldsymbol{y}}$ eine Nullmenge, und $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq \widetilde{f}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})\} \subset N_{\boldsymbol{y}} \cup L_{\boldsymbol{y}}$. Daher ist $f(\cdot,\boldsymbol{y})$ integrierbar, und

$$F(\boldsymbol{y}) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot,\boldsymbol{y}) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}_{\boldsymbol{y}} \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(\cdot,\boldsymbol{y}) \;=\; \lim_{k\to\infty} \Phi_k(\boldsymbol{y})\,.$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ ist

$$|\Phi_{k+1}(\boldsymbol{y}) - \Phi_k(\boldsymbol{y})| = \Big|\int_{\mathbb{R}^n} \big[\varphi_{k+1}(\cdot,\boldsymbol{y}) - \varphi_k(\cdot,\boldsymbol{y})\big]\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_{k+1}(\cdot,\boldsymbol{y}) - \varphi_k(\cdot,\boldsymbol{y})| = H_k(\boldsymbol{y})\,,$$

also $\|\Phi_{k+1}-\Phi_k\|_1 \le \|H_k\|_1 = \|\varphi_{k+1}-\varphi_k\|_1$ und daher $(\Phi_k)_{k\ge 0}$ eine L^1-Cauchyfolge von Treppenfunktionen. Nach Satz 12.1 ist F integrierbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^m} F \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\Phi_k \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\varphi_k \;=\; \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f$$

nach **I** und Satz 12.1.

2. Nach Satz 12.9 gibt es eine monoton wachsende Folge integrierbarer einfacher Funktionen $(f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $(f_k)_{k\ge 0}\to f$, und nach Satz 12.2 ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k\,.$$

Nach 1. gibt es für jedes $k\ge 0$ eine Nullmenge $N_k''\subset\mathbb{R}^m$ mit folgenden Eigenschaften:

Für alle $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m\setminus N_k''$ ist die Funktion $f_k(\cdot,\boldsymbol{y})\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ integrierbar. Die Funktion $F_k\colon\mathbb{R}^m\to[0,\infty]$, definiert durch

$$F_k(\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(\cdot,\boldsymbol{y})\,,\quad \text{falls}\ \ \boldsymbol{y}\notin N_k''\,,\quad \text{und}\quad F_k(\boldsymbol{y})=0\,,\ \ \text{falls}\ \ \boldsymbol{y}\in N_k''\,,$$

ist integrierbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^m} F_k = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f_k\,.$$

Dann ist auch

$$N'' = \bigcup_{k\ge 0} N_k''$$

eine Nullmenge, und daher können wir ohne Einschränkung $N_k''=N''$ für alle $k\ge 0$ annehmen. Für $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m\setminus N''$ ist $(f_k(\cdot,\boldsymbol{y})\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\ge 0})_{k\ge 0}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen mit $(f_k(\cdot,\boldsymbol{y}))_{k\ge 0}\to f(\cdot,\boldsymbol{y})$. Daher ist $f(\cdot,\boldsymbol{y})\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ messbar, und nach Satz 12.2 ist

$$F(\cdot,\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot,\boldsymbol{y}) = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k(\cdot,\boldsymbol{y}) = \lim_{k\to\infty} F_k(\boldsymbol{y})\,.$$

Daher ist auch $F\colon\mathbb{R}^m\to[0,\infty]$ Limes einer monoton wachsenden Folge integrierbarer Funktionen, also messbar, und (wieder nach Satz 12.2)

$$\int_{\mathbb{R}^m} F = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m} F_k = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f_k = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f\,.$$

□

Satz 12.14 (Spezieller Satz von Fubini und Tonelli)**.** *Seien* $m\,,n\in\mathbb{N}$. *Wir schreiben die Punkte von* $\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ *in der Form* $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ *mit* $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ *und* $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$. *Für* $f\colon\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{C}}$ *und* $g\colon\mathbb{R}^m\to\overline{\mathbb{C}}$ *sei* $f\otimes g\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\overline{\mathbb{C}}$ *definiert durch*

$$(f\otimes g)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y})\,.$$

1. *Für* $f\colon\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{C}}$ *und* $g\colon\mathbb{R}^m\to\overline{\mathbb{C}}$ *ist* $\|f\otimes g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$.
2. *Sind* f *und* g *integrierbar, so ist auch* $f\otimes g$ *integrierbar, und*

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f\otimes g \;=\; \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^m} g\Big)\,.$$

3. *Seien* $f_1, \dots, f_n \colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ *integrierbare Funktionen. Dann ist die Funktion* $f \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$, *definiert durch*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\nu=1}^{n} f_\nu(x_\nu)\,, \quad \textit{integrierbar, und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f \;=\; \prod_{\nu=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} f_\nu\,.$$

Beweis. 1. FALL 1: $\|f\|_1 = 0$ oder $\|g\|_1 = 0$. Sei $\|f\|_1 = 0$ (der andere Fall geht genauso). Dann ist die Menge $N = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ eine Nullmenge, und es genügt, zu zeigen, dass auch $N \times \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge ist (denn es ist $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid (f \otimes g)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0\} \subset N \times \mathbb{R}^m$ und daher dann auch $\|f \otimes g\|_1 = 0$). Wegen

$$N \times \mathbb{R}^m = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N \times [-k, k]^m$$

genügt es, zu zeigen, dass für jeden abgeschlossenen Quader $P \subset \mathbb{R}^m$ die Menge $N \times P$ eine Nullmenge ist. Sei also $P \subset \mathbb{R}^m$ ein abgeschlossener Quader und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach Satz 11.14 gibt es eine Folge $(Q_\nu)_{\nu \geq 0}$ offener Quader in $\mathbb{R}^n$ so dass

$$N \subset \bigcup_{\nu \geq 0} Q_\nu\,, \quad \text{also} \quad N \times P \subset \bigcup_{\nu \geq 0} Q_\nu \times P \quad \text{und} \quad \sum_{\nu \geq 0} v(Q_\nu \times P) = v(P) \sum_{\nu \geq 0} v(Q) < \varepsilon\,.$$

FALL 2: $\|f\|_1 \neq 0$ und $\|g\|_1 \neq 0$. Wir können $\|f\|_1 < \infty$ und $\|g\|_1 < \infty$ annehmen, und wir zeigen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})$ $\|f \otimes g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 + \varepsilon$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $(\|f\|_1 + \eta)(\|g\|_1 + \eta) < \|f\|_1 \|g\|_1 + \varepsilon$. Seien $(c_\nu)_{\nu \geq 0}$ und $(d_\mu)_{\mu \geq 0}$ Folgen in $\mathbb{R}_{>0}$, sei $(Q_\nu)_{\nu \geq 0}$ eine Folge offener Quader in $\mathbb{R}^n$ und $(P_\mu)_{\mu \geq 0}$ eine Folge offener Quader in $\mathbb{R}^m$, so dass

$$|f| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu 1_{Q_\nu}\,, \quad |g| \leq \sum_{\mu=0}^{\infty} d_\mu 1_{P_\mu}\,, \quad \|f\|_1 \geq \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu v(Q_\nu) - \eta \quad \text{und} \quad \|g\|_1 \geq \sum_{\mu=0}^{\infty} d_\mu v(P_\mu) - \eta\,.$$

Dann folgt

$$|f \otimes g| \leq \sum_{\nu, \mu=0}^{\infty} c_\nu d_\mu 1_{Q_\nu \times P_\mu}$$

und daher

$$\|f \otimes g\|_1 \leq \sum_{\nu, \mu=0}^{\infty} c_\nu d_\mu v(Q_\nu \times P_\mu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu v(Q_\nu) \sum_{\mu=0}^{\infty} d_\mu v(P_\mu) \leq (\|f\|_1 + \eta)(\|g\|_1 + \eta) < \|f\|_1 \|g\|_1 + \varepsilon\,.$$

2. Seien $(\varphi_\nu \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{\nu \geq 0}$ und $(\psi_\nu \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C})_{\nu \geq 0}$ Folgen von Treppenfunktionen mit $(\|f - \varphi_\nu\|_1)_{\nu \geq 0} \to 0$ und $(\|g - \psi_\nu\|_1)_{\nu \geq 0} \to 0$. Dann folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{\nu \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\nu \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^m} g = \lim_{\nu \to \infty} \int_{\mathbb{R}^b} \psi_\nu\,.$$

$(\varphi_\nu \otimes \psi_\nu \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C})_{\nu \geq 0}$ ist eine Folge von Treppenfunktionen. Wegen $(\|\psi_\nu\|_1)_{\nu \geq 0} \to \|g\|_1$ und

$$\begin{aligned} \|f \otimes g - \varphi_\nu \otimes \psi_\nu\|_1 &= \|f \otimes (g - \psi_\nu) - (\varphi_\nu - f) \otimes \psi_\nu\|_1 \leq \|f \otimes (g - \psi_\nu)\|_1 + \|(\varphi_\nu - f) \otimes \psi_\nu\|_1 \\ &\leq \|f\|_1 \|g - \psi_\nu\|_1 + \|\varphi_\nu - f\|_1 \|\psi_\nu\|_1 \end{aligned}$$

folgt $(\|f \otimes g - \varphi_\nu \otimes \psi_\nu\|_1)_{\nu \geq 0} \to 0$. Daher ist $f \otimes g$ integrierbar, und mit Satz 11.3 folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f \otimes g = \lim_{\nu \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \varphi_\nu \otimes \psi_\nu = \lim_{\nu \to \infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\nu \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}^m} \psi_\nu \Big) = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}^m} g \Big)\,.$$

3. Nach 2. mittels Induktion nach n. $\square$

12.5. Der Transformationssatz

Definition 12.6. Für $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ heißt

$$P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \Big\{ \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu \boldsymbol{a}_\nu \;\Big|\; t_1, \ldots, t_n \in [0,1] \Big\}$$

das von $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ aufgespannte *Parallelepiped*.

Satz 12.15.

1. *Sei* $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$*. Dann ist* $P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ *kompakt, und*
$$v\big(P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\big) = |\det(\boldsymbol{a}_1^{\mathsf{t}}, \ldots, \boldsymbol{a}_n^{\mathsf{t}})|\,.$$
2. *Sei* $\psi \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *und* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *ein abgeschlossener Quader. Dann ist*
$$v(\psi(Q)) = \big|\det\big(\mathcal{M}(\psi)\big)\big|\, v(Q)\,.$$

Beweis. 1. Die Abbildung

$$\phi\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}^n\,, \quad \text{definiert durch} \quad \phi(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu \boldsymbol{a}_\nu\,,$$

ist stetig, $[0,1]^n$ ist kompakt, und daher ist auch $P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \phi\big([0,1]^n\big)$ kompakt.

Ist $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ linear abhängig, so ist $P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ in einem echten Teilraum, also in einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit $k < n$ enthalten und daher eine Nullmenge nach Satz 11.15. Wegen $\det(\boldsymbol{a}_1^{\mathsf{t}}, \ldots, \boldsymbol{a}_n^{\mathsf{t}}) = 0$ folgt die Behauptung

Sei also $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ linear unabhängig. Dann ist

$$A = (\boldsymbol{a}_1^{\mathsf{t}}, \ldots, \boldsymbol{a}_n^{\mathsf{t}}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad P(A) = P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\,.$$

Eine Abbildung $\mathsf{T}\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ heißt *Elementarumformung*, wenn sie von einer der folgenden Formen ist:

- Addition einer Spalte zu einer anderen.
- Multiplikation einer Spalte mit einer von 0 verschiedenen Zahl.

Wir werden zeigen:

I. Ist $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so gibt es endlich viele Elementarumformungen $\mathsf{T}_1, \ldots, \mathsf{T}_k$, so dass $\mathsf{T}_k\mathsf{T}_{k-1}\ldots\mathsf{T}_1 A$ die Einheitsmatrix ist.

II. Ist $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und T eine Elementarumformung, so ist

$$\frac{v\big(P(\mathsf{T}A)\big)}{|\det(\mathsf{T}A)|} = \frac{v\big(P(A)\big)}{|\det(A)|}\,.$$

Damit folgt dann die Behauptung, denn sind $\mathsf{T}_1, \dots, \mathsf{T}_k$, so dass $I = \mathsf{T}_k \mathsf{T}_{k-1} \dots \mathsf{T}_1 A$ die Einheitsmatrix ist, so ist $P(I) = [0,1]^n$ und daher

$$\frac{v\big(P(A)\big)}{|\det(A)|} \;=\; \frac{v\big(P(I)\big)}{|\det(I)|} \;=\; 1\,.$$

Beweis von **I.** Die Vertauschung zweier Spalten kann durch eine Hintereinanderausführung von Elementarumformungen erreicht werden, nämlich [mit den Spalten A_i und A_j]

$$(A_i, A_j) \to (A_i + A_j, A_j) \to (A_i + A_j, A_j - (A_i + A_j)) = (A_i + A_j, -A_i) \to (A_j, -A_i) \to (A_j, A_i)\,.$$

Sei nun $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich. Wir betrachten nun nur die ersten beiden Zeilen der Matrix und zeigen, dass man durch Elementarumformungen die ersten beiden Zeilen auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

bringen kann. Nach Induktionsvoraussetzung (angewandt auf die weiteren Spalten) folgt die Behauptung. Wir führen die folgenden Umformungen durch:

$$A \overset{(1)}{\to} \begin{pmatrix} \alpha & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} \overset{(2)}{\to} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} \overset{(3)}{\to} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} \overset{(4)}{\to} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & \beta & \dots & * \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ und $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \{-\alpha, 0\}$. Dabei entsteht (1) durch Spaltenvertauschung, (2) durch Spaltenmultiplikationen, (3) durch Spaltenadditionen und (4) durch eine Spaltenvertauschung. Im Falle $\gamma = 0$ erhält durch zwei Spaltenmultiplikationen

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \dots & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Im Falle $\gamma \neq 0$ benötigt man eine weitere Spaltenmultiplikation und eine Spaltenaddition, nämlich

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & \beta & \dots & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & -\gamma & \dots & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\gamma & \dots & * \end{pmatrix}$$

und kann dann das Gewünschte wie im ersten Fall erreichen.

Beweis von **II.** FALL 1: Sei $1 \le i < j \le n$ und T die Addition der i-ten Spalte zur j-ten Spalte. Dann ist $\det(\mathsf{T}A) = \det(A)$, und daher ist zu zeigen: Für alle $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ ist

$$v\big(P(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_n)\big) = v\big(P(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n)\big)\,.$$

Sei

$$P_+ = \Big\{ \sum_{\nu=1}^n t_\nu \boldsymbol{a}_\nu \;\Big|\; t_1, \dots, t_n \in [0,1]\,,\ t_i \le t_j \Big\} \ \text{ und } \ P_- = \Big\{ \sum_{\nu=1}^n t_\nu \boldsymbol{a}_\nu \;\Big|\; t_1, \dots, t_n \in [0,1]\,,\ t_i \ge t_j \Big\}\,.$$

Dann ist

$$P(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_n) = P_+ \cup P_-\,, \quad P(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{a}_i + P_+) \cup P_-\,,$$

und die Durchschnitte $P_+ \cap P_-$ und $(\boldsymbol{a}_i + P_+) \cup P_-$ liegen in Hyperebenen, sind also Nullmengen. Daher folgt wegen der Translationsinvarianz des Volumens

$$\begin{aligned} v\big(P(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_n)\big) &= v(P_+) + v(P_-) \;=\; v(\boldsymbol{a}_i + P_+) + v(P_-) \\ &= v\big(P(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n)\big)\,. \end{aligned}$$

FALL 2: Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ und T die Multiplikation der i-ten Spalte mit λ. Dann ist $\det(\mathsf{T}A) = \lambda \det(A)$, wir setzen $V(\lambda) = v\big(P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\big)$. Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $0 < \lambda \le \mu$ ist $P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \subset P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \mu\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, also $V(\lambda) \le V(\mu)$, und wir müssen zeigen: $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ \ V(\lambda) = |\lambda|\, V(1)$. Wir beweisen zuerst:

A. Für $p \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $V(p\lambda) = pV(\lambda)$.

Beweis von **A.** Induktion nach p. Für $p = 1$ ist nichts zu zeigen.

