XIII. Österr. Symposion zur Geschichte der Mathematik
Miesenbach 2016
Tagungsband, 146 - 167

Wie die Logarithmen zu ihrem Namen kamen.

Detlef Gronau *

Zusammenfassung

John Napier (1550 - 1617) führte in seinem Werk *"Mirifici Logarithmorum canonis descriptio, Eusque usus, in utraque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica Mathematica,* Authore ac Inventore, IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, Edinburgi 1614" den Namen ***Logarithmus*** ein. Allerdings ist die Funktion die Napier in diesem Büchlein tabelliert hat doch weit entfernt von einer der Funktionen die wir heute unter dem Namen Logarithmen kennen.

Auch die Funktion die Jost Bürgi (1552 - 1632) in seinem Werk mit dem Titel *"Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen/ sambt gründlichem unterricht/ wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/ und verstanden werden sol.* Gedruckt/ In der Alten Stadt Prag/ bey Paul Sessen/ der Löblichen Universität Buchdruckern/Im Jahr/ 1620" aufgestellt hat, entspricht nicht einem Logarithmus in heutigem Sinn.

Beide, Napier und Bürgi gelten unbestritten als Erste die die logarithmische Rechenmethode entwickelt haben, deren Prinzip dann zu damaliger Zeit und über Jahrhunderte das Rechnen wie Multiplikation, Division und Wurzelziehen wesentlich vereinfachte.

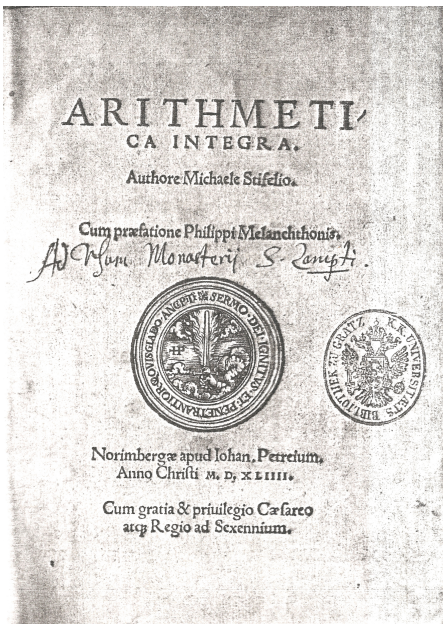
Erst Johannes Kepler jedoch hat in seinen logarithmischen Schriften *"Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos, Marburg 1624"* und *"Supplementum Chiliadis logarithmorum. Marburg 1625"* eine grundlegende Theorie der *Funktion der natürlichen Logarithmen* aufgestellt, wobei er wesentliche Schritte von nachfolgenden Mathematikern wie L. Euler (1707 - 1783) und A.L. Cauchy (1789 - 1857) vorweggenommen hat. Kepler hat in den "Chilias" die wichtigsten Aussagen über den natürlichen Logarithmus, die heute zum Standardwissen in der Theorie der Funktionalgleichungen gehören, dargestellt.

* *Adresse:* Riglergasse 6/5, A – 1180 Wien. Mail: detlef.gronau@chello.at

1 Anfänge des logarithmischen Rechnens

Das Prinzip der Logarithmen wurde im 16. Jahrhundert entdeckt. Am Beginn stehen wohl die Werke von Michael Stifel, Simon Jacob und Mauritius Zons.

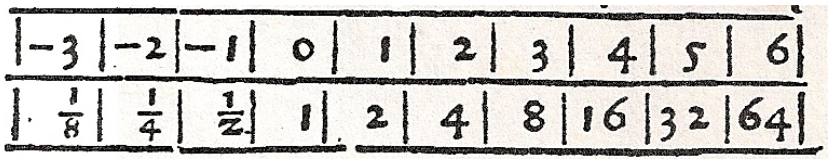
1.1 Michael Stifel; Arithmetica integra, 1544


ARITHMETI-
CA INTEGRA.
Authore Michaele Stifelio.
Cum præfatione Philippi Melanchthonis.
Norimbergæ apud Iohan. Petreium.
Anno Christi M. D. XLIIII.
Cum gratia & priuilegio Cæsareo
atq; Regio ad Sexennium.


wiener staatsoper
Dienstag, 10. Februar 2009
35. Aufführung in dieser Inszenierung
Stiffelio
Dramma lirico in drei Akten
von Francesco Maria Piave
Musik von Giuseppe Verdi
Dirigent Michael Halász
Inszenierung Elijah Moshinsky
Bühnenbild Michael Yeargan
Kostüme Peter J. Hall
Lichtregie Paul Pyant
Chorleitung Thomas Lang
Stiffelio José Cura
Lina Hui He
Stankar Mark Rucker
Raffaele Gergely Németi
Jorg Alexandru Moisiuc
Federico Benedikt Kobel
Dorotea Elisabeta Marin
Orchester der Wiener Staatsoper
Chor der Wiener Staatsoper
Bühnenorchester der Wiener Staatsoper
Eleven der Ballettschule der Wiener Staatsoper
Aufgrund anhaltender Erkrankung kann
Anthony Michaels-Moore die Partie des Stankar nur spielen.

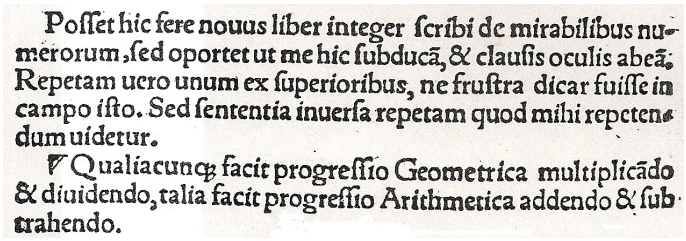
Abbildung 1: Für die Oper " Stiffelio" von G. Verdi gilt Michael Stifel als ein mögliches Vorbild.

In seiner *Arithmetica integra*, Nürnberg 1544, Seite 249 verso, führt Michael Stifel Reihen von Potenzen von 2 an, sogar auch eine mit negativen Exponenten:



Man kann dies als eine Logarithmentafel für Logarithmen zur Basis 2 im Bereich zwischen $\frac{1}{8}$ und 64 betrachten.

Stifel schreibt weiter:



Poſſet hic fere nouus liber integer ſcribi de mirabilibus numerorum, ſed oportet ut me hic ſubducã, & clauſis oculis abeã. Repetam uero unum ex ſuperioribus, ne fruſtra dicar fuiſſe in campo iſto. Sed ſententia inuerſa repetam quod mihi repetendum uidetur.

¶ Qualiacunq; facit progreſſio Geometrica multiplicãdo & diuidendo, talia facit progreſſio Arithmetica addendo & ſubtrahendo.

