LAK-ComputerMathematik

Projekt **TA-1**

Ulam Folge

Stand: 29. Oktober 2025, 15:12

Konsultationen zum Projekt: nach Terminvereinbarung (E-mail)
Konsultationen zum Projekt: nach Terminvereinbarung (E-mail)
Konsultationen zum Projekt: nach Terminvereinbarung (E-mail)

Ulam-Folge[1]: Im Jahr 1964 stellte der polnische Mathematiker Stanisław Ulam[2] eine Folge von ganzen Zahlen vor, deren mysteriöse sogenannte Quasi-Periodizität wir uns bis heute nicht erklären können. Diese Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die in der Fachwelt als (u, v)-Ulam-Folge bekannt ist, definieren wir rekursiv mit

$$a_1 := u, a_2 := v$$

und a_n als die kleinste natürliche Zahl größer als a_{n-1}, die **eindeutig** als Summe zweier Folgeglieder $a_i + a_j$ mit $i, j < n$ und $i \neq j$ gebildet werden kann.

Für ersten vier Glieder der $(1, 2)$-Ulam-Folge berechnen wir demnach

$$a_1 = u := 1, \qquad a_2 = v := 2$$
$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3, \qquad a_4 = a_1 + a_3 = 1 + 3 = 4.$$

Da wir 5 sowohl durch $a_1 + a_4 = 1 + 4 = 5$ als auch durch $a_2 + a_3 = 2 + 3 = 5$ darstellen und somit **nicht eindeutig** als Summe zweier bereits berechneter Folgeglieder bilden können, folgt $a_5 = 2 + 4 = 6$ als fünfte $(1, 2)$-Ulam-Zahl der Folge.

1. Implementieren Sie eine Funktion `count_distinct_sums(summands, sum)`, die die Anzahl der Summanden (s_i, s_j), für die `sum` $= s_i + s_j$ mit $s_i, s_j \in$ `summands` und $i \neq j$ gilt, bestimmt und an das aufrufende Programm zurückgibt.

2. Nutzen Sie die von Ihnen bereits implementierte Funktion `count_distinct_sums` um eine weitere Funktion `compute_ulam_numbers(upper_bound)` zu schreiben, die beginnend mit $u := 1$ und $v := 2$ alle darauffolgenden Folgeglieder kleiner als `upper_bound` der $(1, 2)$-Ulam-Folge berechnet und an das aufrufende Programm retourniert.

3. Testen Sie Ihre Funktion `compute_ulam_numbers` indem Sie die für verschiedene Werte von `upper_bound` zurückgegebenen Zahlenfolgen mit der Folge A002858[3] der „On-Line Encyclopedia of Integer Sequences“ (OEIS) vergleichen.

4. Erweitern Sie Ihre Funktion `compute_ulam_numbers`, sodass Sie u und v, mit $u < v$, der allgemeinen (u, v)-Ulam-Folge als Argumente `u` und `v` der Funktion `compute_generalized_ulam_numbers(u, v, upper_bound)` übergeben können. Bestimmen Sie mithilfe dieser Funktion in weiterer Folge alle Glieder kleiner als 100 der $(3, 8)$-Ulam-Folge.

5. **Bonus:** Die Methode, sukzessive die Anzahl von eindeutigen Summen potentiell nächster Folgeglieder zu bestimmen, ohne auf Ergebnisse bereits durchgeführte Berechnungen zurückzugreifen, ist nicht sonderlich effizient. Überprüfen Sie, ob 99 799 eine $(1, 2)$-Ulam-Zahl ist, indem Sie Ihre implementierte Funktionen `count_distinct_sums` und `compute_generalized_ulam_numbers` zu einer neuen `compute_generalized_ulam_numbers_bonus(u, v, upper_bound)` zusammenfassen, um die Laufzeit Ihres Programms zu verbessern.

[1] `https://mathworld.wolfram.com/UlamSequence.html`
[2] `https://de.wikipedia.org/wiki/Stanis%C5%82aw_Marcin_Ulam`
[3] `https://oeis.org/A002858`