$p \ge 1$, $p \to p+1$: Es ist

$$P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, (p+1)\lambda\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, p\lambda\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \cup \big(p\lambda\boldsymbol{a}_i + P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\big)$$

und $P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, p\lambda\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \cap \big(p\lambda\boldsymbol{a}_i + P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\big)$ liegt in einer Hyperebene. Damit folgt wegen der Translationsinvarianz des Volumens

$$V\big((p+1)\lambda\big) = V(p\lambda) + V(\lambda) = pV(\lambda) + V(\lambda) = (p+1)V(\lambda)\,.$$

Insbesondere folgt $(\forall \lambda \in \mathbb{N})\ \ V(\lambda) = \lambda V(1)$. Ist $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$ und $p \in \mathbb{N}$ mit $p\lambda \in \mathbb{N}$, so folgt

$$V(p\lambda) = p\lambda V(1) = pV(\lambda) \quad \text{und daher} \quad V(\lambda) = \lambda V(1)\,.$$

Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, sei $(\lambda_k^-)_{k\ge 0}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{Q}_{>0}$ mit $(\lambda_k^-)_{k\ge 0} \to \lambda$, und sei $(\lambda_k^+)_{k\ge 0}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{Q}_{>0}$ mit $(\lambda_k^+)_{k\ge 0} \to \lambda$. Dann folgt

$$(\forall k \in \mathbb{N}_0)\ \ \lambda_k^- V(1) = V(\lambda_k^-) \le V(\lambda) \le V(\lambda_k^+) = \lambda_k^+ V(\lambda)\,, \quad \text{und daher} \quad V(\lambda) = \lambda V(1)\,.$$

Ist schließlich $\lambda \in \mathbb{R}_{<0}$, so folgt $P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \lambda\boldsymbol{a}_i + P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, -\lambda\boldsymbol{a}_i), \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, und wegen der Translationsinvarianz des Volumens ist $V(\lambda) = V(-\lambda) = |\lambda|\, V(1)$.

2. Sei

$$Q = \prod_{\nu=1}^n [a_\nu, a_\nu + d_\nu] = \Big\{\boldsymbol{a} + \sum_{\nu=1}^n t_\nu d_\nu \boldsymbol{e}_\nu \;\Big|\; t_1, \ldots, t_n \in [0,1]\Big\}$$

mit $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $d_\nu \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. Dann ist

$$\psi(Q) = \Big\{\psi(\boldsymbol{a}) + \sum_{\nu=1}^n t_\nu d_\nu \psi(\boldsymbol{e}_\nu) \;\Big|\; t_1, \ldots, t_n \in [0,1]\Big\} = \psi(\boldsymbol{a}) + P\big(d_1\psi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, d_n\psi(\boldsymbol{e}_n)\big)$$

und daher

$$v\big(\psi(Q)\big) = |\det(d_1\psi(\boldsymbol{e}_1)^{\mathsf{t}}, \ldots, d_n\psi(\boldsymbol{e}_n)^{\mathsf{t}})| = \big|\det\big(\mathcal{M}(\psi)\big)\big| \prod_{\nu=1}^n d_\nu = \big|\det\big(\mathcal{M}(\psi)\big)\big|\, v(Q)\,. \qquad \square$$

Satz 12.16 (Lemma von Sard)**.** *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ ein nicht-ausgearteter Würfel, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $W \subset D$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Dann ist*

$$v\big(f(W)\big) \le \int_W |\det(\mathsf{J}f(\boldsymbol{x}))|\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Vorbemerkungen zum Beweis des Lemmas von Sard.

Für $\emptyset \ne A \subset \mathbb{R}^n$ ist die Abstandsfunktion $d_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ definiert durch

$$d_A(\boldsymbol{x}) = \inf\big\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \;\big|\; \boldsymbol{a} \in A\big\}\,.$$

d_A ist stetig, und $\overline{A} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid d_A(\boldsymbol{x}) = 0$ (siehe Vorbemerkungen zum Beweis von Satz 11.17).

Für $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die *λ-Hülle* von A definiert durch

$$\mathcal{H}_\lambda(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid d_A(\boldsymbol{x}) \leq \lambda\}\,.$$

Eigenschaften der λ-Hülle. Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$.

1. Für ε, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{H}_\lambda(\boldsymbol{c} + A) = \boldsymbol{c} + \mathcal{H}_\lambda(A)$ und $\lambda\mathcal{H}_\varepsilon(A) = \mathcal{H}_{\lambda\varepsilon}(\lambda A)$.
   Beweis. Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}_\lambda(\boldsymbol{c} + A) &\iff d_{\boldsymbol{c}+A}(\boldsymbol{x}) = \inf\bigl\{\|\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a})\| \bigm| \boldsymbol{a} \in A\bigr\} \leq \lambda \\ &\iff \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} \in \mathcal{H}_\lambda(A) \iff \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{c} + \mathcal{H}_\lambda(A)\,. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}_{\lambda\varepsilon}(\lambda A) &\iff d_{\lambda A}(\boldsymbol{x}) = \inf\bigl\{\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{a}\| \bigm| \boldsymbol{a} \in A\bigr\} = \lambda \inf\bigl\{\|\lambda^{-1}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \bigm| \boldsymbol{a} \in A\bigr\} \leq \lambda\varepsilon \\ &\iff d_A(\lambda^{-1}\boldsymbol{x}) \leq \varepsilon \iff \lambda^{-1}\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}_\varepsilon(A) \iff \boldsymbol{x} \in \lambda\mathcal{H}_\varepsilon(A)\,. \quad \square \end{aligned}$$

2. Sei A kompakt. Dann ist $(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})$ $\mathcal{H}_\varepsilon(A)$ kompakt, und
$$v(A) = \lim_{\lambda\to 0+} v\bigl(\mathcal{H}_\lambda(A)\bigr)\,.$$
   Beweis. Die Mengen $\mathcal{H}_\varepsilon(A)$ sind abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Die Funktion $\lambda \mapsto v(\mathcal{H}_\lambda(A))$ ist monoton fallend, und $(\forall\lambda \in \mathbb{R}_{>0})$ $v(\mathcal{H}_\lambda(A)) \geq v(A)$. Es genügt nun, zu zeigen:
$$v(A) = \lim_{k\to\infty} v(\mathcal{H}_{1/k}(A))\,.$$
   Dann: Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so gibt es ein $l \in \mathbb{N}$ mit $v(\mathcal{H}_{1/l}(A)) < v(A) + \varepsilon$, und dann ist für alle $\lambda \in (0, 1/l)$ auch $v(\mathcal{H}_\lambda(A)) \leq v(\mathcal{H}_{1/l}(A)) < v(A) + \varepsilon$.
$$\text{Aus}\quad A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_{1/k}(A) \quad\text{folgt}\quad \mathcal{H}_1(A) \setminus A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_1(A) \setminus H_{1/k}(A)\,,$$
   und aus Satz 12.6 folgt
$$\begin{aligned} v(A) &= v(\mathcal{H}_1(A)) - v(\mathcal{H}_1(A) \setminus A) = v(\mathcal{H}_1(A)) - \lim_{k\to\infty} v(\mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{H}_{1/k}(A)) \\ &= v(\mathcal{H}_1(A)) - \lim_{k\to\infty} [\, v(\mathcal{H}_1(A)) - v(\mathcal{H}_{1/k}(A))\,] = \lim_{k\to\infty} v(\mathcal{H}_{1/k}(A))\,. \end{aligned}$$

Beweis von Satz 12.16. Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass
$$v\bigl(f(W)\bigr) \geq \int_W |\det(\mathsf{J}f)| \;+\; 2\varepsilon v(W)\,.$$
Sei $b \in \mathbb{R}_{>0}$ die Kantenlänge von W. Wir zeigen zunächst:

Z. Es gibt eine Folge abgeschlossener Würfel $(W_k)_{k\geq 0}$, so dass $(\forall k \geq 0)$ $W_k \supset W_{k+1}$, W_k hat die Kantenlänge $2^{-k}b$,
$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} W_k = \{\boldsymbol{m}\} \quad\text{ist einpunktig,}\quad\text{und}\quad v(f(W_k)) \geq \int_{W_k} |\det(\mathsf{J}f)| \;+\; 2\varepsilon v(W_k)\,.$$

Beweis von **Z.** Rekursiv. Sei $W_0 = W$, $k \in \mathbb{N}_0$ und W_k bereits konstruiert. Sei
$$W_k = \bigcup_{j=1}^{2^n} W_{k,j}$$

die Zerlegung von W_k in 2^n abeschlossene Teilwürfel halber Kantenlänge, so dass die Durchschnitte $W_{k,j} \cap W_{k,i}$ für $j \neq i$ ausgeartet sind (die Würfel $W_{k,j}$ sind die Sektoren von W_k). Dann folgt

$$\int_{W_k} |\det(\mathsf{J}f)| + 2\varepsilon v(W_k) = \sum_{j=1}^{2^n} \Big[\int_{W_{k,j}} |\det(\mathsf{J}f)| + 2\varepsilon v(W_{k,j}) \Big] \le v(f(W_k)) \le \sum_{j=1}^{2^n} v(f(W_{k,j}))\,,$$

und daher gibt es ein $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$, so dass der Würfel $W_{k+1} = W_{k,j}$ die gewünschte Eigenschaft besitzt. Sei nun

$$P = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k\,.$$

Sind $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in P$, so folgt $(\forall k \in \mathbb{N})$ $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|_\infty \le 2^{-k} b$, also $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Daher ist $|P| \le 1$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\boldsymbol{x}_k \in W_k$. Dann hat die Folgt $(\boldsymbol{x}_k)_{k \ge 0}$ einen Häufungswert, der in P liegt. Daher ist $|P| = 1$, und damit ist $\mathbf{Z}$ gezeigt.

Sei nun $V = df(\boldsymbol{m})([0,1]^n)$. Dann ist $v(V) = |\det \mathsf{J}f(\boldsymbol{m})|$, und nach der Vorbemerkung gibt es ein $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $v(\mathcal{H}_\eta(V)) < |\det \mathsf{J}f(\boldsymbol{m})| + \varepsilon$. Für $\boldsymbol{x} \in D$ ist

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{m}) + df(\boldsymbol{m})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}) + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}\|_\infty\, r(\boldsymbol{x}) \quad \text{mit} \quad \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{m}} r(\boldsymbol{x}) = 0\,.$$

Sei $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(\forall \boldsymbol{x} \in D)$ $\big[\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}\|_\infty < \delta \implies \|r(\boldsymbol{x})\| < \eta \big]$, und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $2^{-k} b < \delta$. Dann ist $(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_k)$ $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_\infty \le 2^{-k} b < \delta$.

Für $\boldsymbol{x} \in W_k$ ist $f(\boldsymbol{x}) - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}\|_\infty\, r(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} + df(\boldsymbol{m})(\boldsymbol{x})$ mit $\boldsymbol{c} = f(\boldsymbol{m}) - df(\boldsymbol{m})(\boldsymbol{m})$ und $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}\|_\infty \|r(\boldsymbol{x})\| < 2^{-k} b \eta$. Damit folgt

$$f(W_k) \subset \mathcal{H}_{2^{-k} b \eta}(\boldsymbol{c} + df(\boldsymbol{m})(W_k)) = \boldsymbol{c} + \mathcal{H}_{2^{-k} b \eta}(df(\boldsymbol{m})(W_k))\,.$$

Es ist $W_k = \boldsymbol{m}_k + 2^{-k} b\, [0,1]^n$ mit $\boldsymbol{m}_k \in \mathbb{R}^n$, also $df(\boldsymbol{m})(W_k) = df(\boldsymbol{m})(\boldsymbol{m}_k) + 2^{-k} b V$ und daher $\mathcal{H}_{2^{-k} b \eta}(df(\boldsymbol{m})(W_k)) = 2^{-k} b\, \mathcal{H}_\eta(V)$. Es folgt

$$v(f(W_k)) = v(\mathcal{H}_{2^{-k} b \eta}\, [\, df(\boldsymbol{m})(W_k)]) = (2^{-k} b)^n\, v(\mathcal{H}_\eta(V)) < v(W_k) \big[|\det \mathsf{J}f(\boldsymbol{m})| + \varepsilon \big].$$

Die Funktion $\boldsymbol{x} \mapsto |\det \mathsf{J}f(\boldsymbol{x})|$ ist stetig. Daher gibt es ein $\boldsymbol{a}_k \in W_k$ mit

$$|\det \mathsf{J}f(\boldsymbol{a}_k)| = \min\big\{ |\det \mathsf{J}f(\boldsymbol{x})| \;\big|\; \boldsymbol{x} \in W_k \big\}\,,$$

und es folgt

$$|\det \mathsf{J}f(\boldsymbol{a}_k)|\, v(W_k) \le \int_{W_k} |\det \mathsf{J}f| \le v\big(f(W_k)\big) - 2\varepsilon v(W_k) < v(W_k) \big[|\det \mathsf{J}f(\boldsymbol{m})| - \varepsilon \big]\,,$$

also $|\det \mathsf{J}f(\boldsymbol{a}_k)| < |\det \mathsf{J}f(\boldsymbol{m})| - \varepsilon$. Wegen

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{m} \quad \text{folgt} \quad \lim_{k \to \infty} |\det \mathsf{J}f(\boldsymbol{a}_k)| = |\det \mathsf{J}f(\boldsymbol{m})|\,, \quad \text{ein Widerspruch.} \qquad \square$$

Satz 12.17 (Transformationssatz). *Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi\colon D \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $f\colon \varphi(D) \to \overline{\mathbb{C}}$. Genau dann ist f über $\varphi(D)$ integrierbar, wenn $(f \circ \varphi)\, |\det \mathsf{J}\varphi|$ über D integrierbar ist, und dann folgt*

$$\int_{\varphi(D)} f \;=\; \int_D (f \circ \varphi)\, |\det \mathsf{J}\varphi|\,.$$

Beweis. Es genügt, den Beweis unter der Annahme zu führen, dass f über $\varphi(D)$ integrierbar ist. Ist nämlich die Funktion $F = (f\circ\varphi)\,|\det \mathsf{J}\varphi|$ über $D = \varphi^{-1}(\varphi(D))$ integrierbar, so ist dann (unter Verwendung des Arguments mit φ^{-1} an Stelle von φ) $(F\circ\varphi^{-1})\,|\det \mathsf{J}\varphi^{-1}| = f$ über $\varphi(D)$ integrierbar.

Wir führen den Beweis in vier Schritten.

A. Sei $U \subset K \subset D \subset \mathbb{R}^p$, U und D seien offen, K sei kompakt und $v(K\setminus U) = 0$. $\varphi\colon D \to \mathbb{R}^n$ sei ein Diffeomorphismus,

$$m = \min\big\{|\det \mathsf{J}\varphi(\boldsymbol{x})| \;\big|\; \boldsymbol{x}\in K\big\} \quad \text{und} \quad M = \max\big\{|\det \mathsf{J}\varphi(\boldsymbol{x})| \;\big|\; \boldsymbol{x}\in K\big\}\,.$$

Dann ist $m\,v(K) \le v(\varphi(K)) \le M\,v(K)$.