„Man könnte ein ganz neues Buch über die wunderbaren Eigenſchaften dieſer Zahlen ſchreiben, aber ich muß mich an dieſer Stelle beſcheiden und mit geſchloſſenen Augen daran vorübergehen“. Und weiter: „Addition in der arithmetiſchen Reihe entſpricht der Multiplikation in der geometriſchen Reihe, ebenſo Subtraktion in jener der Diviſion in dieſer. Die einfache Multiplikation bei den arithmetiſchen Reihen wird zur Multiplikation in ſich [d.h. Potenzierung] bei der geometriſchen Reihe. Die Diviſion in der arithmetiſchen Reihe iſt dem Wurzelauſziehen in der geometriſchen Reihe zugeordnet, wie die Halbierung dem Quadratwurzelauſziehen“ (Tropfke [13], p. 171 ff.).

1.2 Simon Jacob, 1510? – 1564

„Ein New und Wolgegründt Rechenbuch auff den Linien wie Ziffern ſamt der Welſchen Practic“, Frankfurt am Main 1565, ist ein Rechenbuch, das von seinem Bruder *Pangratz Jacob von Coburg* posthum herausgegeben wurde. Auch hier findet man die Begriffe *arithmetische Progression* und *geometrische Progression*.

Er führt auch auf (Seite 14 verso) ein Beispiel an:

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.	384.	768.

also die Folge $3 \cdot 2^n$, $n = 0, ..., 8$. Er erklärt auch (auf Seite 15) die Beziehung zwischen arithmetischer und geometrischer Progression: **„So merck nun / was in Geometrica progreßione iſt Multipliciern / daſ iſt in Arithmetica progreßione Addiern / und waſ dort iſt Dividiern / das iſt hie Subtrahiern / und was dort mit ſich iſt Multipliciern / iſt hie ſchlecht Multipliciern / Letztlich was dort iſt Radicem extrahiern / das iſt hie ſchlechts Dividiern mit der zal die der Radix in Ordnung zeigt / ...“**

1.3 Mauritius Zons

„Ein new Wolgegründtes Kunst- und Artig Rechenbuch auff der Ziffer / von vielen nützlichen Kauffmans Regulen / ... Sampt einem angehengten gründlichen underricht / .. Alles durch Mauritius Zons / Bürger und Rechenmeister in Cölln ... Gedruckt zu Cölln / bey Matthis Smitz / unter der Hagt / Anno 1616."

Auch hier werden Progressionen eingeführt: „Wie vielerley sind Progressiones : Zweyerley / Nemlich Arithmetica und Geometrica" und es werden die Eigenschaften dieser Progressionen beschrieben.



Abbildung 2: Simon Jacob, *Ein New und Wolgegründt Rechenbuch*; Mauritius Zons, *Ein new Wolgegründtes Kunst- und Artig Rechenbuch.*

1.4 Gemeinsames Prinzip

Ihnen allen ist das folgende Prinzip gemeinsam: Es wird einer

$$\text{“arithmetischen Reihe”}\ x_n = n \cdot s$$

eine

$$\text{“geometrische Reihe”}\ y_n = z \cdot q^n$$

jeweils für $n = 0, 1, 2, \cdots$ gegenüber gestellt.

Auch Bürgi und Napier verwendeten dieses Prinzip.

Bürgi bezieht sich auf *Simon Jacob* und *Mauritius Zons*. Er schreibt in seinem *"gründlichen Unterricht"* über arithmetische und geometrische Progressionen „wie auch von etlichen Arithmeticis Somon Jakob [und] Moritius Jons und andere ist berürt worden"

Es ist auch sehr wahrscheinlich, dass John Napier von Stifels *Arithmetica integra* beeinflusst wurde (J.E. Hofmann [5], S. 30).

2 Die Tafeln von Napier und Bürgi

Beide Tafeln, die von Napier und die von Bürgi, ja sogar die von Henry Briggs, sind in der Rara-Sammlung der Bibliothek der Karl-Franzens-Universität Graz vorhanden.



Abbildung 3: John Napier *Mirifici Logarithmorum*, 1614

Insbesondere sind die Tafeln von Bürgi äußerst selten und von besonderem Wert, da sie neben dem "Danziger Exemplar" die einzige bekannte Ausgabe sind, die auch einen (handgeschriebenen) "gründlichen Unterricht", also eine Benützungsanleitung enthalten.



Abbildung 4: Jost Bürgi, *Progresstabulen*, 1620.

2.1 Arithmetische und geometrische Reihe

In der *arithmetischen Reihe:* $x_n = n \cdot s,\ n = 0, 1, ...$ und der *geometrischen Reihe:* $y_n = z \cdot q^n,\ n = 0, 1, ...$ sind die Zahlen s, z und q jeweils fest gewählte Konstanten. Bürgi nimmt in seiner Tabelle die Konstanten

$$s = 10,\ z = 10^8 \ \text{ und } \ q = 1 + 10^{-4}, \tag{1}$$

Napier wählt

$$s = 1 + 0.5 \cdot 10,\ z = 10^7 \ \text{ und } \ q = 1 - 10^{-7}. \tag{2}$$

Beide nennen ihre Reihen "arithmetische Reihe" und "geometrische Reihe".

Napier nennt die Zahl x_n den "Logarithmus" von y_n, das heißt

$$\lambda o \gamma o \nu\ \alpha \rho \iota \theta \mu \grave{o} \varsigma.$$

Bürgi nennt x_n die "rote Zahl" von y_n. Bei ihm kommt das Wort Logarithmus nicht vor.

2.2 Die Funktionen

Die Funktion L die durch die Beziehung zwischen der arithmetischen Reihe

$$x_n = n \cdot s$$

und der geometrischen Reihe

$$y_n = z \cdot q^n$$

festgelegt wird, ist definiert durch $L(y_n) := x_n$, also

$$L\left(z \cdot q^n\right) = n \cdot s$$

Setzt man nun $y := z \cdot q^n$ und löst n in Abhängigkeit von y auf, dann verwenden wir am besten den *natürlichen Logarithmus* ln und erhalten so $n = \ln\left(y/z\right) / \ln q$, also

$$L(y) = \frac{s \cdot \ln\left(\frac{y}{z}\right)}{\ln q}. \tag{3}$$

2.3 Napiers und Bürgis "Logarithmen"

Setzt man nun in (3) die von Bürgi gewählten Konstanten (1) bzw. Napiers Kontanten (2) ein, erhält man die jeweils tabellierten Funktionen, nennen wir sie die "Bürgischen Logarithmen" L_B, bzw. die "Napierschen Logarithmen" L_N mit:

$$L_B(y) = 10^5 \cdot \left(\ln\left((1 + 10^{-4})^{10000}\right)\right)^{-1} \cdot \ln \frac{y}{10^8},$$

näherungsweise:

$$L_B(y) \approx 10^5 \cdot \ln\left(\frac{y}{10^8}\right),$$

und

$$L_N(y) = 10^7 \cdot s \cdot \left[\ln\left((1 - 10^{-7})^{10^7}\right)\right]^{-1} \cdot \ln \frac{y}{10^7},$$

näherungsweise:

$$L_N \approx 10^7 \cdot \ln \frac{10^7}{y}. \tag{4}$$

3 Nun kommt Kepler



Johann Kepler gebohren
in 27 Dezember 1571
zu Wil der Statt
gestorben zu Regenspurg
den 5ten November 1630.

