LAK-ComputerMathematik

Projekt **GJ-1**

Wienerprozesse

Stand: 29. Oktober 2025, 15:11

Konsultationen zum Projekt: nach Terminvereinbarung (E-mail)

Wienerprozesse:

Wir betrachten einen Wienerprozess W als Model für die brownsche Bewegung, wobei t die Zeitvariable ist. Wir bilden eine zeitdiskrete Approximation davon (für *ganzzahlige* Werte von t) in der folgenden Weise:

- $W_0 = 0$
- $W_{t+1} = W_t + \xi_t$, wobei $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, i.e. die (stationären) Zuwächse haben eine Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1.
  ξ_t entspricht einer (normierten) vorzeichenbehafteten Weglänge zum Zeitpunkt t.

1. Schreiben Sie eine Funktion `wiener_single` mit Parameter `n_steps` welche eine Realisierung $(w_t)_{0\le t\le \texttt{n\_steps}}$ von W als Vektor liefert. Siehe MATLAB-Funktionen `randn` und `cumsum`. Welche Größe sollte das Ergebnis haben?
2. Visualisieren Sie eine solche Realisierung für `n_steps` $= 1000$.
3. Schreiben Sie eine Funktion `wiener` mit Parametern `n_steps` und `n_trials` welche `n_trials` obiger Realisierungen in 1. (eine pro Spalte) als Matrix liefert.
4. Als Veranschaulichung des Gesetzes der großen Zahlen, visualisieren Sie die empirischen arithmetischen Mittel $\hat{E}[|w_t|]$ (dieser entspricht den Mittelwerten von $|w_t|$ (Beträge!) aus den `n_trials` Versuchen in 3.) als Funktion von t und vergleichen Sie ihn mit der Funktion $t \mapsto \sqrt{2t/\pi}$ für `n_steps` $= 1000$ und verschiedene Werte von `n_trials`, z.B. $10, 100$ und 1000.
   Die Größe $\hat{E}[|w_t|]$ kann als mittlerer Abstand vom Ausgangspunkt W_0 interpretiert werden.
5. Zusatz:
   (a) Was lässt sich aus 4. über die Erwartungswert $E[|W_t|]$ vermuten? Lesen Sie über den zentralen Grenzwertsatz und versuchen, diesen zu illustrieren. Nützlich sind die Funktionen `linspace, zeros, length, norm, loglog`.
   (b) Was passiert in 2 Dimensionen, *i.e.* für $w_t \in \mathbb{R}^2$?

Für die Graphen, bitte die Achsen benennen und einen Titel hinfügen.

Hinweis: `figure plot hold legend title xlabel ylabel mean cumsum randn abs`