Beweis von **A.** Nach Satz 11.12 gibt es eine Folge abgeschlossener Würfel $(W_n)_{n\ge 0}$, so dass

$$U = \bigcup_{k\ge 0} W_k\,, \quad \text{und} \quad (\forall l > k \ge 0)\;\; W_k \cap W_l \quad \text{ist ausgeartet.}$$

Nach Satz 12.6 ist

$$v(K) = v(K\setminus U) + \sum_{k=0}^{\infty} v(W_k) = \sum_{k=0}^{\infty} v(W_k)\,.$$

Nach Satz 11.15 sind die Mengen $\varphi(K\setminus U)$ und $\varphi(W_k\cap W_l) = \varphi(W_k)\cap\varphi(W_l)$ für alle $k,\, l\in\mathbb{N}_0$ mit $k\neq l$ Nullmengen, und es folgt

$$v\big(\varphi(K)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} v\big(\varphi(W_k)\big) \le \sum_{k=0}^{\infty}\int_{W_k} |\det \mathsf{J}\varphi| = \int_K |\det \mathsf{J}\varphi| \le M v(K)$$

nach Satz 12.5 und Satz 12.16.

Wir verwenden nun die eben bewiesene Ungleichung für die Funktion $\varphi^{-1}\colon \varphi(D) \to \mathbb{R}^n$. Es ist $\varphi(U) \subset \varphi(K) \subset \varphi(D) \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi(U)$ und $\varphi(D)$ sind offen, $\varphi(K)$ ist kompakt, und $\varphi(K)\setminus\varphi(U) = \varphi(K\setminus U)$ ist eine Nullmenge. Daher folgt

$$v(K) = v\big(\varphi^{-1}(\varphi(K))\big) \le \max\big\{|\det \mathsf{J}\varphi^{-1}(\boldsymbol{y})| \;\big|\; \boldsymbol{y}\in\varphi(K)\big\}\, v(\varphi(K))\,.$$

Wegen $\mathsf{J}\varphi^{-1}(\boldsymbol{y}) = \mathsf{J}\varphi\big(\varphi^{-1}(\boldsymbol{y})\big)^{-1}$ folgt $\max\big\{|\det \mathsf{J}\varphi^{-1}(\boldsymbol{y})| \;\big|\; \boldsymbol{y}\in\varphi(K)\big\} = m^{-1}$ und $v(\varphi(K)) \ge m v(K)$. Damit ist **A** gezeigt. □

B. Beweis von Satz 12.17 für den Spezialfall $f = 1_Q\,|\,\varphi(D)$ mit einem abgeschlossenen Quader $Q\subset\varphi(D)$.

In diesem Falle ist

$$\int_{\varphi(D)} f \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} 1_Q = v(Q)\,,$$

und die Abbildung $(f\circ\varphi)|\det \mathsf{J}\varphi| = 1_{\varphi^{-1}Q}|\det \mathsf{J}\varphi|\colon D\to\mathbb{R}^p$ ist stetig auf der kompakten Menge $\varphi^{-1}(Q)$, also über $\varphi^{-1}(Q)$ integrierbar, und

$$\int_{\varphi^{-1}(Q)} |\det \mathsf{J}\varphi| = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\varphi^{-1}(Q)}|\det \mathsf{J}\varphi| = \int_D (f\circ\varphi)|\det \mathsf{J}\varphi|\,.$$

Wir zeigen:

$$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0})\;\; \Big|\, v(Q) - \int_{\varphi^{-1}(Q)} |\det \mathsf{J}\varphi| \,\Big| < \varepsilon\,.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\varepsilon_1 v(\varphi^{-1}(Q)) < \varepsilon$. Die Funktion

$$\vartheta\colon Q \to \mathbb{R}\,, \quad \text{definiert durch} \quad \vartheta(\boldsymbol{y}) = \bigl|\det \mathsf{J}\varphi\bigl(\varphi^{-1}(\boldsymbol{y})\bigr)\bigr|\,,$$

ist stetig, und aus Satz 11.23 folgt

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})\ (\forall \boldsymbol{y},\, \boldsymbol{y}' \in Q)\ \ \bigl[\, \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\| < \delta \implies |\vartheta(\boldsymbol{y}) - \vartheta(\boldsymbol{y}')| < \varepsilon_1 \,\bigr]\,.$$

Sei nun $Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_m$ eine Zerlegung von Q in kompakte Quader $Q_1, \ldots, Q_m$, so dass für alle $\nu,\, \mu \in \{1, \ldots, m\}$ gilt:

$$\text{Ist } \nu \neq \mu, \text{ so ist } Q_\nu \cap Q_\mu \text{ ausgeartet, und } (\forall \boldsymbol{y},\, \boldsymbol{y}' \in Q_\nu)\ \ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\| < \delta.$$

Für $\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x}' \in \varphi^{-1}(Q_\nu)$ ist dann $\vartheta(\varphi(\boldsymbol{x})) = |\det \mathsf{J}\varphi(\boldsymbol{x})|$ und $|\det \mathsf{J}\varphi(\boldsymbol{x}) - \det \mathsf{J}\varphi(\boldsymbol{x}')| < \varepsilon_1$. Sei nun $m_\nu = \min\bigl\{|\det \mathsf{J}\varphi(\boldsymbol{x})| \bigm| \boldsymbol{x} \in \varphi^{-1}(Q_\nu)\bigr\}$ und $M_\nu = \max\bigl\{|\det \mathsf{J}\varphi(\boldsymbol{x})| \bigm| \boldsymbol{x} \in \varphi^{-1}(Q_\nu)\bigr\}$. Dann ist $M_\nu - m_\nu < \varepsilon_1$,

$$m_\nu\, v(\varphi^{-1}(Q_\nu)) \ \le\ \int_{\varphi^{-1}(Q_\nu)} |\det \mathsf{J}\varphi| \ \le\ M_\nu\, v(\varphi^{-1}(Q_\nu))\,,$$

und aus **A** folgt $m_\nu\, v(\varphi^{-1}(Q_\nu)) \le v(Q_\nu) \le M_\nu\, v(\varphi^{-1}(Q_\nu))$. Also erhalten wir

$$\Bigl|\, v(Q_\nu) - \int_{\varphi^{-1}(Q_\nu)} |\det \mathsf{J}\varphi| \,\Bigr| \ \le\ (M_\nu - m_\nu)\, v(\varphi^{-1}(Q_\nu)) \ \le\ \varepsilon_1 v(\varphi^{-1}(Q_\nu))$$

und daher

$$\begin{aligned}\Bigl|\, v(Q) - \int_{\varphi^{-1}(Q)} |\det \mathsf{J}\varphi| \,\Bigr| \ &\le\ \sum_{\nu=1}^{m} \Bigl|\, v(Q_\nu) - \int_{\varphi^{-1}(Q_\nu)} |\det \mathsf{J}\varphi| \,\Bigr| \\ &\le\ \varepsilon_1 \sum_{\nu=1}^{m} v\bigl(\varphi^{-1}(Q_\nu)\bigr) \ =\ \varepsilon_1 v\bigl(\varphi^{-1}(Q)\bigr) < \varepsilon\,. \quad \square\end{aligned}$$

C. Beweis von Satz 12.17 für den Spezialfall $f = h\,|\,\varphi(D)$ mit einer Treppenfunktion $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, so dass $\operatorname{supp}(h) = \overline{\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\boldsymbol{x}) \neq 0\}} \subset \varphi(D)$.

Nach Satz 11.1 ist

$$h = \sum_{j=1}^{m} c_j 1_{Q_j}\,, \quad \text{und wir setzen} \quad h_1 = \sum_{j=1}^{m} c_j 1_{\overline{Q}_j}$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}^\times$ und Quadern $Q_1, \ldots, Q_m$, so dass $(\forall j \in \{1, \ldots, m\})\ \ \overline{Q}_j \subset \varphi(D)$. Die Menge $N = \{\boldsymbol{y} \in \varphi(D) \mid h(\boldsymbol{y}) \neq h_1(\boldsymbol{y})\}$ ist eine Nullmenge, und nach Satz 11.15 ist auch $\{\boldsymbol{x} \in D \mid (h\circ\varphi)(\boldsymbol{x}) \neq (h_1\circ\varphi)(\boldsymbol{x})\} \subset \varphi^{-1}(N)$ eine Nullmenge. Nach **B** folgt nun

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(D)} h = \int_{\varphi(D)} h_1 = \sum_{j=1}^{m} c_j \int_{\varphi(D)} 1_{\overline{Q}_j} = \sum_{j=1}^{m} c_j \int_D |\det \mathsf{J}(\varphi)|\, 1_{\varphi^{-1}(\overline{Q}_j)} \\ = \int_D (h_1\circ\varphi)|\det \mathsf{J}\varphi| = \int_D (h\circ\varphi)|\det \mathsf{J}\varphi|\,.\end{aligned}$$

D. Beweis von Satz 12.17 im allgemeinen Fall.

Nach Satz 11.19 gibt es eine Folge von Treppenfunktionen $(h_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k\geq 0}$, so dass

$$(\|f_D - h_k\|_1)_{k\geq 0} \to 0 \quad \text{und} \quad (\forall k \in \mathbb{N}_0)\ \operatorname{supp}(h_k) \subset \varphi(D)\,.$$

Nach Satz 12.1 gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ und eine Teilfolge $(h_k)_{k\in T}$ von $(h_k)_{k\geq 0}$, so dass $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N)$ $(h_k(\boldsymbol{x}))_{k\in T} \to f_D(\boldsymbol{x}) \neq \infty$. Für $k \in T$ sei $\widetilde{h}_k = (h_k\circ\varphi)|\det \mathsf{J}\varphi|\colon D \to \mathbb{R}^n$. Dann folgt nach **C**

$$\int_{\varphi(D)} h_k = \int_D \widetilde{h}_k\,,$$

und $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N)$ $(\widetilde{h}_k(\boldsymbol{x}))_{k\in T} \to (f_D\circ\varphi)(\boldsymbol{x})|\det \mathsf{J}\varphi(\boldsymbol{x})|$. Für $k,\, l \in T$ erhalten wir

$$\|\widetilde{h}_k - \widetilde{h}_l\|_1 \;=\; \int_D |(h_k - h_l)\circ\varphi|\,|\det \mathsf{J}\varphi| \;=\; \int_{\varphi(D)} |h_k - h_l| \;=\; \|h_k - h_l\|_1\,,$$

und daher ist $(\widetilde{h}_k)_{k\in T}$ eine L^1-Cauchyfolge. Aus Satz 12.1 folgt nun, dass $(f_D\circ\varphi)|\det \mathsf{J}\varphi|$ integrierbar ist, und

$$\int_D (f\circ\varphi)|\det \mathsf{J}\varphi| \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_D \widetilde{h}_k \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{\varphi(D)} h_k \;=\; \int_{\varphi(D)} f\,. \quad \square$$

Satz 12.18. *Sei* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $K \subset D$ *und* $\varphi\colon D \to \mathbb{R}^n$ *ein Diffeomorphismus. Genau dann ist* $\varphi(K)$ *integrierbar, wenn* $|\det J\varphi|$ *über* K *integrierbar ist, und dann folgt*

$$v\big(\varphi(K)\big) = \int_K |\det J\varphi|\,.$$

Beweis. Nach Satz 12.17 mit $f = 1_{\varphi(K)}\,|\,D$ (dann ist $f\circ\varphi = 1_K\,|\,D$). $\square$

Satz 12.19. *Sei* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, *und sei* $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *definiert durch* $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}^{\mathsf{t}} + \boldsymbol{b}^{\mathsf{t}}$.

1. *Sei* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *integrierbar. Dann ist auch* $f\circ\varphi$ *integrierbar, und*
$$\int_{\mathbb{R}^n} f = |\det(A)| \int_{\mathbb{R}^n} f\circ\varphi\,.$$
2. *Ist* $K \subset \mathbb{R}^n$ *integrierbar, so ist auch* $\varphi(K)$ *integrierbar, und*
$$v(\varphi(K)) = |\det(A)|\, v(K)\,.$$

Beweis. Für $\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ ist $d\varphi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}^{\mathsf{t}}$, also $\mathsf{J}\varphi = A$ (konstant), und die Behauptung folgt aus Satz 12.17. $\square$

Satz 12.20. *Sei* $n \geq 2$, $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ *ein Intervall,* $a = \inf(I)$ *und* $b = \sup(I)$. *Sei* $P_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *die Polarkoordinatenabbildung, rekursiv definiert durch* $P_2(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ *und*

$$P_{n+1}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = \big(P_n(r\cos\varphi_n,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}), r\sin\varphi_n\big)$$

(*siehe* Satz und Definition 9.13). *Sei*

$$C_n(\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1}) \;=\; \prod_{i=2}^{n-1}(\cos\varphi_i)^{i-1}\,,$$

$$K_n(I) = \big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \|\boldsymbol{x}\| \in (a,b)\big\} \quad \textit{und} \quad \Pi_n(a,b) = (a,b) \times (-\pi,\pi) \times \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)^{n-2} \subset \mathbb{R}^n\,.$$

A. *Eine Funktion* $f\colon K_n(I) \to \overline{\mathbb{C}}$ *ist genau dann über* $K_n(I)$ *integrierbar, wenn die Funktion* $(f\circ P_n)\det \mathsf{J}P_n$ *über* $\Pi_n(a,b)$ *integrierbar ist, und dann ist*

$$\int_{K_n(I)} f = \int_{\Pi_n(a,b)} f\big(P(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\big)r^{n-1}C_n(\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1})\,d(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\,.$$

B. *Sei* $\varphi\colon I \to \overline{\mathbb{C}}$, *und sei* $f\colon K_n(I) \to \overline{\mathbb{C}}$ *definiert durch* $f(\boldsymbol{x}) = \varphi\big(\|\boldsymbol{x}\|\big)$. *Genau dann ist* f *über* $K_n(I)$ *integrierbar, wenn die Funktion* $(r \mapsto r^{n-1}\varphi(r))$ *über* I *integrierbar ist, und dann ist*

$$\int_{K_n(I)} f = n\kappa_n \int_{(a,b)} r^{n-1}\varphi(r)dr \quad \textit{mit} \quad \kappa_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}$$

(κ_n *ist das Volumen der* n*-dimensionalen Einheitskugel*).

Beweis. Nach Satz 9.13 ist $P_n\,|\,\Pi_n(a,b)$ ein Diffeomorphismus,

$$P_n\big(\Pi_n(a,b)\big) = K_n\big((a,b)\big) \cap (\Sigma \times \mathbb{R}^{n-2}) \quad \text{mit} \quad \Sigma = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\le 0}\times\{0\})\,,$$

und

$$\big(\forall\,(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) \in \Pi_n(a,b)\big) \quad \det \mathsf{J}P_n(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) = r^{n-1}C_n(\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1}) > 0\,.$$

A. Nach Satz 12.17 ist f genau dann über $K_n\big((a,b)\big) \cap (\Sigma \times \mathbb{R}^{n-2})$ integrierbar, wenn $(f\circ P_n)\det \mathsf{J}P_n$ über $\Pi_n(a,b)$ integrierbar ist, und dann sind die Integrale gleich. Aber es ist $K_n(I)\setminus\big[K_n\big((a,b)\big)\cap(\Sigma\times\mathbb{R}^{n-2})\big] \subset \big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \;\big|\; \|\boldsymbol{x}\| = a\big\}\cup\big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \;\big|\; \|\boldsymbol{x}\| = b\big\}\cup(\mathbb{R}_{\le 0}\times\{0\}\times\mathbb{R}^{n-2})$ eine Nullmenge, und daher folgt die Behauptung.