Johannes Kepler ist 1600 aus Glaubensgründen aus Graz vertrieben worden. Er wurde Mitarbeiter von Tycho Brahe in Prag. Im September 1601 erhielten Tycho Brahe und Kepler in einer Audienz bei Kaiser Rudolf II. den Auftrag, neue Planetentafeln herzustellen, die auf Vorschlag Brahes *"Rudolphinische Tafeln"* genannt werden sollten, eine Aufgabe, die erst 26 Jahre später erfüllt werden sollte. Als Tycho Brahe am 24. Oktober 1601 starb, wurde Johannes Kepler von Kaiser Rudolph zum *Kaiserlichen Mathematiker* ernannt und mit der Sorge für die Instrumente und unvollendeten wissenschaftlichen Arbeiten Tycho Brahes beauftragt.

3.1 Rudolphinische Tafeln

Die Arbeit an den Rudolphinischen Tafeln verzögerte sich immer wieder, nicht nur wegen Erbstreitigkeiten mit den Nachkommen Tycho Brahes. Johannes Kepler wurde sogar von den Ständen von Oberösterreich bedeutet, dass er die Arbeiten am "Fassrechnen" einstellen solle und wichtigere Dinge, wie die Rudolphinischen Tafeln und die Landmappen vollenden möge. Wohl im Gegenzug schrieb Johannes Kepler in einem Bericht im Jahre 1616 an die Stände, dass er die Tafeln "in praxi" fertig habe. Dem war wohl nicht ganz so; denn es sollten sich der Fertigstellung ganz neue Hindernisse in den Weg stellen.
Die ursprüngliche Fassung der Rudolphinischen Tafeln war auf der *prostaphairetischen* Rechenmethode aufgebaut. Diese Methode, vom Nürnberger Pfarrer Johannes Werner (1468-1528) entdeckt und von Tycho Brahe wiederentdeckt, führt die Multiplikation von Sinusgrößen auf mehrere Additionen, unter Ausnutzung der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen zurück. Inzwischen wurde das wesentlich einfachere Rechenverfahren mittels *Logarithmen* entwickelt.

Johannes Kepler erfuhr erst im Frühjahr 1617 von Napiers neuen Rechenmethode. Er hatte zwar von Bürgi, mit dem er die Jahre 1605 bis 1612 gemeinsam in Prag verbrachte, und mit dem er auch nachweislich wissenschaftliche Kontakte hatte, mit Sicherheit schon vor dem Erscheinen der Progress Tabulen (1620) von dessen Methode gehört. So schreibt er dann später in den Rudolphinischen Tafeln, wo er die Napierschen Logarithmen

preist, in bezug auf diese: *"Diese logistischen Apices waren es auch, die Jost Bürgi viele Jahre vor der Napierschen Publikation den Weg zu genau diesen Logarithmen gewiesen haben."* Kepler fährt dann aber fort: *"Allerdings hat der Zauderer und Geheimtuer das neugeborene Kind verkommen lassen, statt es zum allgemeinen Nutzen groß zu ziehen"* ([10], S. 48). Sonst nimmt Kepler in den Rudolphinischen Tafeln keinen weiteren Bezug auf Bürgis Logarithmen und erwähnt auch nicht dessen Progress Tabulen.

Er hatte zwar nie die persönliche Bekanntschaft mit Napier gemacht, jedoch die mit seinen Werken, zunächst mit seiner "Descriptio", einer Art Benutzungsanleitung, in die er in den Jahren 1617 bis 1619 immer nur kurzen Einblick hatte. Weiters kam auch noch eine deutschsprachige Version der Napierschen Tabellen im Jahr 1618 auf den Markt, allerdings nur mit 5- statt mit 7-stelligen Tabellen. Kepler musste nun einsehen, dass er nicht umhin kann, die Rudolphinischen Tafeln auf logarithmisches Rechnen umzuschreiben. Allerdings war er genötigt, die Napierschen Tafeln für seinen Zweck umzuschreiben. Zunächst nur nach der Form, später auch in der Theorie, die ihm vorerst im Unklaren bleibt.

Keplers ehemaliger Lehrer Michael Mästlin aus Tübingen, mit dem Kepler über all die Jahre regen Kontakt gepflegt hat, übt heftige Kritik an Napiers Logarithmen und daran, dass Kepler sie einfach so übernehmen wolle und schreibt: *"Ich halte es unwürdig eines Mathematikers, mit fremden Augen sehen zu wollen und sich auf Beweise zu stützen oder als solche auszugeben, die er nicht verstehen kann. [...] Deshalb mache ich mir ein Kalkül nicht zu eigen, von dem ich glaube oder annehme, dass er bewiesen sei, sondern nur von einem, von dem ich es weiß."*

Das Ergebnis all dieser Diskussionen, die *Chilias Logarithmorum* (Tausende von Logarithmen), ist jedoch nicht nur eine *theoretische Begründung der Napierschen Logarithmen*, sondern eine eigenständige Theorie der Funktion des *natürlichen Logarithmus* wie er vorher nicht bekannt war.

