LAK-ComputerMathematik

Projekt **MH-2**

Wärmeleitung

Stand: 9. Jänner 2023, 11:13

Betreuer des Projektes: Ass. Prof. Dr. M. Holler, `martin.holler@uni-graz.at`
Konsultationen zum Projekt: nach Terminvereinbarung (E-mail) im Raum 518, Heinrichstr. 36

Wir möchten die Temperaturverteilung in einem Stab beliebigen Materials berechnen. Dazu unterteilen (="diskretisieren") wir den Stab in n Blöcke und bezeichnen die (mittlere) Temperatur in jedem dieser Blöcke zum Zeitpunkt t mit $u_1(t)$ bis $u_n(t)$. Außerdem nehmen wir an, dass die Temperatur am linken und rechten Rand des Stabes vorgegeben ist, und bezeichnen diese mit $b_l(t)$ (links) und $b_r(t)$ (rechts), siehe folgendes Skizze:

$b_l(t)$	$u_1(t)$	$u_2(t)$			$\cdots$			$u_n(t)$	$b_r(t)$

Um die Temperatur im Eisenstab zu berechnen, können wir (unter Vernachlässigung kleine Effekte wie Abstrahlung von Wärme) folgende physikalische Gesetze verwenden. Bezeichne $q_i(t)$ die von Block i nach Block $i+1$ übertragene Wäremeleistung (= den Wärmefluss). Dann gilt:

1. Fouriersches Gesetz https://de.wikipedia.org/wiki/Wärmeleitung

   $$q_i(t) = c_0(u_i(t) - u_{i+1}(t)) \qquad \text{[Wärmefluss = Konstante mal Temperaturdifferenz]}$$

   mit einer (material- und dimensionsabhängigen Konstanten $c_0 > 0$)

2. Energieerhaltung: Die Energie $E_i(t)$ in einem Block i ist gegeben durch eine Konstante $c_1 > 0$ mal die Temperatur u_i, also $E_i(t) = c_1 u_i(t)$. Energieerhaltung impliziert dann, mit einer weiteren Konstante $c_2 > 0$,

   $$c_1 \frac{d}{dt} u_i(t) = \frac{d}{dt} E_i(t) = c_2(q_{i-1}(t) - q_i(t)) \qquad \text{[Zeitliche Energieänderung = Konstante mal Wärmefluss]}$$

Fassen wir alle Gleichungen zusammen, bekommen wir mit einer Konstante $c > 0$ folgende Gleichungen

$$\frac{d}{dt} u_i(t) = c(u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

wobei wir $u_{n+1}(t) = b_r(t)$ und $u_0(t) = b_l(t)$ setzen.

1. Betrachten sie als erstes eine statische Situation (also eine Situation in der alle Größen über die Zeit konstant), so dass $u_i(t) = u_i$ und $0 = \frac{d}{dt} u_i$ gilt. Die Gleichungen (1) liefern dann ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten $u_1, \ldots, u_n$ (mit b_l, b_r gegeben). Schreiben sie diese Gleichungssystem als Matrix-Vektor Gleichung der Form $Au + b = 0$, mit $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ und $b = (b_l, 0, \ldots, b_r)^T$, lösen sie diese Gleichung mit Matlab und visualisieren sie ihre Ergebnisse.

2. Betrachten wir nun eine Situation mit endlich vielen Zeitpunkten $t_0, \ldots, t_m$ mit $|t_j - t_{j-1}| = \tau > 0$, so können wir die Ableitung $\frac{d}{dt} u_i(t_j)$ durch

   $$\frac{d}{dt} u_i(t_j) \approx \frac{u_i(t_j) - u_i(t_{j-1})}{\tau}$$

   approximieren. Mit $u(t_j) = (u_1(t_j), \ldots, u_n(t_j))^T$ und $b(t_j) = (b_0(t_j), 0, \ldots, b_1(t_j))^T$ und A der Matrix aus Punkt 1. bekommen wir damit die Matrix-Vektor Gleichungen

   $$u(t_j) = u(t_{j-1}) + \tau(Au(t_{j-1}) + b(t_{j-1})) \quad \text{für } j = 0, \ldots, m$$

   Mit $u(t_0)$ und $b(t_0), \ldots, b(t_{m-1})$ gegeben, kann diese Gleichung iterativ für u_{t_j} mit $j = 1, \ldots, m$ gelöst werden. Berechnen sie solche Lösungen (mit kleiner Schrittweite τ) und visualisieren sie ihre Ergebnisse.

3. **Hinweise:** Als Referenzszenario für 2. sollten sie $b_l(t) = b_l$ und $b_r(t) = b_r$ (zeitlich Konstant) mit b_l und b_r aus 1. wählen. Was passiert für m groß?. Zur Visualisierung können sie die Befehle `plot` und `imagesc` wählen. Interessant ist auch eine dynamische Visualisierung mittels einer `for` schleife über die t_j und den Befehlen `plot`, `drawnow` und bei Bedarf `pause(n)`.

Optionale Bonusaufgabe (2 Bonuspunkte):

- Übertragen sie die Obige Problemstellung in 2D und berechnen sie die Wärmeverteilung in einem Rechteck.