B. Wegen $\|P(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\| = r$ folgt $f\big(P(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\big) = \varphi(r)$, und nach Satz 12.14 ist die Funktion $(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) \mapsto C(\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1})$ über $(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{n-2}$ integrierbar. Daher folgt mit Satz 12.13 und Satz 12.14

$$\int_{K_n(I)} f \;=\; \lambda_n \int_{(a,b)} \varphi(r)r^{n-1}dr \quad \text{mit} \quad \lambda_n = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \Big(\prod_{i=2}^{n-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{i-1}\varphi_i\,d\varphi_i\Big)\,.$$

Im Spezialfall $I = [0,1]$ ist $K_n(I) = K_n(1)$ die n-dimensionale Einheitskugel, und mit $f = 1$, $\varphi = 1$ folgt

$$\kappa_n = v_n(K_n(1)) = \lambda_n \int_0^1 r^{n-1}dr = \frac{\lambda_n}{n} = \begin{cases} \dfrac{\pi^m}{m}\,, & \text{falls} \quad n = 2m\,, \\[2ex] \dfrac{2^{m+1}\pi^m}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2m+1)}\,, & \text{falls} \quad n = 2m+1 \end{cases}$$

(siehe Beispiel 3 nach Satz 11.21). Daraus folgt die Behauptung wegen $\Gamma(m) = (m-1)!$ und

$$\Gamma\Big(m+\frac{1}{2}\Big) = \Big(m-\frac{1}{2}\Big)\Big(m-\frac{3}{2}\Big)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi}\,. \qquad \square$$

13. Die L^p-Räume

Im ganzen Abschnitt seien $n \in \mathbb{N}$ und $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge.

13.1. Die L^p-Halbnorm

Definition 13.1. Sei $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$.
f heißt *messbar*, wenn $f_D\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ messbar ist, und *integrierbar*, wenn f über D integrierbar ist.
Für $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei

$$S_c(f) = \big\{\boldsymbol{x} \in D \;\big|\; |f(\boldsymbol{x})| > c\big\} \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty = \inf\{c \in [0,\infty] \mid S_c(f) \text{ ist eine Nullmenge}\}\,.$$

Wir setzen $\|f\|_1 = \|f_D\|_1$, und für $p \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir

$$\|f\|_p = \big\||f|^p\big\|_1^{1/p} \in [0,\infty]\,.$$

Im Falle $p > 1$ nennt man $\|f\|_p$ die *L^p-Halbnorm* von f.
Für $p \in (0,\infty]$ sei $\mathfrak{L}^p(D)$ die Menge aller messbaren Funktionen $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ mit $\|f\|_p < \infty$.

Bemerkungen: Sei $p \in (0,\infty]$, und seien $f,\, g\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$.

1. $f \in \mathfrak{L}^1(D) \iff f$ ist über D integrierbar (siehe Satz 12.10).
2. Es ist $\big\||f|\big\|_p = \|f\|_p = \|\overline{f}\|_p$, für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\,\|f\|_p$, und aus $|g| \leq |f|$ folgt $\|f\|_p \leq \|g\|_p$. Insbesondere ist $\|\Re f\|_p \leq \|f\|_p$ und $\|\Im f\|_p \leq \|f\|_p$.
3. Ist $f \in \mathfrak{L}^p(D)$, so folgt $|f|$, $\overline{f}$, $\Re f$, $\Im f \in \mathfrak{L}^p(D)$, und für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch $\lambda f \in \mathfrak{L}^p(D)$.

Satz 13.1. *Sei $p \in (0,\infty]$ und $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$.*

1. $\|f\|_\infty \leq \|f\|_D$, *und die Menge* $\{\boldsymbol{x} \in D \mid |f(\boldsymbol{x})| > \|f\|_\infty\}$ *ist eine Nullmenge.*
2. $\|f\|_p = 0 \iff \{\boldsymbol{x} \in D \mid f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ *ist eine Nullmenge.*
3. $\|f\|_p < \infty \iff \{\boldsymbol{x} \in D \mid f(\boldsymbol{x}) = \infty\}$ *ist eine Nullmenge.*
4. *Sei* $f \in \mathfrak{L}^p(D)$ *und* $r \in \mathbb{R}_{>0}$. *Dann ist* $|f|^r \in \mathfrak{L}^{p/r}(D)$.

Beweis. 1. Es ist $\{\boldsymbol{x} \in D \mid |f(\boldsymbol{x})| > \|f\|_D\} = \emptyset$ und daher $\|f\|_\infty \leq \|f\|_D$. Sei nun $\|f\|_\infty < \infty$. Dann ist

$$\big\{\boldsymbol{x} \in D \;\big|\; |f(\boldsymbol{x})| > \|f\|_\infty\big\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Big\{\boldsymbol{x} \in D \;\Big|\; |f(\boldsymbol{x})| > \|f\|_\infty + \frac{1}{k}\Big\}$$

die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen und daher selbst eine Nullmenge.
2. und 3. folgen für $p < \infty$ aus Satz 11.10, und für $p = \infty$ aus 1.
4. Nach Satz 12.8 ist $|f|^r$ messbar, und es ist $\big\||f|^r\big\|_{p/r} = \big\||f|^p\big\|_1^{r/p} = \|f\|_p^r < \infty$. □

Satz 13.2. *Seien $f,\, g\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$, $p \in (1,\infty]$ und*

$$q = 1\,, \quad \textit{falls} \quad p = \infty\,, \qquad q = \frac{p}{p-1}\,, \quad \textit{falls} \quad p < \infty\,.$$

1. (Hölder'sche Ungleichung). *Es ist*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \, \|g\|_q \,,$$

und aus $f \in \mathfrak{L}^p(D)$ *und* $g \in \mathfrak{L}^q(D)$ *folgt* $fg \in \mathfrak{L}^1(D)$.

2. *Sei* $B \subset \mathbb{R}^n$ *mit* $f \,|\, D \setminus B = 0$. *Dann ist* $\|f\|_1 \le \|f\|_p \, v(B))^{1/q}$. *Ist insbesondere* B *integrierbar und* $f \in \mathfrak{L}^p(D)$, *so folgt* $f \in \mathfrak{L}^1(D)$.
3. (Minkowski'sche Ungleichung) *Es ist* $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$, *im Falle* $\|g\|_p < \infty$ *ist* $\big|\|f\|_p - \|g\|_p\big| \le \|f+g\|_p$, *und aus* $f,\, g \in \mathfrak{L}^p(D)$ *folgt* $f+g \in \mathfrak{L}^p(D)$.
4. *Sei* $(f_k)_{k\ge0}$ *eine Folge in* $\mathfrak{L}^p(D)$ *und* $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ *mit* $(\|f-f_k\|_p)_{k\ge0} \to 0$. *Dann folgt* $f \in \mathfrak{L}^p(D)$ *und* $(\|f_k\|_p)_{k\ge0} \to \|f\|_p$.
5. *Sei* $f = (f_1 - f_2) + \mathsf{i}(f_3 - f_4)$ *die kanonische Zerlegung von* f. *Dann gilt:*

$$(\forall i \in \{1,\ldots,4\}) \ \ \|f_i\|_p \le \|f\|_p \,, \quad \textit{und} \quad \big[\, f \in \mathfrak{L}^p(D) \iff (\forall i \in \{1,\ldots,4\}) \ \ f_i \in \mathfrak{L}^p(D) \,\big] .$$

Beweis. 1. Es genügt, die Ungleichung zu zeigen, denn mit f und g ist auch fg messbar. Ist $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$, so ist $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) \ne 0\}$ eine Nullmenge, also $\|fg\|_1 = 0$. Sei also $\|f\|_p > 0$, $\|g\|_q > 0$ und ohne Einschränkung $\|f\|_p < \infty$ und $\|g\|_q < \infty$.

FALL 1: $p < \infty$. Mit

$$a = \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \quad \text{und} \quad b = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \quad \text{folgt aus Satz 7.27} \quad a^{1/p} b^{1/q} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

und daher

$$|fg| \;=\; |f|\,|g| \;\le\; \|f\|_p \, \|g\|_q \Big(\frac{1}{p} \, \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \;+\; \frac{1}{q} \, \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \Big) ,$$

also

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 \;&\le\; \|f\|_p \, \|g\|_q \Big\| \frac{1}{p} \, \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \;+\; \frac{1}{q} \, \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \Big\|_1 \;\le\; \|f\|_p \, \|g\|_q \Big[\frac{1}{p} \, \frac{\||f|^p\|_1}{\|f\|_p^p} \;+\; \frac{1}{q} \, \frac{\||g|^q\|_1}{\|g\|_q^q} \Big] \\ &=\; \|f\|_p \, \|g\|_q \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Big) = \|f\|_p \, \|g\|_q \,. \end{aligned}$$

FALL 2: $p = \infty$. Sei $M = \|f\|_\infty < \infty$. Definiert man $f_0\colon D \to \mathbb{C}$ durch

$$f_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) \,, & \text{falls} \quad |f(\boldsymbol{x})| \le M \,, \\ M \,, & \text{falls} \quad |f(\boldsymbol{x})| > M \,, \end{cases}$$

so ist $\{\boldsymbol{x} \in D \mid f(\boldsymbol{x}) \ne f_0(\boldsymbol{x})\}$ eine Nullmenge und daher

$$\|fg\|_1 = \|f_0 g\|_1 \le \|Mg\|_1 = M\|g\|_1 = \|f\|_\infty \, \|g\|_1 \,.$$

2. $f = f(1_B \,|\, D)$ und $\|f\|_1 \le \|f\|_p \, \|1_B\|_q = \|f\|_p \, v(B)^{1/q}$ nach 1. Ist B integrierbar, so ist $1_B \in \mathfrak{L}^q(D)$ und daher $f \in \mathfrak{L}^1(D)$.

3. Sind f und g messbar, so ist auch $f+g$ messbar. Daher genügt es, $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ zu zeigen (der Beweis der Ungleichung $\big|\|f\|_p - \|g\|_p\big| \le \|f+g\|_p$ erfolgt dann wie in Satz 11.5). Wir können $\|f+g\|_p > 0$ annehmen.

FALL 1: $p < \infty$. Es ist $|f+g|^p \le |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$ und daher nach 1.

$$\big\||f+g|^p\big\|_1 \;\le\; \big\||f|\,|f+g|^{p-1}\big\|_1 \;+\; \big\||g|\,|f+g|^{p-1}\big\|_1 \;\le\; \|f\|_p \, \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q \;+\; \|g\|_p \, \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q \,.$$

Wegen

$$\big\||f+g|^{p-1}\big\|_q \;=\; \big\||f+g|^{(p-1)q}\big\|_1^{1/q} \;=\; \big(\big\||f+g|^p\big\|_1^{1/p}\big)^{p/q} \;=\; \|f+g\|_p^{p-1}$$

folgt $\|f+g\|_p^p \le (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\|f+g\|_p^{p-1}$, also $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

FALL 2: $p=\infty$. Sei $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty < c < \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned}\big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \;\big|\; |(f+g)(\boldsymbol{x})| \ge c\big\} &\subset \big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \;\big|\; |f(\boldsymbol{x})| + |g(\boldsymbol{x})| \ge c\big\} \\ &\subset \big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \;\big|\; |f(\boldsymbol{x})| > \|f\|_\infty\big\} \cup \big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \;\big|\; |g(\boldsymbol{x})| > \|g\|_\infty\big\}\,.\end{aligned}$$

und diese Menge ist eine Nullmenge. Daher ist $\|f+g\|_\infty \le c$, und da c beliebig war, folgt $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

4. Sei $k\in\mathbb{N}_0$ mit $\|f-f_k\|_p < 1$. Dann folgt $\|f\|_p \le \|f-f_k\|_p + \|f_k\|_p < \infty$. Ist $K\subset\mathbb{R}^n$ kompakt, so ist $|f_K - (f_k)_K| \le |f-f_k|$ und

$$\|f_K-(f_k)_K\|_1 \le \|f_K-(f_k)_K\|_p\, v(K)^{1/q} \le \|f-f_k\|_p\, v(K)^{1/q}\,, \quad \text{also} \quad (\|f_K-(f_k)_K\|_1)_{k\ge 0} \to 0$$

und daher f_K integrierbar nach Satz 12.1. Insbesondere ist $f_K = f\,1_K$ für jede kompakte Menge K messbar, daher ist f messbar, und $f\in\mathfrak{L}^p(D)$. Für $k\in\mathbb{N}_0$ ist $\big|\|f\|_p - \|f_k\|_p\big| \le \|f-f_k\|_p$, und daher folgt auch $(\|f_k\|_p)_{k\ge 0} \to \|f\|_p$.

5. Nach 3. und den eingangs gemachten Bemerkungen. □

Satz 13.3. *Seien* $f,\, g\colon D\to[0,\infty]$ *und* $p\in(0,1)$.

1. *Sei* $\|g^{-p/(1-p)}\|_1 < \infty$. *Dann folgt* $\|fg\|_1 \ge \|f\|_p\,\|g^{-p/(1-p)}\|_1^{1-1/p}$.
2. *Seien* $f,\, g\in\mathfrak{L}^p(D)$. *Dann ist* $\|f+g\|_p \ge \|f\|_p + \|g\|_p$.

Beweis. 1. Die Menge $N = \{\boldsymbol{x}\in D \mid g(\boldsymbol{x}) = 0\} = \{\boldsymbol{x}\in D \mid g(\boldsymbol{x})^{-p/(1-p)} = \infty\}$ ist eine Nullmenge, und für alle $\boldsymbol{x}\in D\setminus N$ ist $f^p(\boldsymbol{x}) = (fg)^p(\boldsymbol{x})\,g^{-p}(\boldsymbol{x})$, also nach Satz 13.2

$$\|f^p\|_1 \;=\; \|(fg)^p\,g^{-p}\|_1 \;\le\; \|(fg)^p\|_{1/p}\,\|g^{-p}\|_{1/(1-p)} \;=\; \|fg\|_1^p\,\|g^{-p/(1-p}\|_1^{1-p}\,.$$

Daher folgt $\|fg\|_1 \ge \|f\|_p\,\|g^{-p/(1-p}\|_1^{1-1/p}$.