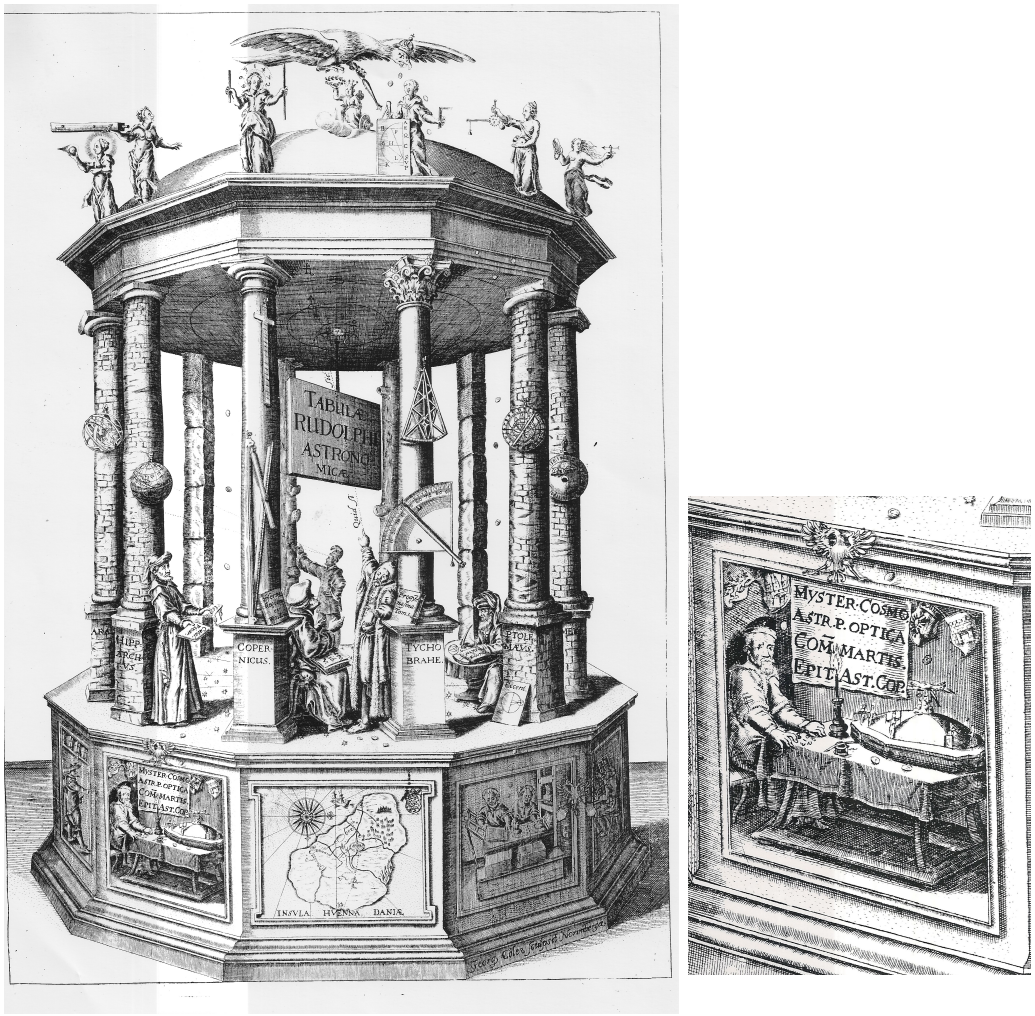
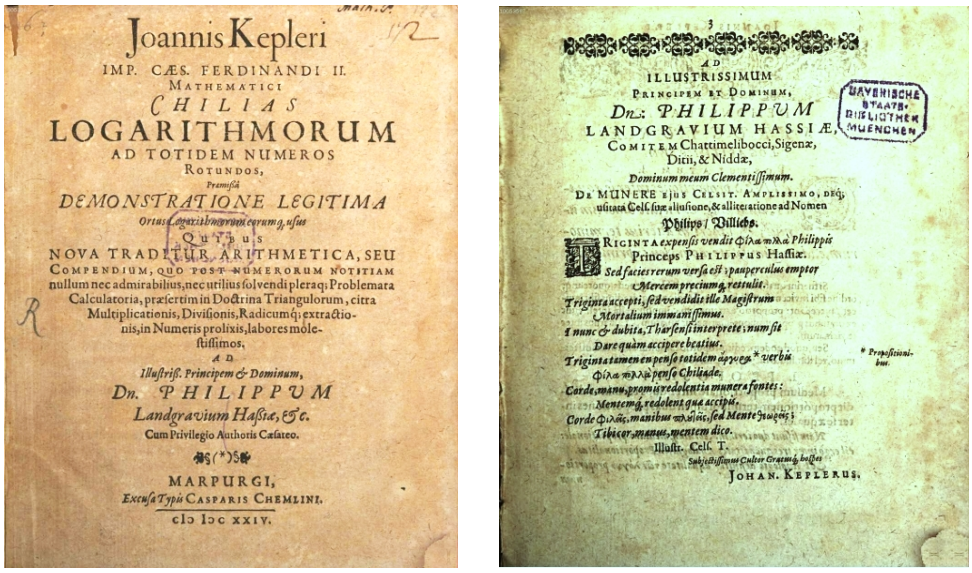


Abbildung 5: Tabulae Rudolphinae, Ulm 1627. Frontispiz mit einem Ausschnitt, der zeigt, wie Kepler konzentriert an der Kuppel arbeitet die den Tempel krönt. Er stellt sich damit selbstbewusst als Vollender des astronomischen Tempels dar.

3.2 Chilias logarithmorum

Die Chilias Logarithmorum sind in den Gesammelten Werke von Johannes Kepler, herausgegeben von Franz Hammer, [8], [9] und im Nachbericht von Hammer [4] ausführlich dokumentiert. Eine französischsprachige Teilübersetzung bietet Charles Naux [12].



Joannis Kepleri
IMP. CÆS. FERDINANDI II.
Mathematici
CHILIAS
LOGARITHMORUM
AD TOTIDEM NUMEROS
Rotundos,
Præmissâ
DEMONSTRATIONE LEGITIMA
Ortus, Canonis hujus, eorumq; usus
Quibus
NOVA TRADITUR ARITHMETICA, SEU
COMPENDIUM, QUO POST NUMERORUM NOTITIAM
nullum nec admirabilius, nec utilius solvendi pleraq; Problemata
Calculatoria, præsertim in Doctrina Triangulorum, citra
Multiplicationis, Divisionis, Radicum q; extractionis, in Numeris prolixis, labores molestissimos,
AD
Illustriss. Principem & Dominum,
Dn. PHILIPPUM
Landgravium Hassiæ, &c.
Cum Privilegio Authoris Cæsareo.
MARPURGI,
Excusa Typis CASPARIS CHEMLINI.
clɔ Iɔc XXIV.

AD
ILLUSTRISSIMUM
PRINCIPEM ET DOMINUM,
Dn.: PHILIPPUM
LANDGRAVIUM HASSIÆ,
COMITEM Chattimelibocci, Sigenæ,
Ditii, & Niddæ,
Dominum meum Clementissimum.
DE MUNERE ejus CELSIT. AMPLISSIMO, DEQ;
usitata Celsit. suæ allusione, & alliteratione ad Nomen
Philipp / Villichs.
TRIGINTA expensis vendit Φιλιππος Philippis
Princeps PHILIPPUS Hassiæ.
Sed facies rerum versa est: pauperculus emptor
Mercem precium q; retulit.
Triginta accepit, sed vendidit ille Magistrum
Mortalium immanissimus.
I nunc & dubita, Tharsensi interprete: num sit
Dare quàm accipere beatius.
*Triginta tamen en pensat totidem αρχους * verbis*
Φιλα πολλα pense Chiliade.
Corde, manu, promit redolentia munera fontes:
Mentem q; redolent, quæ accipiũt.
Corde Φιλαξ, manibus πλουτος, sed Mente Ιωαννης:
Tibi cor, manus, mentem dico.
Illustr. Celsit. T.
Subjectissimus Cultor Gratus, hostis
JOHAN. KEPLERUS.
* Propositionibus.
BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Abbildung 6: *Chilias logarithmorum*
Titelblatt: *Johannes Kepler, kaiserlicher Mathematiker des Ferdinand II,* Chilias logarithmorum*, Marburg 1624. Mit einer Widmung an den Landgrafen von Hessen, Philipp.*

In der Widmung in Form eines Gedichtes bedankt sich Kepler beim Landgrafen Philipp[1]) für die dreißig Geldstücke (*"triginta expensis"*) und verspricht dafür dreißig Propositionen zu geben.

In Folgenden wird ein kurzer Abriss des mathematischen Gehaltes von Keplers *Chilias Logarithmorum* gegeben:

[1]Philipp III., 1581 - 1643, Landgraf von Hessen-Butzbach.

3.3 Demonstratio stuctura logarithmorum

Kepler beginnt als erstes mit einem Postulat:


4 JOANNIS KEPLERI

DEMONSTRATIO
STRUCTURÆ
LOGARITHMORUM.
POSTULATUM I.

OMNES proportiones inter se æquales, quacunq; varietate binorum unius, & binorum alterius terminorum, eadem quantitate metiri seu exprimere.

P o s t u l a t u m I

Omnes proportiones inter se aequales, quacunque varietate bino rum unius, et binorum alterius terminorum, eadem quantitate metiri seu exprimere.

Erklärung: Kepler geht hier einen ganz neuen, man kann sagen revolutionären Weg. Er ist zwar in der klassischen Mathematik des Euklid verhaftet und darin wohl bewandert. Er definiert aber hier auf völlig neue Weise eine Funktion, er sagt ein *"Maß"* (*mensura*) für die Proportionen, d.h. auf den heute so genannten positiven reellen Zahlen (gegeben durch Brüche unabhängig von der Darstellung durch Zähler und Nenner).

3.4 Das Maß

Dass dieses Maß, nennen wir es M, *additiv* ist, also

$$M(x \cdot y) = M(x) + M(y)$$

erfüllt, wird von Kepler stillschweigend vorausgesetzt, aber immer wieder verwendet, gleich schon hier:

I. Propositio

Medium proportionale inter duos terminos dividit proportionem terminorum in duas proportiones inter se aequales.

Erklärung: Die mittlere Proportionale (medium proportionale) von zwei Zahlen a und b ist die Zahl c die die Bedingung $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ erfüllt, somit $c = \sqrt{a \cdot b}$, also das *geometrische Mittel* von a und b. Insbesondere gilt $\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$. Als Folge davon gilt für das Maß wie es Proposition I sagt.

$$M\left(\frac{a}{b}\right) = M\left(\frac{a}{c}\right) + M\left(\frac{c}{b}\right) = 2 \cdot M\left(\frac{a}{c}\right), \tag{5}$$

also

$$M(x^2) = 2 \cdot M(x). \tag{6}$$

3.5 Exemplum sectionis

Hier gibt Kepler ein Beispiel, wie man das Maß näherungsweise berechnet.

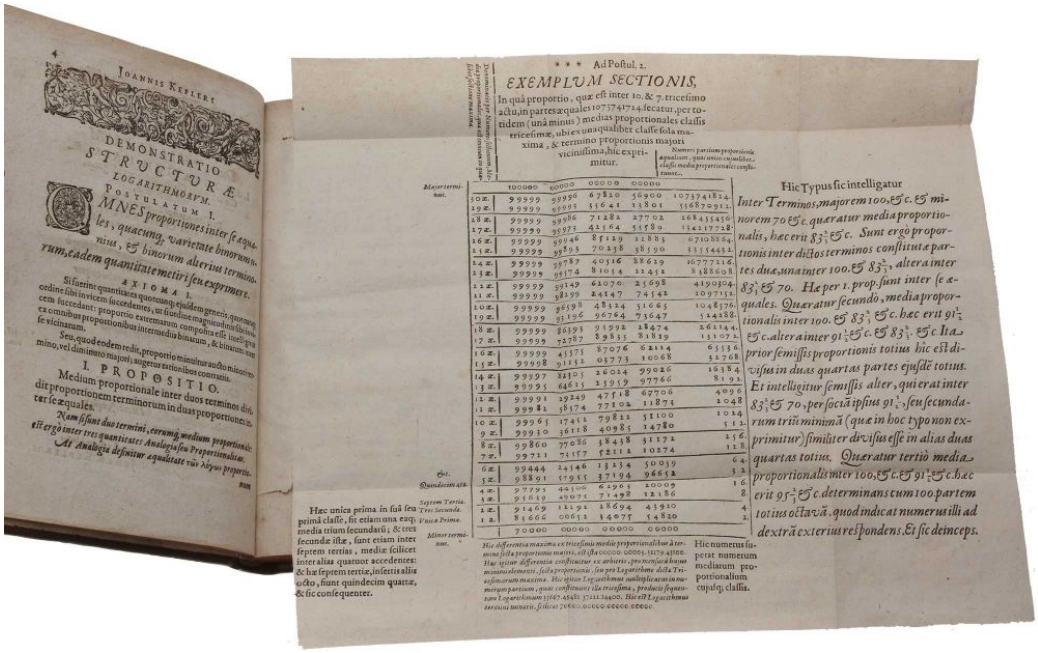


Abbildung 7: Im Original der Chilias [7] ist das Exemplum als Faltblatt eingeklebt.

Kepler zeigt wie man das Maß der Proportion

$$\frac{1\,00000\,00000\,00000\,00000}{70000\,00000\,00000\,00000} = \frac{10}{7}$$

durch fortgesetzte mittlere Proportionale berechnen kann. Es wird sich herausstellen, dass das Maß M bis auf eine Zehnerpotenz gleich dem natürlichen Logarithmus ist.

3.6 Die einzelnen Rechenschritte Keplers:

Kepler verwendet ein rekursives Verfahren: Setze $z = 1\,00000\,00000\,00000\,00000$ und $a = \quad 70000\,00000\,00000\,00000$. Dann ist $x_1 = 83666\,00265\,340755\,47978$, siehe Abbildung 8, die mittlere Proportionale von z und a und es gilt nach (5):

$$M(z/a) = 2 \cdot M(z/x_1).$$

LOGARITHMI 281

EXEMPLUM SECTIONIS

in quâ proportio, quae est inter 10. et 7. tricesimo actu in partes aequales 10737 41824. secatur, per totidem (unâ minus) medias proportionales classis tricesimae, ubi ex unaqualibet classe sola maxima, et termino proportionis majori vicinissima, hic exprimitur.

Denominatio per Numeros sectionum mediae proportionalis, quae est omnium in qualibet sectione maxima. — *Numeri partium proportionis aequalium, quas unius cujuslibet classis mediae proportionales constituunt.*

	100000	00000	00000	00000	
30 ae.	99999	99996	67820	56900	10737418 24.
29 ae.	99999	99993	35641	13801	5368709 12.
28 ae.	99999	99986	71282	27702	2684354 56.
27 ae.	99999	99973	42564	55589	1342177 28.
26 ae.	99999	99946	85129	12883	671088 64.
25 ae.	99999	99893	70258	38590	335544 32.
24 ae.	99999	99787	40516	88629	167772 16.
23 ae.	99999	99574	81034	22452	83886 08.
22 ae.	99999	99149	62070	25698	41943 04.
21 ae.	99999	98299	24147	74542	20971 52.
20 ae.	99999	96598	48324	51665	10485 76.
19 ae.	99999	93196	96764	73647	5242 88.
18 ae.	99999	86393	93992	28474	2621 44.
17 ae.	99999	72787	89835	81819	1310 72.
16 ae.	99999	45575	87076	62114	655 36.
15 ae.	99998	91152	03773	10068	327 68.
14 ae.	99997	82305	26024	99026	163 84.
13 ae.	99995	64615	25959	97766	81 92.
12 ae.	99991	29249	47518	67706	40 96.
11 ae.	99982	58574	77102	11873	20 48.
10 ae.	99965	17452	79822	51100	10 24.
9 ae.	99930	36118	40985	14780	5 12.
8 ae.	99860	77086	38438	31172	2 56.
7 ae.	99721	73557	52112	10274	1 28.
6 ae.	99444	24546	13234	50059	64.
5 ae.	98891	57955	37194	96652	32.
4 ae.	97795	44506	62963	20009	16.
3 ae.	95639	49075	71498	12386	8.
2 ae.	91469	12192	28694	43920	4.
1 a.*	83666	00265	34075	54820	2.
	70000	00000	00000	00000	