2. Ist $\|f+g\|_p = 0$, so ist auch $\|f\|_p = \|g\|_p = 0$, und daher können wir $0 < \|f+g\|_p < \infty$ annehmen. Die Menge $N = \{\boldsymbol{x}\in D \mid (f+g)^{p-1}(\boldsymbol{x}) = 0\} = \{\boldsymbol{x}\in D \mid (f+g)(\boldsymbol{x}) = \infty\}$ ist eine Nullmenge, und für alle $\boldsymbol{x}\in D\setminus N$ ist $(f+g)^p = (f+g)^{p-1}f + (f+g)^{p-1}g$. Die Funktionen $(f+g)^{p-1}f$ und $(f+g)^{p-1}g$ sind messbar, $\|(f+g)^{p-1}f\|_1 \le \|(f+g)^p\|_1 = \|f+g\|_p^p < \infty$ und $\|(f+g)^{p-1}g\|_1 \le \|(f+g)^p\|_1 = \|f+g\|_p^p < \infty$. Daher sind die Funktionen $(f+g)^p$, $(f+g)^{p-1}f$ und $(f+g)^{p-1}g$ integrierbar, und es folgt mit 1.

$$\begin{aligned}\|(f+g)^p\|_1 = {} & \int_D \big[(f+g)^{p-1}f + (f+g)^{p-1}g\big] \;=\; \int_D (f+g)^{p-1}f \;+\; \int_D (f+g)^{p-1}g \\ = {} & \|(f+g)^{p-1}f\|_1 + \|(f+g)^{p-1}g\|_1 \\ \ge {} & \|f\|_p\,\|(f+g)^p\|_1^{1-1/p} + \|g\|_p\,\|(f+g)^p\|_1^{1-1/p}\,,\end{aligned}$$

also $\|f\|_p + \|g\|_p \le \|f+g\|_p$. □

Satz 13.4 (Claborn'sche Ungleichung)**.** *Sei* $p \in \mathbb{R}_{>1}$*, und seien* $f,\, g \in \mathfrak{L}^p(D)$*. Dann ist*

$$\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_p^p \;+\; \Big\|\frac{f-g}{2}\Big\|_p^p \;\le\; \frac{\|f\|_p^p+\|g\|_p^p}{2}\,, \quad \textit{falls} \quad p \ge 2\,,$$

$$\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_p^{p/(p-1)} \;+\; \Big\|\frac{f-g}{2}\Big\|_p^{p/(p-1)} \;\le\; \Big(\frac{\|f\|_p^p+\|g\|_p^p}{2}\Big)^{1/(p-1)}\,, \quad \textit{falls} \quad p < 2\,.$$

Beweis. Der Beweis erfordert eine Reihe elementarer Abschätzungen (Beweisschritte **I** bis **VI**) und wird dann unter **VII** zu Ende geführt. Wir setzen

$$q = \frac{p}{p-1}\,.$$

I. Sei $u \in (0,1)$. Dann ist die Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}\,, \quad \text{definiert durch} \quad \varphi(t) = \frac{1-u^t}{t}\,, \quad \text{monoton fallend.}$$

Beweis von **I.** Für $t \in \mathbb{R}_{>0}$ ist

$$\varphi'(t) \;=\; \frac{u^t(1-t\log u)-1}{t^2}\,, \quad \text{und wir zeigen} \quad u^t(1-t\log u) \le 1\,.$$

Sei $t \in \mathbb{R}_{>0}$ fest und $g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x^t(1-t\log x)$. Für alle $x \in (0,1)$ ist $g'(x) = -t^2x^{t-1}\log x > 0$. Daher ist g monoton wachsend, und es folgt

$$u^t(1-t\log u) = g(u) \le g(1) = 1 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}_{>0}\,. \quad \square$$

II. Für $p \ge 2$ und $x \in [0,1]$ ist $(1+x)^p + (1-x)^p \le 2^{p-1}(1+x^p)$.

Beweis von **II.** Für $x = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $x \in (0,1]$ und

$$\Phi(x) = \frac{1}{x^p}\big[(1+x)^p + (1-x)^p - 2^{p-1}(1+x^p)\big] = \Big(\frac{1}{x}+1\Big)^p + \Big(\frac{1}{x}-1\Big)^p - 2^{p-1}\Big(\frac{1}{x^p}+1\Big)\,.$$

Wir müssen $\Phi(x) \le 0$ zeigen, und wegen $\Phi(1) = 0$ genügt es, $\Phi'(x) \ge 0$ zu zeigen. Es ist

$$\Phi'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}}\big[(1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - 2^{p-1}\big]\,.$$

und wir betrachten die Funktion $\Psi\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Psi(x) = (1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - 2^{p-1}\,.$$

Wegen $\Psi(1) = 0$ und $\Psi'(x) = (p-1)\big[(1+x)^{p-2} + (1-x)^{p-2}\big] \ge 0$ ist für $x \in (0,1]$ stets $\Psi(x) \le 0$, also $\Phi'(x) \ge 0$. $\square$

III. Für $p \in (1,2]$ und $u \in (0,1)$ ist

$$(1+u^q)^{p-1} \le \frac{1}{2}\,\big[(1+u)^p + (1-u)^p\big]$$

Beweis von **III.** Wir betrachten die Entwicklung in Binomialreihen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\big[(1+u)^p + (1-u)^p\big] - (1+u^q)^{p-1} \\
&\quad= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}\big[u^k + (-u)^k\big] \;-\; \sum_{k=1}^{\infty}\binom{p-1}{2k-1}u^{q(2k-1)} \;-\; \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{2k}u^{q(2k)} \\
&\quad= \sum_{k=1}^{\infty}\bigg[\binom{p}{2k}u^{2k} \;-\; \binom{p-1}{2k-1}u^{q(2k-1)} - \binom{p-1}{2k}u^{q(2k)}\bigg] \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}A_k
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}A_k &= \frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-2k+1)}{(2k)!}u^{2k} - \frac{(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-2k+1)}{(2k-1)!}u^{q(2k-1)}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-2k)}{(2k)!}u^{q(2k)}\\ &= u^{2k}\frac{(2-p)(3-p)\cdot\ldots\cdot(2k-p)}{(2k-1)!}\Big[\frac{p(p-1)}{2k(2k-p)} - \frac{p-1}{2k-p}u^{q(2k-1)-2k} + \frac{p-1}{2k}u^{q(2k)-2k}\Big],\end{aligned}$$

und wir müssen zeigen, dass $[\ldots] \geq 0$. Es ist aber

$$\frac{p(p-1)}{2k(2k-p)} - \frac{p-1}{2k-p}u^{q(2k-1)-2k} + \frac{p-1}{2k}u^{q(2k)-2k} = \frac{1-u^\lambda}{\lambda} - \frac{1-u^\mu}{\mu}$$

mit

$$\lambda = \frac{2k-p}{p-1} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{2k}{p-1}\,.$$

Wegen $\lambda < \mu$ folgt die Behauptung aus **I**. □

IV. Für $p \in (1,2]$ und $x \in [0,1]$ ist $(1+x)^q + (1-x)^q \leq 2\,(1+x^p)^{1/(p-1)}$.

Beweis von **IV.** Für $p = 2$ ist (wegen $q = 2$) die Ungleichung eine Gleichung, ebenso für $x = 0$ und $x = 1$. Sei also $p \in (1,2)$, $x \in (0,1)$ und

$$u = \frac{1-x}{1+x} \in (0,1), \quad \text{also} \quad x = \frac{1-u}{1+u}\,.$$

Wir müssen also zeigen: Für $u \in (0,1)$ ist

$$\Big(1 + \frac{1-u}{1+u}\Big)^q + \Big(1 - \frac{1-u}{1+u}\Big)^q \leq 2\,\Big[1 + (\frac{1-u}{1+u})^p\Big]^{1(p-1)}\,.$$

Nach **III** ist

$$1 + u^q \leq \Big(\frac{1}{2}\big[(1+u)^p + (1-u)^p\big]\Big)^{1/(p-1)}$$

und daher

$$\begin{aligned}\big[(1+u)+(1-u)\big]^q + \big[(1+u)-(1-u)\big]^q &= 2^q + (2u)^q = 2^q(1+u^q)\\ &\leq 2^{q-1/(p-1)}\big[(1+u)^p + (1-u)^p\big]^{1/(p-1)}\,.\end{aligned}$$

Nach Division durch $(1+u)^q$ folgt wegen $q - 1/(p-1) = 1$

$$\begin{aligned}\Big(1 + \frac{1-u}{1+u}\Big)^q + \Big(1 - \frac{1-u}{1+u}\Big)^q &\leq 2\big[(1+u)^p + (1-u)^p\big]^{1/p-1}(1+u)^{-q}\\ &= 2\Big[1 + (\frac{1-u}{1+u})^p\Big]^{1/(p-1)}.\quad \square\end{aligned}$$

V. Sei $r \in (0,1]$, $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 2}$, $\theta \in [0,2\pi)$ und $g(\theta) = |1 + r\mathrm{e}^{i\theta}|^\rho + |1 - r\mathrm{e}^{i\theta}|^\rho$. Dann ist $g(\theta) \leq g(0)$.

Beweis von **V.** Für $\theta \in [0,2\pi]$ ist $g(\theta) = (1 + r^2 + 2r\cos\theta)^{\rho/2} + (1 + r^2 - 2r\cos\theta)^{\rho/2}$ und $g'(\theta) = -\rho r \sin\theta\big[(1 + r^2 + 2r\cos\theta)^{\rho/2-1} - (1 + r^2 - 2r\cos\theta)^{\rho/2-1}\big]$, also genau dann $g'(\theta) = 0$, wenn $\theta \in \big\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\big\}$. Wegen $\rho \geq 2$ ist $g'(\theta) \geq 2$ für alle $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, und aus $g(0) = g(\pi) = g(2\pi)$ folgt die Behauptung. □

VI. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \Big|\frac{z+w}{2}\Big|^p + \Big|\frac{z-w}{2}\Big|^p &\le \frac{|z|^p}{2} + \frac{|w|^p}{2}\,, \quad \text{falls} \quad p \ge 2\,, \\ \Big(\Big|\frac{z+w}{2}\Big|^q + \Big|\frac{z-w}{2}\Big|^q\Big)^{p-1} &\le \frac{|z|^p}{2} + \frac{|w|^p}{2}\,, \quad \text{falls} \quad p < 2\,. \end{aligned}$$

Beweis von **VI.** Wir können $|z| \le |w|$ annehmen. Im Falle $z = 0$ reduzieren sich die Ungleichungen zu

$$2\Big|\frac{w}{2}\Big|^p \le \frac{|w|^p}{2}\,, \ \text{falls} \ p \ge 2\,, \quad \text{und} \quad \Big(2\Big|\frac{w}{2}\Big|^q\Big)^{p-1} \le \frac{|w|^p}{2}\,, \ \text{falls} \ p < 2\,,$$

was wegen $p + q = pq$ offensichtlich erfüllt ist. Sei also $0 < |z| \le |w|$ und

$$\Big|\frac{z}{w}\Big| = r\mathrm{e}^{i\theta} \quad \text{mit} \quad r \in (0,1],\ \theta \in [0, 2\pi)\,.$$

Dann sind die zu beweisenden Ungleichungen gleichwertig mit

$$\begin{aligned} |1 + r\mathrm{e}^{i\theta}|^p + |1 - r\mathrm{e}^{i\theta}|^p &\le 2^{p-1}(1 + r^p), \quad \text{falls} \quad p \ge 2\,, \\ |1 + r\mathrm{e}^{i\theta}|^q + |1 - r\mathrm{e}^{i\theta}|^q &\le 2(1 + r^p)^{1/(p-1)}, \quad \text{falls} \quad p < 2\,. \end{aligned}$$

Für $\theta = 0$ folgen diese Ungleichungen aus **II** und **IV** und für beliebiges θ aus **V** (man beachte $q > 2$, falls $p < 2$). □

VII. *Eigentlicher Beweis der Claborn'schen Ungleichungen.* Wegen $f, g \in \mathfrak{L}^p(D)$ gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N)\ \big[f(\boldsymbol{x}) \ne \infty \wedge g(\boldsymbol{x}) \ne \infty\big]$. Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N$ gelten nach **VI** die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \Big|\frac{f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})}{2}\Big|^p + \Big|\frac{f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})}{2}\Big|^p &\le \frac{\big|f(\boldsymbol{x})\big|^p}{2} + \frac{\big|g(\boldsymbol{x})\big|^p}{2} \quad \text{falls} \quad p \ge 2\,, \\ \Big(\Big|\frac{f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})}{2}\Big|^q + \Big|\frac{f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})}{2}\Big|^q\Big)^{p-1} &\le \frac{\big|f(\boldsymbol{x})\big|^p + \big|g(\boldsymbol{x})\big|^p}{2}, \quad \text{falls} \quad p < 2\,. \end{aligned}$$

Wegen $f, g \in \mathfrak{L}^p(D)$ ist nach den Sätzen 13.2 und 13.1.4

$$\frac{f \pm g}{2} \in \mathfrak{L}^p(D), \quad \Big|\frac{f \pm g}{2}\Big|^p \in \mathfrak{L}^1(D) \quad \text{und} \quad \Big|\frac{f \pm g}{2}\Big|^q \in \mathfrak{L}^{p/q}(D) = \mathcal{L}^{p-1}(D)\,.$$

Im Falle $p \ge 2$ folgt

$$\begin{aligned} \Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_p^p + \Big\|\frac{f-g}{2}\Big\|_p^p &= \Big\|\Big|\frac{f+g}{2}\Big|^p\Big\|_1 + \Big\|\Big|\frac{f-g}{2}\Big|^p\Big\|_1 = \int_D \Big|\frac{f+g}{2}\Big|^p + \int_D \Big|\frac{f-g}{2}\Big|^p \\ &= \int_D \Big[\Big|\frac{f+g}{2}\Big|^p + \Big|\frac{f-g}{2}\Big|^p\Big] \le \int_D \Big[\frac{|f|^p}{2} + \frac{|g|^p}{2}\Big] \\ &= \frac{1}{2}\int_D |f|^p + \frac{1}{2}\int_D |g|^p = \frac{\|f\|_p^p}{2} + \frac{\|g\|_p^p}{2}\,. \end{aligned}$$

Im Falle $p<2$ folgt mit Satz 13.3

$$\begin{aligned}\Big\|\Big|\frac{f+g}{2}\Big|^q\Big\|_{p-1}+\Big\|\Big|\frac{f-g}{2}\Big|^q\Big\|_{p-1} &\le \Big\|\Big|\frac{f+g}{2}\Big|^q+\Big|\frac{f-g}{2}\Big|^q\Big\|_{p-1}\\ &= \Big[\int_D\Big(\Big|\frac{f+g}{2}\Big|^q+\Big|\frac{f-g}{2}\Big|^q\Big)^{p-1}\Big]^{1/(p-1)}\\ &\le \Big(\int_D\frac{|f|^p+|g|^p}{2}\Big)^{1/(p-1)}=\Big(\frac{\|f\|_p^p}{2}+\frac{\|g\|_p^p}{2}\Big)^{1/(p-1)}. \quad \square\end{aligned}$$

Definition 13.2. Sei $p\in(0,\infty)$. Eine Folge $(f_k\colon D\to\overline{\mathbb{C}})_{k\ge0}$ heißt *L^p-Cauchyfolge*, wenn

$$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0})\ (\exists l\in\mathbb{N}_0)\ (\forall i,\,j\ge l)\ \ \|f_i-f_j\|_p<\varepsilon\,.$$

Satz 13.5 (L^p-Vollständigkeitssatz)**.** *Sei $p\in\mathbb{R}_{>1}$ und $(f_k)_{k\ge0}$ eine Folge in $\mathfrak{L}^p(D)$.*

1. *Ist $(f_k)_{k\ge0}$ eine L^p-Cauchyfolge, so gibt es ein $f\in\mathfrak{L}^p(D)$ mit $(\|f-f_k\|_p)_{k\ge0}\to0$.*
2. *Sei $f\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$ mit $(\|f-f_k\|_p)_{k\ge0}\to0$. Dann ist $f\in\mathfrak{L}^p(D)$, $(\|f_k\|_p)_{k\ge0}\to\|f\|_p$, und es gibt eine Nullmenge $N\subset\mathbb{R}^n$ und eine Teilfolge $(f_{k_i})_{i\ge0}$ von $(f_k)_{k\ge0}$, so dass*

$$(\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus N)\ \big[(\forall i\in\mathbb{N}_0)\ f_{k_i}(\boldsymbol{x})\ne\infty\ \wedge\ \big(f_{k_i}(\boldsymbol{x})\big)_{i\ge0}\to f(\boldsymbol{x})\ne\infty\,\big]\,.$$

Beweis. Sei $(f_k\colon D\to\overline{\mathbb{C}})_{k\ge0}$ eine L^p-Cauchyfolge und ohne Einschränkung $f_0=0$. Die Folge $(k_i)_{i\ge0}$ in $\mathbb{N}_0$ sei rekursiv definiert durch $k_0=0$ und

$$k_{i+1}=\min\{k\in\mathbb{N}\mid k>k_i\,,\ (\forall l\ge k)\ \ \|f_l-f_k\|_p<2^{-i}\,\}\,.$$

Dann ist $(k_i)_{i\ge0}$ streng monoton wachsend, und $(\forall i\in\mathbb{N})$ $\|f_{k_{i+1}}-f_{k_i}\|_p<2^{-i}$, also

$$\alpha=\sum_{i=0}^{\infty}\big\|f_{k_{i+1}}-f_{k_i}\big\|_p<\infty\,.\ \text{ Sei } g_l=\sum_{i=0}^{l}|f_{k_{i+1}}-f_{k_i}|\ \text{ für } l\in\mathbb{N}_0,\ \text{ und }\ g=\sum_{i=0}^{\infty}|f_{k_{i+1}}-f_{k_i}|\,.$$

Dann ist $(g_l)_{l\ge0}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathfrak{L}^p(D)$ mit $(g_l)_{l\ge0}\to g$ und $(g_l^p)_{l\ge0}\to g^p$. Für $l\in\mathbb{N}_0$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^n}g_l^p\ =\ \|g_l\|_p^p\ \le\ \Big(\sum_{i=0}^{l}\ \|f_{k_{i+1}}-f_{k_i}\|_p\Big)^p\ \le\ \alpha^p\,.$$

Nach Satz 12.2 ist g^p über D integrierbar, und

$$\|g^p\|_1\ =\ \int_D g^p\ =\ \lim_{l\to\infty}\int_D g_l^p\ =\ \lim_{l\to\infty}\|g_l\|_p^p\ \le\ \alpha^p\,.$$

Daher ist $\|g\|_p<\infty$, und da g messbar ist, folgt $g\in\mathfrak{L}^p(U)$. $N=\{\boldsymbol{x}\in D\mid g(\boldsymbol{x})=\infty\}$ ist eine Nullmenge, und wir definieren $f\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$ durch

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=0}^{\infty}\big[f_{k_{i+1}}(\boldsymbol{x})-f_{k_i}(\boldsymbol{x})\big]=\lim_{i\to\infty}f_{k_i}(\boldsymbol{x})\,,\ \text{ falls } \boldsymbol{x}\in U\setminus N\,,\quad\text{und }\ f(\boldsymbol{x})=0\,,\ \text{ falls } \boldsymbol{x}\in N\,.$$

Nach Satz 13.2 genügt es nun, zu zeigen:

A. $(\|f-f_k\|_p)_{k\ge0}\to0$.

Ist nämlich $\widetilde{f}\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$ eine weitere Funktion mit $(\|\widetilde{f}-f_k\|_p)_{k\ge0}\to0$, so ist die Menge $\{\boldsymbol{x}\in D\mid f(\boldsymbol{x})\ne\widetilde{f}(\boldsymbol{x})\}$ eine Nullmenge, und daher folgen die Behauptungen für $\widetilde{f}$.

Beweis von **A.** Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $l \in \mathbb{N}$, so dass $(\forall \nu, \mu \geq k_l)\ \ \|f_\nu - f_\mu\|_p < \varepsilon$. Für $m > k_l$ und $\nu \geq l$ ist dann $\|f_{k_\nu} - f_m\|_p < \varepsilon$ und

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N) \quad \big|f(\boldsymbol{x}) - f_m(\boldsymbol{x})\big|^p = \lim_{\nu \to \infty} \big|f_{k_\nu}(\boldsymbol{x}) - f_m(\boldsymbol{x})\big|^p .$$

Wegen $\big\||f_{k_\nu} - f_m|^p\big\|_1 = \|f_{k_\nu} - f_m\|_p^p < \varepsilon^p$ folgt mit Satz 12.3 $\|f - f_m\|_p = \big\||f - f_m|^p\big\|_1 \leq \varepsilon$. ☐

Definition 13.3. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Eine Folge $(A_k)_{k \geq 0}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ heißt *Ausschöpfung* von A, wenn

$$(\forall k \in \mathbb{N}_0)\ \ A_k \subset A_{k+1} \quad \text{und} \quad A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} A_k ,$$

und A heißt *σ-kompakt*, wenn A eine Ausschöpfung mit kompakten Mengen besitzt.

Bemerkungen:

1. Jede Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist σ-kompakt.
   Beweis. Sei $(A_k)_{k \geq 0}$ eine Folge kompakter Mengen in $\mathbb{R}^n$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist
   $$\widetilde{A}_k = \bigcup_{j=0}^{k} A_j \quad \text{kompakt}\,, \ \ \widetilde{A}_k \subset \widetilde{A}_{k+1}\,, \quad \text{also} \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \widetilde{A}_k \quad \sigma\text{-kompakt.} \ ☐$$
2. Jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist σ-kompakt.
   Beweis. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, so folgt die Behauptung aus Satz 11.12. Ist A abgeschlossen, so ist $(A \cap [-k, k]^n)_{k \geq 0}$ eine Ausschöpfung von A mit kompakten Mengen. ☐
3. Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ ist σ-kompakt.

Satz 13.6 (Dichtesatz)**.** *Sei D σ-kompakt, $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und $f \colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ eine Funktion mit $\|f_D\|_p < \infty$. Dann sind äquivalent*:

(a) *$f \in \mathfrak{L}^p(D)$.*

(b) *Es gibt eine Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k \geq 0}$ mit*
$$(\|f - (\varphi_k \,|\, D)\|_p)_{k \geq 0} \to 0 .$$
Ist D offen, so kann man außerdem $(\forall k \in \mathbb{N}_0)$ $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset D$ erreichen.

Beweis. Sei $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$ die kanonische Zerlegung von f. Die Behauptung des Satzes gilt für f genau dann, wenn sie für f_1, f_2, f_3 und f_4 gilt. Daher können wir im Folgenden $f \colon D \to [0, \infty]$ annehmen.

(a) $\Rightarrow$ (b) SPEZIALFALL: $f \colon D \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist beschränkt, und $K = \operatorname{supp}(f)$ ist kompakt. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $K \subset Q$ und $M \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f| \leq M 1_Q$. Dann ist f_D integrierbar, und es gibt eine Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k \geq 0}$ mit $(\|f_D - \varphi_k\|_1)_{k \geq 0} \to 0$. Ist D offen, so kann man annehmen, dass $(\forall k \in \mathbb{N}_0)$ $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset D$ (nach Satz 11.19). Nach Satz 12.1 gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ und eine Teilfolge $(\varphi_k)_{k \in T}$ von $(\varphi_k)_{k \geq 0}$, so dass $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N)$ $(\varphi_k(\boldsymbol{x}))_{k \in T} \to f_D(\boldsymbol{x}) \neq \infty$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\widetilde{\varphi}_k = \min\{|\varphi_k|, M 1_Q\} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. $\widetilde{\varphi}_k$ ist eine Treppenfunktion mit $\operatorname{supp}(\widetilde{\varphi}_k) = \operatorname{supp}(\varphi_k)$, und für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N$ ist

$$(\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{x}))_{k \in T} \to f_D(\boldsymbol{x})\,, \quad (\widetilde{\varphi}_k(\boldsymbol{x})^p)_{k \in T} \to f_D(\boldsymbol{x})^p \quad \text{und} \quad (|f_D(\boldsymbol{x}) - (\widetilde{\varphi}_k)_D(\boldsymbol{x})|^p)_{k \in T} \to 0 .$$

Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\widetilde{\varphi}_k^p$ eine Treppenfunktion (um das einzusehen, schreibe man φ_k als Linearkombination charakteristischer Funktionen von paarweise disjunkten Quadern), es ist $\widetilde{\varphi}_k^p \leq M^p 1_Q$

und $\|M^p 1_Q\|_1 = M^p v(Q) < \infty$. Nach Satz 12.4 folgt $(\|f_D^p - \widetilde{\varphi}_k^p\|_1)_{k\geq 0} \to 0$, daher ist f_D^p integrierbar und $f^p \in \mathfrak{L}^1(D)$. Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$|f_D(\boldsymbol{x}) - (\widetilde{\varphi}_k)_D(\boldsymbol{x})|^p \leq f_D(\boldsymbol{x})^p + \widetilde{\varphi}_k(\boldsymbol{x})^p \leq 2M^p 1_Q(\boldsymbol{x})$$

und daher (wieder nach Satz 12.4) $\big(\big\||f_D - (\widetilde{\varphi}_k)_D|^p\big\|_1\big)_{k\geq 0} \to 0$. Wegen

$$\|f - (\widetilde{\varphi}_k \,|\, D)\|_p = \big\||f - (\widetilde{\varphi}_k \,|\, D)|^p\big\|_1^{1/p} = \big\||f_U - (\widetilde{\varphi}_k)_U|^p\big\|_1^{1/p}$$

folgt die Behauptung.

ALLGEMEINER FALL: Sei $(f\colon D \to [0,\infty]) \in \mathfrak{L}^p(D)$. Wir zeigen: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es eine Treppenfunktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit $\|f - (\varphi \,|\, D)\|_p < \varepsilon$ und $\operatorname{supp}(\varphi) \subset D$, falls D offen ist.

Sei $(D_k)_{k\geq 0}$ eine Ausschöpfung von D mit kompakten Mengen. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$f_k = \min\{f,\, k1_{D_k} \,|\, D\}\colon D \to \mathbb{R}_{\geq 0}\,.$$

Dann ist f_k messbar, $f_k \leq f$, also $\|f_k\|_p \leq \|f\|_p$ und daher $f_k \in \mathfrak{L}^p(D)$. Die Folge $(f_k^p)_{k\geq 0}$ ist monoton wachsend, und $(f_k^p)_{k\geq 0} \to f^p$. Nach FALL 1 gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

> Zu jedem $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es einen Treppenfunktion $\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (mit $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset D$, falls D offen ist), so dass $\|f_k - (\varphi_k \,|\, D)\|_p < \eta$.

$\big((f - f_k)^p\big)_{k\geq 0}$ ist eine monoton fallende Folge in $\mathfrak{L}^1(D)$, $\big((f - f_k)^p\big)_{k\geq 0} \to 0$, und

$$\int_D (f - f_k)^p \;=\; \|f - f_k\|_p^p \;\leq\; (\|f\|_p + \|f_k\|_p)^p \leq (2\|f\|_p)^p < \infty\,.$$

Nach Satz 12.2 folgt

$$\big(\|f - f_k\|_p^p\big)_{k\geq 0} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (f - f_k)_U^p\Big)_{k\geq 0} \to 0$$

also $\big(\|f - f_k\|_p\big)_{k\geq 0} \to 0$.

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Treppenfunktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (mit $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset D$, falls D offen ist), so dass,

$$\|f - f_k\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \|f_k - \varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{also} \quad \|f - \varphi\|_p \leq \|f - f_k\|_p + \|f_k - \varphi\|_p < \varepsilon\,.$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Ist $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Treppenfunktion, so ist $(\varphi \,|\, D) \in \mathfrak{L}^p(D)$, und daher folgt die Behauptung aus Satz 13.5. □

Satz 13.7 (Mittelsatz). *Sei D σ-kompakt, $f \in \mathfrak{L}^1(D)$ und $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ist für jede messbare Menge $A \subset D$*

$$\Big|\int_A f\Big| \;\leq\; b\,v(A)\,,$$

so folgt $\|f\|_\infty \leq b$.

Beweis. D besitzt eine Ausschöpfung mit kompakten Mengen, und daher genügt es, zu zeigen: Für jede kompakte Menge $K \subset D$ ist $\big\{\boldsymbol{x} \in K \,\big|\, |f(\boldsymbol{x})| > b\big\}$ eine Nullmenge.

Sei $K \subset D$ kompakt. Dann ist

$$\big\{\boldsymbol{x} \in D \,\big|\, |f(\boldsymbol{x})| > b\big\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{mit} \quad A_n = \Big\{\boldsymbol{x} \in D \,\Big|\, |f(\boldsymbol{x})| \geq b + \frac{1}{n}\Big\},$$

und wir nehmen an, diese Menge sei keine Nullmenge. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass A_n keine Nullmenge ist. A_n ist aber messbar, und daher folgt

$$b\,v(A) \;\ge\; \Big|\int_{A_n} f\Big| \;\ge\; \Big(b + \frac{1}{n}\Big)\,v(A_n)\,, \quad \text{ein Widerspruch.} \qquad \square$$

13.2. Die L^p-Räume und ihre Dualräume

In diesem Abschnitt sei D σ-kompakt, es seien $p \in [1, \infty]$ und

$$q = \frac{p}{p-1}\,, \quad \text{falls} \quad p \in \mathbb{R}_{>1}\,, \quad q = 1\,, \quad \text{falls} \quad p = \infty \quad \text{und} \quad q = \infty\,, \quad \text{falls} \quad p = 1\,.$$

Definition 13.4. Man sagt, zwei Funktionen $f, g \colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ *stimmen im Maß fast überall überein*, $f =_\mu g$, wenn $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \ne g(\boldsymbol{x})\}$ eine Nullmenge ist.
Für eine Funktion $f \colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ sei $[f]_\mu = \{g \colon D \to \overline{\mathbb{C}} \mid [g]_\mu = [f]_\mu\}$. Wir definieren

$$L^p(D) = \{[f]_\mu \mid f \in \mathfrak{L}^p(D)\}\,.$$

Für $[f]_\mu, [g]_\mu \in L^p(D)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ sei

$$\big\|[f]_\mu\big\|_p = \|f\|_p\,, \quad [f]_\mu + [g]_\mu = [f+g]_\mu \quad \text{und} \quad \lambda[f]_\mu = [\lambda f]_\mu$$

(diese Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Repräsentanten, siehe Bemerkung 2).

Bemerkungen:

1. $=_\mu$ ist eine Äquivalenzrelation, das heißt, für alle Funktionen $f, g, h \colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ gilt:
   a. $f =_\mu g$, **b**. $\big[\, f =_\mu g \implies g =_\mu f \,\big]$, **c**. $\big[\, f =_\mu g \;\wedge\; g =_\mu h \implies f =_\mu h \,\big]$.
   Insbesondere folgt: $[f]_\mu = [g]_\mu$, falls $f =_\mu g$, und $[f]_\mu \cap [g]_\mu = \emptyset$, falls $f \ne_\mu g$.
2. Seien $f, f_1, g, g_1 \colon D \to \overline{\mathbb{C}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $f =_\mu f_1$ und $g =_\mu g_1$. Dann folgt $f + g =_\mu f_1 + g_1$, $fg =_\mu f_1 g_1$, $\lambda f =_\mu \lambda g$ und $\|f\|_p = \|f_1\|_p$.
3. Seien $f, g \colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ und $f =_\mu g$. Dann ist $\big[f \in \mathfrak{L}^p(D) \iff g \in \mathfrak{L}^p(D) \big]$. f ist genau dann über D integrierbar, wenn g über D integrierbar ist, und dann folgt
   $$\int_D f = \int_D g\,.$$
   Insbesondere gilt für alle

Definition 13.5. Für einen $\mathbb{C}$-Banachraum X nennt man

$$X' = \{\varphi \in \mathsf{L}(X, \mathbb{C}) \mid \varphi \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear}\}$$

den (*komplexen*) *Dualraum* von X.
X' ist ebenfalls ein $\mathbb{C}$-Banachraum.

Satz 13.8. $L^p(D)$ *ist ein* $\mathbb{C}$*-Banachraum, und es gilt*:

1. *Für alle* $f, g \in \mathfrak{L}^p(D)$ *ist* $[f]_\mu - [g]_\mu = [f-g]_\mu$ *und insbesondere* $-[f]_\mu = [-f]_\mu$.
2. *Sei* $(f_k)_{k \ge 0}$ *eine Folge in* $\mathfrak{L}^p(D)$ *und* $f \in \mathfrak{L}^p(D)$.