Hic Typus sic intelligatur:

Inter Terminos, majorem 100 etc. et minorem 70 etc. quaeratur media proportionalis, haec erit 83⅓ etc. Sunt ergò proportionis inter dictos terminos constitutae partes duae, una inter 100. et 83⅓, altera inter 83⅓ et 70. Hae per 1. prop. sunt inter se aequales. Quaeratur secundò, media proportionalis inter 100. et 83⅓ etc. haec erit 91⅔ etc. rursumque erunt partes inter se aequales, una inter 100 etc. et 91⅔ etc. altera inter 91⅔ etc. et 83⅓ etc. Ita prior semissis proportionis totius hic est divisus in duas quartas partes ejusdem totius. Et intelligitur semissis alter, qui erat inter 83⅓ et 70, per sociam ipsius 91⅔, seu secundarum trium minimam (quae in hoc typo non exprimitur) similiter divisus esse in alias duas quartas totius. Quaeratur tertiò media proportionalis inter 100 etc. et 91⅔ etc. haec erit 95⅚ etc. determinans cum 100. partem totius octavam, quod indicat numerus illi ad dextram exterius respondens. Et sic deinceps.

etc.
Quindec. Quartae
Septem Tertiae
Tres Secundae
* Vnica Prima

* Haec unica prima in suâ seu primâ classe fit etiam una eaque media trium secundarum; et tres secundae istae sunt etiam inter septem tertias, mediae scilicet inter alias quatuor accedentes: et hae septem tertiae, insertis aliis octo, fiunt quindecim quartae, et sic consequenter.

Hic numerus unitate superat numerum mediarum proportionalium cujusque classis.

Hic differentia maxima ex tricesimis mediis proportionalibus à termino sectae proportionis majori, est ista 00000.00003.32179.43100. Haec igitur differentia constituitur ex arbitrio pro mensurâ hujus minimi elementi sectae proportionis, seu pro Logarithmo dictae Tricesimarum maximae. Hic igitur Logarithmus multiplicatus in numerum partium, quas constituunt illae tricesimae, producit sequentem Logarithmum 35667.49481.37222.14400. Hic est Logarithmus termini minoris, scilicet 70000. 00000.00000.00000.

36 Kepler IX

Abbildung 8: Exemplum aus den Ges. Werken [8].

Weiters rekursiv: ist x_{n+1} die mittlere Proportionale von z und x_n, dann

$$\begin{aligned} M(z/x_n) &= 2 \cdot M(z/x_{n+1}), \quad \text{somit} \\ M(z/a) &= 2^n \cdot M(z/x_n). \end{aligned} \tag{7}$$

Kepler rechnete bis $n = 30$. Dann kommt sein **Trick:** Er setzt $M(z/x_{30}) = z - x_{30} = 00000\,00003\,32179\,43100$. Damit kommt er zum Ergebnis

$$\begin{aligned} M(z/a) &= 2^{30} \cdot (z - x_{30}) \\ &= 35667\,49481\,37222\,14400. \end{aligned}$$

Hic differentia maxima ex tricesimis mediis proportionalibus à termino sectae proportionis majori, est ista 00000.00003.32179.43100. Haec igitur differentia constituitur ex arbitrio pro mensurâ hujus minimi elementi sectae proportionis, seu pro Logarithmo dictae Tricesimarum maximae. Hic igitur Logarithmus multiplicatus in numerum partium, quas constituunt illae tricesimae, producit sequentem Logarithmum 35667.49481.37222.14400. Hic est Logarithmus termini minoris, scilicet 70000.00000.00000.00000.

Abbildung 9: Ausschnitt aus dem Exemplum Abb. 8, worin der Wert des Maßes von 10/7 angegeben ist.

Die eingerahmte Zahl in Abbildung 9 ist die von Kepler berechnete Näherung des Maßes von 10/7 und stimmt mit dem entsprechenden Logarithmus in immerhin 8 Stellen überein.

$$\ln(10/7) = 0.35667\,49439\,38732\,37891.$$

In der Tabelle in Abbildung 8 haben sich beim fortgesetzten Wurzelziehen einige Rechenfehler eingeschlichen. Bei richtiger Rechnung hätte Kepler den Logarithmus von 10/7 auf 10 Stellen genau erhalten.

3.7 Keplers Bedingung

Kepler postuliert in Postulat 3 (Abb. 10), falls x_n, das ja gegen z konvergiert, nahe genug bei z liegt, dass dann das Maß $M(z/x_n)$ gleich (d.h. angenähert gleich) der Differenz $z - x_n$ gesetzt wird.

$$\begin{aligned} M(z/x_n) &\approx z - x_n, \\ \text{somit } M(z/a) &\approx 2^n \cdot (z - x_n). \end{aligned} \tag{8}$$

Auf diese Weise hat Kepler im Exemplum Sectionis das Maß von 10/7 berechnet.

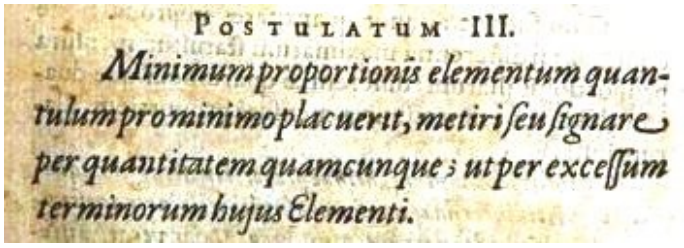

POSTULATUM III.
Minimum proportionis elementum quantulum pro minimo placuerit, metiri seu signare per quantitatem quamcunque; ut per excessum terminorum hujus Elementi.

Abbildung 10: Postulat 3 aus den Chilias [7], Seite 5

Diese Bedingung, nämlich $M(z/x_n) \approx z - x_n$ für $n \to \infty$ bedeutet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(z/x_n)}{z - x_n} = 1,$$

und unter Berücksichtigung von $M(1) = 0$, $z - x_n = x_n \cdot (z/x_n - 1)$ und $x_n \to z$ für $n \to \infty$ bedeutet dies

$$\lim_{x\to 1} \frac{M(x) - M(1)}{x - 1} = z,$$

das heißt, M ist an der Stelle 1 differenzierbar und

$$M'(1) = z.$$

3.8 Keplers Theorem

Damit hat Kepler folgenden Satz konstruktiv bewiesen:

Theorem: *Sei* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *eine Lösung der Funktionalgleichung*

$$f(x^2) = 2 \cdot f(x), \tag{3}$$

differenzierbar in $x = 1$*, dann ist* f *durch*

$$f'(1) = z \tag{3'}$$

eindeutig bestimmt und von der Form

$$f(x) = z \cdot \ln(x).$$

Beweis: (Skizze) Die Funktion $f(x) = z \cdot \ln(x)$ ist eine Lösung von (3) und (3').