(a) $\big([f_k]_\mu\big)_{k\geq 0} \to [f]_\mu$ *in* $L^p(D) \iff \big(\|f_n - f\|\big)_{n\geq 0} \to 0.$

(b) $\big([f_k]_\mu\big)_{k\geq 0}$ *ist eine Cauchyfolge in* $L^p(D) \iff (f_k)_{k\geq 0}$ *ist eine* L^p*-Cauchyfolge.*

Beweis. Auf Grund der Definition ist

$$+\colon \begin{cases} L^p(D)\times L^p(D) & \to & L^p(D) \\ \big([f]_\mu, [g]_\mu\big) & \mapsto & [f+g]_\mu \end{cases}$$

eine kommutatitve und assoziative Verknüpfung auf $L^p(D)$ mit $[0]_\mu$ also neutralem Element, und wir zeigen zuerst:

A. $\big(\forall f \in \mathfrak{L}^p(D)\big)\ \ [f]_\mu + [-f]_\mu = [0]_\mu$.

Beweis von **A.** Sei $f \in \mathfrak{L}^p(D)$. Dann ist $N = \{\boldsymbol{x} \in D \mid f(\boldsymbol{x}) = \infty\}$ eine Nullmenge, und $(\forall \boldsymbol{x} \in D \setminus N)\ \ [f+(-f)](\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + (-f)(\boldsymbol{x}) = 0$, also $[f]_\mu + [-f]_\mu = [f+(-f)]_\mu = [0]_\mu$. $\square$

Auf Grund von **A** ist $L^p(D)$ eine additive abelsche Gruppe, und für $f,\, g \in \mathfrak{L}^p(D)$ ist $-[f]_\mu = [-f]_\mu$, also auch $[f-g]_\mu = [f+(-g)]_\mu = [f]_\mu + [-g]_\mu = [f]_\mu + (-[g]_\mu) = [f]_\mu - [g]_\mu$. Damit ist 1. gezeigt, und 2. folgt unmittelbar aus den entsprechenden Definitionen.

Offensichtlich ist

$$\begin{cases} \mathbb{C}\times L^p(D) & \to & L^p(D) \\ (\lambda, [f]_\mu) & \mapsto & [\lambda f]_\mu \end{cases}$$

eine $\mathbb{C}$-lineare Struktur auf $L^p(D)$, und daher ist $L^p(D)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Für alle $f,\, g \in \mathfrak{L}^p(D)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ und $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\, \|f\|_p$, also auch

$$\big\|[f]_\mu + [g]_\mu\big\|_p \leq \big\|[f]_\mu\big\|_p + \big\|[g]_\mu\big\|_p \quad \text{und} \quad \big\|\lambda[f]_\mu\big\|_p = |\lambda|\, \big\|[f]_\mu\big\|_p\,.$$

Ist $\big\|[f]_\mu\big\|_p = \|f\|_p = 0$, so ist $f =_\mu 0$, also auch $[f]_\mu = [0]_\mu$. Daher ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $L^p(D)$, und es bleibt die Vollständigkeit von $L^p(D)$ zu zeigen. Nach 2. und Satz 13.2 ist dazu zu zeigen:

> Zu jeder L^p-Cauchyfolge $(f_k)_{k\geq 0}$ in $\mathfrak{L}^p(D)$ gibt es eine Funktion $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ mit $(\|f - f_k\|_p)_{k\geq 0} \to 0$.

FALL 1: $p < \infty$. Im Falle $p = 1$ folgt die Behauptung aus Satz 12.1 und im Falle $p > 1$ aus Satz 13.5.

FALL 2: $p = \infty$. Sei $(f_k)_{k\geq 0}$ eine L^∞-Cauchyfolge in $\mathfrak{L}^\infty(D)$ und

$$N = \bigcup_{k\geq 0} \big\{\boldsymbol{x} \in D \;\big|\; |f_k(\boldsymbol{x})| > \|f_k\|_\infty \big\} \cup \bigcup_{j>k\geq 0} \big\{\boldsymbol{x} \in D \;\big|\; |f_j(\boldsymbol{x}) - f_k(\boldsymbol{x})| > \|f_j - f_k\|_\infty \big\}.$$

Nach Satz 13.1 ist N eine Nullmenge, und für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $\widetilde{f_k}\colon D \to \mathbb{C}$ durch

$$\widetilde{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\,, \quad \text{falls } \boldsymbol{x} \in D \setminus N\,, \quad \text{und} \quad \widetilde{f}(\boldsymbol{x}) = 0\,, \quad \text{falls } \boldsymbol{x} \in N\,.$$

Dann ist $(\forall j > k \geq 0)\ \ \big[\,\widetilde{f_k} =_\mu f_k \ \ \wedge\ \ \|f_j - f_k\|_\infty = \|\widetilde{f_j} - \widetilde{f_k}\|_\infty = \|\widetilde{f_j} - \widetilde{f_k}\|_D\,\big]$. Nach Satz 4.20 gibt es eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit $(\widetilde{f_k})_{k\geq 0} \rightrightarrows f$. Dann folgt $(\|f - \widetilde{f_k}\|_D)_{k\geq 0} \to 0$, und wegen $\|f - f_k\|_\infty = \|f - \widetilde{f_k}\|_\infty \leq \|f - \widetilde{f_k}\|_D$ ist auch $(\|f - f_k\|_\infty)_{k\geq 0} \to 0$. $\square$

Satz 13.9. *Sei* $p \in \mathbb{R} > 1$ *und* $\lambda \in L^p(D)'$. *Dann gibt es ein* $f \in \mathfrak{L}^p(D)$ *mit* $\|f\|_p = 1$ *und* $\lambda([f]_\mu) = \|\lambda\|$.

Beweis. Sei $\lambda_0\colon \mathfrak{L}^p(D) \to \mathbb{C}$ definiert durch $\lambda_0(f) = \lambda([f]_\mu)$. Dann ist

$$\|\lambda\| = \sup\big\{|\lambda_0(f)| \;\big|\; f \in \mathfrak{L}^p(D),\ \|f\|_p = 1\big\}\,,$$

und daher gibt es eine Folge $(f_k')_{k\ge1}$ in $\mathfrak{L}^p(D)$, so dass $\big(\lambda_0(f_k')\big)_{k\ge1} \to \|\lambda\|$, und

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ \ \|f_k'\|_p = 1 \ \wedge\ |\lambda_0(f_k')| > \frac{1}{2}\,\|\lambda\|\,.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$f_k \;=\; \frac{\overline{\lambda_0(f_k')}}{|\lambda_0(f_k')|}\, f_k' \in \mathfrak{L}^p(D)\,,$$

also $|f_k| = |f_k'|$, $\|f_k\|_p = \|f_k'\|_p = 1$,

$$\lambda_0(f_k) = |\lambda_0(f_k')| > \frac{1}{2}|\lambda| \quad \text{und} \quad \big(\lambda_0(f_k)\big)_{k\ge1} \to \|\lambda\|\,.$$

Es genügt nun, zu zeigen, dass $(f_k)_{k\ge1}$ eine L^p-Chauchyfolge ist. Denn dann gibt es nach Satz 13.5 eine Funktion $f \in \mathfrak{L}^p(D)$ mit $\big(\|f - f_k\|_p\big)_{k\ge1} \to 0$, also auch $\big(\|f_k\|_p\big)_{k\ge1} \to \|f\|_p$, $\|f\|_p = 1$, und $\big(\lambda([f_k]_\mu)\big)_{k\ge1} = \big(\lambda_0(f_k)\big)_{k\ge1} \to \lambda([f]_\mu)$, und daher $\lambda([f]_\mu) = \|\lambda\|$.

Wir nehmen an, $(f_k)_{k\ge1}$ sei keine Cauchyfolge. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$(\forall l \in \mathbb{N})\ (\exists \nu, \mu \ge l)\ \ \|f_\nu - f_\mu\|_p \ge \alpha\,.$$

Seien streng monoton wachsende Folgen $(k_i)_{i\ge0}$, $(l_i)_{i\ge0}$ rekursiv definiert durch $k_0 = l_0 = 1$ und

$$\begin{aligned} k_{i+1} &= \min\big\{k \in \mathbb{N} \;\big|\; k > \max(k_i, l_i),\ (\exists \mu > k)\ \ \|f_\mu - f_k\|_p \ge \alpha\big\}\,, \\ l_{i+1} &= \min\big\{l \in \mathbb{N} \;\big|\; l > k_{i+1},\ \|f_l - f_{k_{i+1}}\|_p \ge \alpha\big\}\,. \end{aligned}$$

Dann ist für alle $i \in \mathbb{N}$ $\|f_{k_i} - f_{l_i}\|_p \ge \alpha$, und mit Satz 13.4 folgt

$$\begin{aligned} \Big\|\frac{f_{k_i} + f_{l_i}}{2}\Big\|_p^p + \Big\|\frac{f_{k_i} - f_{l_i}}{2}\Big\|_p^p &\le \frac{\|f_{k_i}\|_p^p + \|f_{l_i}\|_p^p}{2} = 1, \quad \text{falls} \quad p \ge 2\,, \\ \Big\|\frac{f_{k_i} + f_{l_i}}{2}\Big\|_p^q + \Big\|\frac{f_{k_i} - f_{l_i}}{2}\Big\|_p^q &\le \Big(\frac{\|f_{k_i}\|_p^p + \|f_{l_i}\|_p^p}{2}\Big)^{1/(p-1)} = 1, \quad \text{falls} \quad p < 2\,, \end{aligned}$$

also in jedem Falle (mit $r = p$, falls $p \ge 2$, und $r = q$, falls $p < 2$)

$$\Big\|\frac{f_{k_i} + g_{l_i}}{2}\Big\|_p^r \;\le\; 1 - \Big\|\frac{f_{k_i} - f_{l_i}}{2}\Big\|_p^r \;<\; 1 - \Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^r\,,$$

und daher gibt es ein $\beta \in (0,1)$ mit

$$\Big\|\frac{f_{k_i} + f_{l_i}}{2}\Big\|_p < 1 - \beta\,.$$

Für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $\|f_{k_i} + f_{l_i}\|_p \ne 0$. Wäre nämlich $\|f_{k_i} + f_{l_i}\|_p = 0$, so wäre die Menge $\{\boldsymbol{x} \in D \mid f_{k_i}(\boldsymbol{x}) \ne -f_{l_i}(\boldsymbol{x})\}$ eine Nullmenge, also $[f_{k_i}]_\mu = -[f_{l_i}]_\mu$ und $\lambda_0(f_{k_i}) = -\lambda_0(f_{l_i})$, ein Widerspruch. Daher ist

$$g_i \;=\; \frac{1}{\|f_{k_i} + f_{l_i}\|_p}\big(f_{k_i} + f_{l_i}\big) \in \mathfrak{L}^p(D)$$

und

$$\lambda_0(g_i) = \Big\|\frac{f_{k_i} + f_{l_i}}{2}\Big\|_p^{-1} \lambda_0\Big(\frac{f_{k_i} + f_{l_i}}{2}\Big) > \frac{1}{1-\beta}\ \frac{\lambda_0(f_{k_i}) + \lambda_0(f_{l_i})}{2} \ \to\ \frac{\|\lambda\|}{1-\beta}\,,$$

anderseits aber $|\lambda_0(g_i)| \le \|\lambda\|\,\|g_i\|_p = \|\lambda\|$, ein Widerspruch. $\square$

Satz 13.10 (Dualitätssatz für die L^p-Räume)**.** *Für $g \in \mathfrak{L}^q(D)$ sei*

$$\lambda_g \colon L^p(D) \to \mathbb{C} \quad \textit{definiert durch} \quad \lambda_g\big([f]_\mu\big) = \int_D fg\,.$$

Dann ist $\lambda_g \in L^p(D)'$, $\|\lambda_g\| = \|g\|_q$, *die Abbildung*

$$\lambda^* \colon L^q(D) \to L^p(D)'\,, \quad \textit{definiert durch} \quad \lambda^*\big([g]_\mu\big) = \lambda_g\,,$$

ist ein $\mathbb{C}$*-Vekorraum-Monomorphismus, für alle* $g \in \mathfrak{L}^q(D)$ *ist* $\|\lambda^*\big([g]_\mu\big)\| = \big\|[g]_\mu\big\|_q$, *und im Falle* $p < \infty$ *ist* λ^* *eine Isometrie.*

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten und erfordert eine Reihe von Hilfsbetrachtungen. Er wird erst nach Satz 13.11 zu Ende geführt werden.
Für $f \in \mathfrak{L}^p(D)$ und $g \in \mathfrak{L}^q(D)$ hängt das Integral

$$\int_D fg$$

nur von den Äquivalenzklassen $[f]_\mu \in L^p(D)$ und $[g]_\mu \in L^p(D)$ ab, und offensichtlich ist λ_g $\mathbb{C}$-linear. Wegen

$$\big|\lambda_g([f]_\mu)\big| = \Big|\int_D fg\Big| \le \|fg\|_1 \le \|f\|_p\,\|g\|_q = \big\|[f]_\mu\big\|_p\,\big\|[g]_\mu\big\|_q$$

ist $\lambda_g \in L^p(D)'$, und $\|\lambda_g\| \le \|g\|_q$. Für g_1, $g_2 \in \mathfrak{L}^q(D)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ ist $\lambda_{g_1+g_2} = \lambda_{g_1} + \lambda_{g_2}$ und $\lambda_{\alpha g_1} = \alpha\lambda_{g_1}$. Daher ist λ^* $\mathbb{C}$-linear.
Als Nächstes zeigen wir:

I. Für alle $g \in \mathfrak{L}^q(D)$ ist $\|\lambda_g\| = \|g\|_q$ (dann ist auch $\|\lambda^*\big([g]_\mu\big)\| = \big\|[g]_\mu\big\|_q$ und daher λ^* ein Monomorphismus).

Beweis von **I.** Sei $g \in \mathfrak{L}^q(D)$. Wir müssen $\|g\|_q \le \|\lambda_g\|$ zeigen und können $g \ne 0$ annehmen.
FALL 1: $p \ne 1$. Sei $f = |g|^{q-2}\overline{g} \colon D \to \overline{\mathbb{C}}$. Dann ist f messbar. Im Falle $p = \infty$ ist $\|f\|_\infty = 1$, und im Falle $p \ne \infty$ ist $\|f\|_p = \big\||f|^p\big\|_1^{1/p} = \big\||g|^{(q-1)p}\big\|_1^{1/p} = \|g\|_q^{q/p} = \|g\|_q^{q-1} < \infty$. Daher ist $f \in \mathfrak{L}^p(D)$. Wegen

$$\lambda_g(f) = \int_D fg = \int_D |g|^q = \|g\|_q^q = \|f\|_p\,\|g\|_q \le \|\lambda_g\|\,\|f\|_p$$

folgt die Behauptung.
FALL 2: $p = 1$. Für jede messbare Menge $A \subset D$ ist $1_A \in \mathfrak{L}^1(D)$ und

$$|\lambda_g(1_A)| = \Big|\int_D 1_A g\Big| \le \|\lambda_g\|\,\|1_A\|_1 = \|\lambda_g\|\,v(A)\,,$$

und nach Satz 13.7 ist $\|g\|_\infty \le \|\lambda_g\|$. □

Satz 13.11. *Sei* $p \in \mathbb{R}_{\ge 1}$, $f_0 \in \mathcal{L}^p(D)$ *und* $\|f_0\|_p = 1$. *Für* $f \in \mathcal{L}^p(D)$ *sei* $\psi_f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $\psi_f(t) = \|tf + f_0\|_p$.