Andererseits gilt analog zu Keplers Formel (7) für jede Lösung f von (3):

$$f(x) = 2^n \cdot f(x^{1/2^n}) = 2^n \cdot (x^{1/2^n} - 1) \cdot \frac{(f(x^{1/2^n}) - f(1))}{(x^{1/2^n} - 1)}.$$

Wegen $\sqrt[n]{x} \to 1$ für $n \to \infty$, folgt durch Grenzübergang

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot (x^{1/2^n} - 1) \cdot f'(1),$$

Damit ist der Wert von f an jeder Stelle $x \in (0, \infty)$ eindeutig bestimmt, also ist $f(x) = z \cdot \ln(x)$ die einzige Lösung von (3) und (3'). □

3.9 Die Definition

Nach 20 Propositionen und mehreren Corollarien erfolgt dann in [7], S.17 die Definition des Neperschen Logarithmus in der Auslegung von Kepler:

Definitio

Mensura cujuslibet proportionis inter 1000. et numerorum eo minorem, ut est definita in superioribus, expressa numero, apponatur ad hunc numerum minorem in Chiliade, dicaturque LOGARITHMVS ejus, hoc est, numerus ($\alpha\rho\iota\theta\mu\grave{o}\varsigma$) *indicans proportionem* ($\lambda\acute{o}\gamma o\nu$) *quam habet ad 1000. numerus ille, cui Logarithmus apponitur.*

Definition

Das Maß einer beliebigen Proportion zwischen 1000 und einer dazu kleineren Zahl, wie es im vorhergehenden definiert wurde, ausgedrückt als Zahl und dieser kleineren Zahl in der Chilias zugeordnet, wird deren LOGARITHMUS genannt, das ist, die Zahl, die die Proportion anzeigt, welche jene Zahl zu 1000 hat, wird als deren Logarithmus zugeordnet.

Kommentar:

Der Nepersche Logarithmus einer Zahl x in der Auslegung von Kepler, sei mit L_K bezeichnet und wird in dieser Definition durch

$$L_K(x) := M\left(\frac{1000}{x}\right)$$

definiert. Dass hier Kepler nach unseren Begriffen so lange um den Brei herumredet, liegt wohl darin begründet, dass er hier ganz neue, wie bereits

erwähnt, revolutionäre Wege beschritten hat, nämlich Beziehungen zwischen Proportionen und Zahlen aufzustellen. Kepler hat ohne die richtigen Werkzeuge zu haben (wie etwa den Funktionsbegriff oder vollständige Induktion), hervorragende mathematische Ergebnisse erbracht. So jammert er selbst an einer Stelle im Anhang zu den CHILIAS: "In ungewohnten Situationen haben wir Mangel an Worten." *("At cùm in re insolatâ laboremus penuria vocabulorum")*

Nachdem das Maß M bis auf Zehnerpotenzen, nämlich den Faktor z, gleich dem natürlichen Logarithmus ist, kommt man zur *Keplerschen Auslegung des Napierschen Logarithmus*

$$L_K(x) = z \cdot \ln\left(\frac{z}{x}\right),$$

wobei hier $z = 1000$, und in den Tabellen dann $z = 10^7$ ist. Damit ist der Keplersche "Logarithmus" ungefähr gleich dem Napierschen Logarithmus (4):

$$L_N \approx 10^7 \cdot \ln \frac{10^7}{y}.$$

Der eigentliche **Keplersche Logarithmus** ist aber nicht die Keplersche Auslegung des Napierschen Logarithmus L_K sondern seine **"mensura"** also sein ***Maß***

$$M(y) = z \cdot \ln(y).$$

4 Die weitere Entwicklung der Logarithmen

4.1 Die weitere Entwicklung der Logarithmentafeln

Henry Briggs (1561 – 1630), Professor für Geometrie in London und Oxford, lernte die Napierschen Logarithmen um 1614/15 kennen. Er schlug Änderungen vor (nämlich dass der Logarithmus von 10 gleich 1 sein soll), die auf den Logarithmus zur Basis 10, auch *Briggscher Logarithmus* genannt, führten. Sie hatten den Vorteil, dass man die Umrechnung der Dezimalstellen und inbesondere die Reduktion der Zahlen auf den Tabellenbereich leichter durchführen kann.

Kepler erhielt von seinem Freund Gunther ein Buch über die dekadischen Logarithmen. Er schrieb 1623 (die CHILIAS waren schon längst fertiggestellt aber noch nicht gedruckt) an Gunther(Tropfke [14], S. 317):: *"Wenn es mir möglich ist, will ich jedoch versuchen, die Heptacosias, die ein Bestandteil der Rudolphinischen Tabellen werden soll, mit geringstem Arbeitsaufwand nach Euren* [dekadischen] *Logarithmen umzugestalten."* Doch schließlich, nachdem 1624 Keplers *CHILIAS* gedruckt vorlag, entschied sich Kepler, doch auf die dekadischen Logarithmen zu verzichten. So schreibt dann Briggs an Kepler: *"Eurem soeben erschienenen Buch über die Logarithmen anerkenne ich den Scharfsinn und lobe den Fleiß. Hättet Ihr jedoch auf den Erfinder Merchiston gehört und wäret Ihr mir gefolgt, dann hättet Ihr meiner Meinung nach denen, die am Gebrauch der Logarithmen ihre Freude haben, einen besseren Dienst erwiesen."* Die auf Grundlage der Neperschen Logarithmen berechneten Rudolphinischen Tafeln mit ihrer weitreichenden Bedeutung in der Astronomie und Navigation bewirkten ihrerseits, dass die ansonsten durch die dekadischen Logarithmen sehr schnell veralteten Napierschen bzw. Keplerschen Logarithmen noch unverhältnismäßig lange weiterlebten. Sie wurden 1631 von Keplers Schwiegersohn Jakob Bartsch neu herausgegeben. Obwohl diese Ausgabe viele Fehler enthielt, wurde sie mit Rücksicht auf die Benützbarkeit der Rudolphinischen Tafeln noch 1700 wieder aufgelegt.

4.2 Die weitere Entwicklung der Logarithmen

Ab 1636 gelang Pierre Fermat (1601 – 1665) die Quadratur der höheren Hyperbeln und Parabeln der Form

$$y = ax^m,\ y = \frac{a}{x^m} \ \text{ und } \ y^n = ax^m,\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Er hat dabei für $y = x^k$ die Formel (geschrieben in heutiger Notation)

$$\int_0^x y^k dy = \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

wobei k eine beliebige ganze oder auch gebrochene Zahl sein kann, entdeckt. Diese Formel versagt jedoch bei $k = -1$.
Für diesen Fall fand 1630 (veröffentlicht 1647) der Jesuitenpater Gregorius a Santo Vincentio (1584 in Brügge – 1669 in Gent) eine Lösung (Naux [12], II, S. 21f.): *Wenn die Abszissen einer Hyperbel in geometrischer Progression wachsen, dann bilden die Flächen eine arithmetische Progression.* Das führte auf die Logarithmen.

4.3 Hyperbolischer Logarithmus

Gregorius selbst scheint die Tragweite seiner Entdeckung aber nicht erkannt zu haben. Sein Freund und Mitbruder Alfonso Anton de Sarasa (1618 – 1667) erst nützte dieses Ergebnis aus, um Logarithmen zu berechnen: *"Unde hae superficies supplere possunt locum logarithmorum datorum"* (Daher können diese Flächen den Platz gegebener Logarithmen ausfüllen).
Damit haben wir den sogenannten *"hyperbolischen Logarithmus"*

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

der nichts anderes als der heute sogenannte *natürliche Logarithmus ist.* Isaac Newton (1643 – 1727) und auch Nicolaus Mercator (eigentlich Kauffmann, 1620, Eutin – 1687, Paris) führten die sogenannte "logarithmische Reihe" ein:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \ .$$

4.4 Leonhard Euler

Erst bei Leonhard Euler (1707, Basel – 1783, St. Petersburg) und zwar in seiner *Introductio in Analysis Infinitorum, 1748* findet man die Definition: *"Wenn $a^z = y$ ist, so heißt dieser Wert z, sofern er als Funktion von y betrachtet wird, der* **Logarithmus** *von y. Die Lehre von den Logarithmen setzt also voraus, dass eine bestimmte Konstante an der Stelle von a eingesetzt wird, die deshalb die* **Basis** *der Logarithmen heißt."*
Es ist daher der Logarithmus zur Basis a die Umkehrung der Funktion $x \mapsto a^x$, d.h.:

$$_a\log(y) = x \iff a^x = y.$$

Mit dieser Definition lassen sich auch Logarithmen von komplexen Zahlen einführen. Damit konnte Euler ein Problem von Leibniz und Bernoulli lösen: Zu jedem komplexen Numerus gibt es bei gegebener Basis unendlich viele komplexe Werte des Logarithmus.

4.5 Die Cauchyschen Funktionalgleichungen

Die logarithmische Funktionalgleichung wird dann von Augustin Louis Cauchy, (21. 8. 1789 – 22. 5. 1857) in seinem *Cours d'analyse de L'École Polytechnique, Vol. 1, Analyse algébrique V*, Paris 1821, systematisch behandelt. Sie ist eine der vier sogenannten *Cauchyschen Funktionalgleichungen*:

$$\begin{array}{rclcrcl} f(x+y) & = & f(x)+f(y) & \qquad & f(x+y) & = & f(x)\cdot f(y) \\ f(x\cdot y) & = & f(x)+f(y) & & f(x\cdot y) & = & f(x)\cdot f(y) \end{array}$$

die weiterhin in der Theorie der Funktionalgleichungen ausführlichst und in allen möglichen Verallgemeinerungen untersucht wurden.

Der Keplersche Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Funktionalgleichung

$$f(x^2) = 2 \cdot f(x), \tag{3}$$

die differenzierbar in $x = 1$ ist, ist erst im 20. Jahrhundert von verschiedenen Autoren (z.B. Aczél [1], Kuczma [11]) wiederentdeckt worden, wobei diese sicher nicht vom historischen Vorgänger Kepler gewusst haben.

Abbildungsnachweis

Bayerische StaatsBibliothek digital MDZ: Abb. 3. rechts, Abb. 6. und folgende, Abb. 7., Abb. 10.
Kepler, Ges. Werke [6]: Abb. 8., Abb. 9.
Keplers Traum vom Mond, Leipzig 1898: Portrait Johannes Keplers aus dem Benediktinerstift Kremsmünster, Seite 8.
Sondersammlungen an der UB Graz: Abb. 1. und folgende, Abb. 2., Abb. 3. links, Abb. 4., Abb. 5.,
Staatsoper Wien: Abb. 1.

Literatur

[1] Aczél, János: *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* Academic Press, New York and London, 1966.

[2] Caspar, Max: *BIBLIOGRAPHIA KEPLERIANA. Ein Führer durch das gedruckte Schrifttum von Johannes Kepler.* C.H.Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München MCMXXXVI.

[3] Gronau, Detlef: *Die Logarithmen, von der Rechenhilfe über Funktionalgleichungen zur Funktion.* Tagungsbericht der Sektionstagung der Fachsektion Geschichte der Mathematik der DMV, Calw/Nordschwarzwald, 1997. Erschienen in: Michael Toepell (Hrsg.): Mathematik im Wandel. Anregungen zu einem fächerübergreifenden Mathematikunterricht, Band 2. div verlag, Franzbecker, Hildesheim - Berlin, 2001, 127 – 145.

[4] Hammer, Franz: *Nachbericht zu den logarithmischen Schriften von Johannes Kepler.* In: Johannes Kepler, Gesammelte Werke Bd 9, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1960, 461-483.

[5] Hofmann, Joseph E.: *Michael Stifel. Leben, Wirken und Bedeutung für die Mathematik seiner Zeit.* Sudhoffs Arch., Geschichte Med. Naturwiss. Pharm. Math., Beih. No.9, 42 S. (1968).

[6] Kepler, Johannes: *GESAMMELTE WERKE, Band IX, Mathemat. Schriften*, bearbeitet von Franz Hammer. C.H.Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München MCMLX.

[7] Kepler, Johannes: *Chilias logarithmorum*, Marburg 1624, in: `MDZ-Reader _ Band _ Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos _ Kepler, Johannes.htm`

[8] Kepler, Johannes: *Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos.* Marburg 1624. In: Gesammelte Werke Bd 9, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1960, 275-352.

[9] Kepler, Johannes: *Supplementum Chiliadis logarithmorum.* Marburg 1625. In: Gesammelte Werke Bd 9, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1960, 353-426.

[10] Kepler, Johannes: *Tabulae Rudolphinae.* Ulm 1627. In: Gesammelte Werke Bd 10, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1969.

[11] Kuczma, M.: *Functional equations in a single variable.* PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa 1968.

[12] Naux, Charles: *Histoire des logarithmes de Neper a Euler.* Tome 1, Librairie A. Blanchard, Paris 1966.

[13] Tropfke, Johannes: *Geschichte der Elementarmathematik.* 2. Aufl. Band 2: Allgemeine Arithmetik, Walter de Gruyter Berlin- Leipzig 1921.

[14] Tropfke, Johannes: *Geschichte der Elementarmathematik.* 4. Aufl. Band 1: Arithmetik und Algebra, Walter de Gruyter Berlin- New York 1980.