1. *Es ist* $|f_0|^{p-2}\overline{f}_0 \in \mathcal{L}^q(D)$, $|f_0|^{p-2}\Re(f\overline{f}_0) \in \mathcal{L}^1(D)$, ψ_f *ist differenzierbar in* 0, *und*

$$\psi_f'(0) = \int_D |f_0|^{p-2}\,\Re(f\overline{f}_0)\,.$$

2. *Sei* $\lambda \in L^p(D)'$ *und* $\lambda([f_0]_\mu) = \|\lambda\| > 0$. *Dann ist für alle* $f \in \mathcal{L}^p(D)$

$$\lambda([f]_\mu) = \int_D |f_0|^{p-2}\,\overline{f}_0 f\,.$$

Beweis. Die Funktionen $|f_0|^{p-2}\overline{f}_0$ und $|f_0|^{p-2}\,\Re(f\overline{f}_0)$ sind messbar,

$$\big\||f_0|^{p-2}\overline{f}_0\big\|_q = \big\||f_0|^{p-1}\big\|_q < \infty\,,$$

und wegen $\big||f_0|^{p-2}\Re(f\overline{f}_0)\big| \le |f_0|^p$ ist $\big\||f_0|^{p-2}\,\Re(f\overline{f}_0)\big\|_1 \le \big\||f_0|^p\big\|_1 = \|f_0\|_p^p \le 1$. Damit folgt $|f_0|^{p-2}\overline{f}_0 \in \mathfrak{L}^q(D)$ und $|f_0|^{p-2}\,\Re(f\overline{f}_0) \in \mathfrak{L}^1(D)$.

Zum Nachweis der Differenzierbarkeit von ψ_f zeigen wir zuerst:

A. Seien $A, B \in \mathbb{C}$, $A \ne 0$, $p \in \mathbb{R}_{>1}$, und sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(t) = |tA+B|^p$. Dann ist h differenzierbar,

$$h'(t) = p\,|tA+B|^{p-2}\big(t|A|^2 + \Re(A\overline{B})\big)\,,\quad \text{falls } t \ne -\frac{B}{A}\,,\quad \text{und}\quad h'\Big(-\frac{B}{A}\Big) = 0\,.$$

Insbesondere ist $\big(\forall t \in [-1,1]\big)\ |h'(t)| \le p\,(|A|+|B|)^{p-1}|A|$.

Beweis von **A.** Aus $h(-B/A) = 0$ folgt

$$h'\Big(-\frac{B}{A}\Big) \;=\; \lim_{t\to -B/A}\frac{h(t)}{t+B/A} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{h(x-B/A)}{x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{|Ax|^p}{x} = 0\,.$$

Für $t \ne -B/A$ ist

$$h(t) \;=\; \big[(tA+B)(t\overline{A}+\overline{B})\big]^{p/2} \;=\; \big[\,t^2|A|^2 + 2t\Re(A\overline{B}) + |B|^2\,\big]^{p/2}\,.$$

Daher folgt $h'(t) = p|tA+B|^{p-2}\big(t|A|^2 + \Re(A\overline{B})\big)$, und das beweist **A.**

Die Menge $N = \{\boldsymbol{x} \in D \mid f(\boldsymbol{x}) = \infty \ \vee\ f_0(\boldsymbol{x}) = \infty\}$ ist eine Nullmenge. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$h(\boldsymbol{x},t) = \big|tf(\boldsymbol{x}) + f_0(\boldsymbol{x})\big|^p\,,\quad \text{falls}\quad \boldsymbol{x} \in D\setminus N\,,\quad \text{und}\quad h(\boldsymbol{x},t) = 0\,,\quad \text{falls}\quad \boldsymbol{x} \in N\,.$$

Dann ist

$$\psi_f(t) = \Big(\int_D h(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}\Big)^{1/p}\,,$$

für $\boldsymbol{x} \in D\setminus N$ ist $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\cdot})$ differenzierbar,

$$\frac{d}{dt}h(\boldsymbol{x},t) = p\,|tf(\boldsymbol{x}) + f_0(\boldsymbol{x})|^{p-2}\big(t\,|f(\boldsymbol{x})|^2 + \Re\{(f(\boldsymbol{x})\overline{f_0(\boldsymbol{x})}\}\big)\,,\quad \text{falls}\quad tf(\boldsymbol{x}) + f_0(\boldsymbol{x}) \ne 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}h(\boldsymbol{x},t) = 0\,,\quad \text{falls}\quad tf(\boldsymbol{x}) + f_0(\boldsymbol{x}) = 0\,,$$

und für $t \in [-1,1]$ ist

$$\Big|\frac{d}{dt}h(\boldsymbol{x},t)\Big| \;\le\; p\,\big[|f(\boldsymbol{x})| + |f_0(\boldsymbol{x})|\big]^{p-1}|f(\boldsymbol{x})|\,.$$

Wegen $|f| + |f_0| \in \mathfrak{L}^p(D)$ ist $(|f| + |f_0|)^{p-1} \in \mathfrak{L}^q(D)$ und daher $p\,(|f|+|f_0|)^{p-1}|f| \in \mathfrak{L}^1(D)$. Nach Satz 13.11 ist ψ_f differenzierbar in 0, und

$$\begin{aligned}
\psi_f'(0) \;&=\; \frac{1}{p}\Big(\int_D h(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x}\Big)^{1/p-1}\Big[p\int_D |f_0|^{p-2}\Re(f\overline{f}_0)\Big] \\
&=\; \Big(\int_D |f_0|^p\Big)^{1/p-1}\int_D |f_0|^{p-2}\Re(f\overline{f}_0) \;=\; \int_D |f_0|^{p-2}\Re(f\overline{f}_0)\,.
\end{aligned}$$

2. Definiere $\lambda_0 \colon \mathfrak{L}^p(D) \to \mathbb{C}$ durch

$$\lambda_0(f) = \frac{1}{\|\lambda\|}\,\lambda\big([f]_\mu\big)\,.$$

Dann ist $\lambda_0(f_0) = 1$, und für alle $f \in \mathfrak{L}^p(D)$ ist $|\lambda_0(f)| \le \|f\|_p$. Sei $f \in \mathfrak{L}^p(D)$. Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\lambda_0\big(f_0 + z[f - \lambda_0(f)f_0]\big) = \lambda_0(f_0) + z\big[\lambda_0(f) - \lambda_0(f)\lambda_0(f_0)\big] \;=\; 1 \;\le\; \big\|f_0 + z[f - \lambda_0(f)f_0]\big\|_p\,.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $1 + t\lambda_0(f) \neq 0$ ist

$$f_0 + tf = \big(1 + t\lambda_0(f)\big)\Big[f_0 + \frac{t}{1 + t\lambda_0(f)}\big(f - \lambda_0(f)f_0\big)\Big]$$

und

$$\Big\|f_0 + \frac{t}{1 + t\lambda_0(f)}\big(f - \lambda_0(f)f_0\big)\Big\|_p \ge 1\,.$$

Damit folgt $\|f_0 + tf\|_p - \|f_0\|_p \ge |1 + t\lambda_0(f)| - 1 \ge t\Re\lambda_0(f)$, also für $t \neq 0$

$$\frac{\|f_0 + tf\|_p - \|f_0\|_p}{t} \quad \begin{cases} \ge\; \Re\lambda_0(f), & \text{falls} \quad t > 0\,, \\ \le\; \Re\lambda_0(f), & \text{falls} \quad t < 0\,. \end{cases}$$

und

$$\psi_f'(0) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{\|f_0 + tf\|_p - \|f_0\|_p}{t} = \Re\lambda_0(f)\,.$$

In gleicher Weise folgt $\psi_{-if}'(0) = \Re\lambda_0(-if) = \Re\big\{-i\lambda_0(f)\big\} = \Im\lambda_0(f)$ und daher (nach 1.)

$$\begin{aligned} \lambda_0(f) = \psi_f'(0) + i\psi_{-if}'(0) &= \int_D |f_0|^{p-2}\Re(f\overline{f}_0) + i\int_D |f_0|^{p-2}\Re(-if\overline{f}_0) \\ &= \int_D |f_0|^{p-2}\Big[\Re\big(f\overline{f}_0\big) + i\Re\big(-if\overline{f}_0\big)\Big] = \int_D |f_0|^{p-2} f\overline{f}_0\,. \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 13.10 *für* $p \in \mathbb{R}_{>1}$. Es ist nur noch die Surjektivität von λ^* zu zeigen. Sei $\lambda \in L^p(D)'$. Nach Satz 13.9 gibt es ein $f_0 \in \mathfrak{L}^p(D)$ mit $\lambda\big([f_0]_\mu\big) = \|\lambda\|$, und nach Satz 13.11 ist $g = |f_0|^{p-2}\overline{f}_0 \in \mathfrak{L}^p(D)$ und $\lambda = \lambda^*([g]_\mu)$. □

Beweis von Satz 13.10 *für* $p = 1$. Sei $\lambda \in L^1(D)'$.

FALL 1: D ist kompakt.

Dann ist $\mathfrak{L}^2(D) \subset \mathfrak{L}^1(D)$, und für alle $f \in \mathfrak{L}^2(D)$ ist

$$|\lambda([f]_\mu)| \le \|\lambda\|\,\|f\|_1 \le \|\lambda\|\,\|f\|_2\, v(D)^{1/2}\,.$$

Daher ist die Einschränkung $\lambda \,|\, L^2(D) \in L^2(D)'$, und nach dem bereits Bewiesenen gibt es ein $g \in \mathfrak{L}^2(D)$ mit $\lambda \,|\, L^2(D) = \lambda_g$. Für jede messbare Menge $A \subset D$ ist

$$\big|\lambda([\chi_A]_\mu)\big| \;=\Big|\int_A g\Big| \;\le\; \|\lambda\|\, v(A)\,.$$

Nach Satz 13.7 folgt $\|g\|_\infty \le \|\lambda\| < \infty$, also $g \in \mathfrak{L}^\infty(D)$, und wir zeigen $\lambda = \lambda_g \in L^1(D)'$.

Sei $f \in \mathfrak{L}^1(D)$. Dann gibt es eine Folge $(\varphi_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C})_{k\ge 1}$ von Treppenfunktionen, so dass $(\|f_D - \varphi_k\|_1)_{k\ge 0} \to 0$, also auch $(\|f - (\varphi_k|D)\|_1)_{k\ge 0} \to 0$. Wegen $\varphi_k \,|\, D \in \mathfrak{L}^2(D)$ folgt

$$\lambda\big([\varphi_k]_\mu\big) = \int_D \varphi_k g\,,$$

und wir erhalten

$$\Big|\lambda\big([f]_\mu\big)-\int_D fg\Big| \le \Big|\lambda\big([f]_\mu\big)-\lambda\big([\varphi_k]_\mu\big)\Big|+\Big|\int_D \varphi_k g-\int_D fg\Big|$$

$$\le \|\lambda\|\|f-\varphi_k\|_1+\|\varphi_k-f\|_1\|g\|_\infty \to 0\,,\quad \text{also}\ \ \lambda\big([f]_\mu\big)=\int_D fg=\lambda_g\big([f]_\mu\big)\,.$$

FALL 2: D beliebig.

Sei $(D_k)_{k\ge 0}$ eine Ausschöpfung von D mit kompakten Mengen. Für $k\in\mathbb{N}_0$ sei $\lambda_k\in L^1(D_k)'$ definiert durch

$$\lambda_k([h]_\mu)\ =\lambda([h_{D_k}\,|\,D]_\mu)\quad\text{für}\quad (h\colon D_k\to\overline{\mathbb{C}})\in\mathfrak{L}^1(D_k)\,.$$

Dann ist $|\lambda_k([h]_\mu)|\le\|\lambda\|\,\|h\|_1$, also $\|\lambda_k\|\le\|\lambda\|$, und nach FALL 1 gibt es eine Funktion $g_k\in\mathfrak{L}^\infty(D_k)$ mit $\lambda_k=\lambda_{g_k}$, also $\|g_k\|_\infty=\|\lambda_k\|\le\|\lambda\|$. Wir zeigen:

B. $(\forall k\in\mathbb{N}_0)\ \ g_{k+1}\,|\,D_k=_\mu g_k$.

Beweis von **B.** Sei $k\in\mathbb{N}_0$ und $g_k'=g_{k+1}\,|\,D_k$. Für $h\in\mathfrak{L}^1(D_k)$ ist $h_D\,|\,D_{k+1}\in\mathfrak{L}^1(D_{k+1})$ und $\lambda_k([h]_\mu)=\lambda_{k+1}([h_D\,|\,D_{k+1}]_\mu)$, also

$$\int_{D_k} hg_k=\int_{D_{k+1}}(h_D\,|\,D_{k+1})g_{k+1}=\int_{D_k} h(g_{k+1}\,|\,D_k)\,,$$

und daher $\lambda_{g_k}=\lambda_{g_{k+1}|D_k}\in L^1(D_k)'$. Nach **I.** folgt daraus $g_k=_\mu g_{k+1}\,|\,D_k$. Sei

$$N=\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}\big\{\boldsymbol{x}\in D_k\ \big|\ g_{k+1}(\boldsymbol{x})\ne g_k(\boldsymbol{x})\big\}\subset D\,.$$

Dann ist N eine Nullmenge, und für alle $\boldsymbol{x}\in D\setminus N$ und $k,l\in\mathbb{N}_0$ ist $g_k(\boldsymbol{x})=g_l(\boldsymbol{x})$. Sei nun $g\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$g(\boldsymbol{x})=0\,,\quad\text{falls}\quad \boldsymbol{x}\in N\,,\quad\text{und}\quad g(\boldsymbol{x})=g_k(\boldsymbol{x})\,,\quad\text{falls}\quad \boldsymbol{x}\in D_k\setminus N\,.$$

Dann ist $g\,|\,D_k=_\mu g_k$, also $g\,|\,D_k\in\mathfrak{L}^\infty(D_k)$. Daher ist g messbar, und

$$\big\{\boldsymbol{x}\in D\ \big|\ |g(x)|>\|\lambda\|\big\}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\big\{\boldsymbol{x}\in D_k\ \big|\ |g_k(\boldsymbol{x})|>\|\lambda\|\big\}$$

ist eine Nullmenge. Daher folgt $\|g\|_\infty\le\|\lambda\|$ und $g\in\mathfrak{L}^\infty(D)$.

Sei nun $f\in\mathfrak{L}^1(D)$ und $f_k=f_{D_k}$. Dann ist für alle $\boldsymbol{x}\in D\setminus N$

$$\big(f_k(\boldsymbol{x})\big)_{k\ge0}\to f(\boldsymbol{x})\,,\quad \big(f_k(\boldsymbol{x})g_k(\boldsymbol{x})\big)_{k\ge0}\to f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\,,\quad |f_k(\boldsymbol{x})|\le|f(\boldsymbol{x})|$$

und $|f_k(\boldsymbol{x})g_k(\boldsymbol{x})|\le|f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})|$. Daher folgt aus Satz 12.4

$$\Big(\int_D f_kg_k\Big)_{k\ge0}\to\int_D fg\quad\text{und}\quad \big(\|f_k-f\|_1\big)_{k\ge0}\to 0\,.$$

Wegen $\big|\lambda([f]_\mu)-\lambda_k([f_k]_\mu)\big|=\big|\lambda([f]_\mu)-\lambda([f_k]_\mu)\big|\le\|\lambda\|\,\|f-f_k\|_1$ folgt

$$\Big|\lambda([f]_\mu)-\int_D fg\Big|\ \le\ \big|\lambda([f]_\mu)-\lambda_k([f_k]_\mu)\big|\ +\ \Big|\lambda_k([f_k]_\mu)-\int_{D_k} f_kg_k\Big|+\Big|\int_{D_k} f_kg_k-\int_D fg\Big|\to 0\,.\quad\square$$