Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 1

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, sei $\eta \geq 0$ mit $\operatorname{supp}\eta \subset B_1(0)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$ und $\|\eta\|_{C^{0,1}} \leq M$. Zeige, dass fur $g := f * \eta$

$$|g(x) - g(y)| \leq 2|B_1(0)| \cdot M \cdot |x-y| \cdot \|f\|_{L^\infty} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n\,,$$

gilt.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Sei η eine Friedrichsche Glättungsfunktion, d. h. es gilt $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\eta \subset B_1(0)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, d\lambda = 1$ und $\eta \geq 0$. Wir definieren für beliebige $\varepsilon > 0$ die zugehörige Diracfolge $\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$. Wir setzen f durch Null auf das Komplement von Ω fort und definieren für beliebige $\varepsilon > 0$ die Funktionen $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy$. Sei $(\varepsilon_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ eine Nullfolge und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
(ii) Sei $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge von Ω und sei in dieser Teilaufgabe f noch zusätzlich stetig auf Ω. Dann gilt $f_{\varepsilon_\ell} \rightrightarrows f$ auf K für $\ell \to \infty$.
(iii) Sei $m \in \mathbb{N}_+$. Sei in dieser Teilaufgabe f noch zusätzlich von der Klasse $C^m(\Omega)$. Sei $x \in \Omega$. Falls $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ gilt, dann ist $D^\alpha f_\varepsilon(x) = (D^\alpha f)_\varepsilon(x)$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq m$. Sei $\Omega' \Subset \Omega$ offen. Dann gilt $\|f_{\varepsilon_\ell} - f\|_{C^m(\Omega')} \to 0$ für $\ell \to \infty$.

Aufgabe 3. (2 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $f > 0$. Zeige, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \langle Du, \nu \rangle = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

keine Lösung besitzt.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

(i) Nehme an, dass $\Delta u(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$ erfüllt ist. Zeige, dass für alle $x \in \Omega$

$$u(x) < \sup_{y \in \partial\Omega} u(y)$$

gilt. *Hinweis:* Untersuche Δu in einem inneren Maximum.
(ii) Nehme an, dass $\Delta u(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ erfüllt ist. Zeige, dass

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

gilt. *Hinweis:* Berechne zunächst $\Delta(\varepsilon|x|^2)$.

Aufgabe 5. (2 Punkte für $n = 2$, 4 Punkte für $n \in \mathbb{N}_+$) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch, d.h. es gelte $\Delta u = 0$. Definiere $k(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeige, dass k in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist.

Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak | Universität Konstanz | Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 2

Aufgabe 6. (4 Punkte) Sei $u \in C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times [0, t_0))$ eine Lösung der Gleichung

$$\dot{u} + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0$$

auf einem maximalen Existenzintervall $[0, t_0)$ mit $t_0 \in (0, \infty]$. Nehme an, $u(\cdot, 0)$ sei nicht monoton wachsend. Zeige, dass $u \notin C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ gilt, d. h. es muss $t_0 < \infty$ gelten..
Hinweis: Betrachte die Lösung $\varphi \in C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times [0, t_0))$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(x, t) = u(\varphi(x, t), t), & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, t_0) \\ \varphi(x, 0) = x, & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 7. (2 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ Lösungen der RWP

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = \psi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Zeige, dass

$$\max_{\overline{\Omega}} |u - v| \le \max_{\partial\Omega} |\varphi - \psi|$$

gilt.

Aufgabe 8. (6 Punkte) Sei $f \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$ und definiere $u := \Phi \star f$, wobei Φ die Fundamentallösung der Laplacegleichung sei. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Sei $n \ge 3$. Dann gilt
$$\sup_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} |u| \to 0 \quad \text{für } r \to \infty.$$

(ii) Sei $n = 2$. Dann gilt
$$\sup_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} |u| \to 0 \quad \text{für } r \to \infty$$
genau dann wenn $\int_{\mathbb{R}^2} f = 0$ gilt. Falls $\int_{\mathbb{R}^2} f > 0$ ist und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige Folge mit $|x_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ ist, so folgt $|u(x_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$.
Hinweis: Zeige, dass für gegebenes $R_0 > 0$ für alle $y \in B_{R_0}(0) \subset \mathbb{R}^2$ und beliebige Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ mit $|x_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ auch
$$\big|\log |x_n - y| - \log |x_n|\big| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$
gilt.

(iii) Es gibt eine nur von n abhängige Konstante $c > 0$, so dass
$$\|Du\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}$$
gilt.

Aufgabe 9. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Gilt für jede Kugel $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy,$$

so ist u in Ω harmonisch. Zeige dies.

Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 3

Aufgabe 10. (8 Punkte) Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und sei $u := \Phi \star f$, wobei Φ die Fundamentallösung der Laplacegleichung sei. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Für $1 \leq i \leq n$ sei
$$v_i(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(x-y)f(y)dy.$$
Dann ist u stetig partiell differenzierbar und $u_i = v_i$.
Anleitung: Sei $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \eta' \leq 2$, $\eta(t) = 0$ für $t \leq 1$ und $\eta(t) = 1$ für $t \geq 2$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $\eta_\varepsilon(t) := \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ und die Funktion
$$w_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_\Omega \Phi(x-y)\eta_\varepsilon(|x-y|)f(y)dy.$$
Zeige, dass für kompakte Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$
$$\sup_{x\in K}|w_\varepsilon(x) - u(x)| \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0$$
und
$$\sup_{x\in K}|D_i w_\varepsilon(x) - v_i(x)| \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0$$
gelten.

(ii) Sei $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ist u zweimal stetig differenzierbar und eine Lösung der Gleichung $-\Delta u = f$ in Ω.

Aufgabe 11. (4 Punkte) Beweise den Satz von Liouville mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen.

Aufgabe 12. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^0(\Omega)$. Nehme an, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$
$$\int\limits_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = 0$$
gilt. Zeige, dass u in Ω harmonisch ist.

Anleitung: Zeige, dass

(i) die Mollifizierungen u_ε auch diese Integralbedingung erfüllen,
(ii) die Mollifizierungen u_ε harmonisch sind und
(iii) u die Mittelwerteigenschaft erfüllt.

Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 4

Aufgabe 13. (2 Punkte) Seien $k, n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass

$$(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha$$

gilt, wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex ist und

$$\begin{aligned} \binom{|\alpha|}{\alpha} &:= \frac{|\alpha|!}{\alpha!}, \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!, \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Aufgabe 14. (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch in Ω. Zeige, dass u reell analytisch in Ω ist.
Anleitung: Sei $x_0 \in \Omega$ und wähle $r := \frac{1}{4} \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$.

(i) Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Multiindex mit $|\alpha| = k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine von α unabhängige Konstante $c > 0$ mit

$$\|D^\alpha u\|_{C^0(B_r(x_0))} \leq c \left(\frac{2^{n+1} n^2 e}{r} \right)^k \alpha!$$

gibt. Verwende hierfür die Stirlingsche Formel

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k^{k+\frac{1}{2}}}{k! e^k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

(ii) Sei $r_0 := \frac{r}{2^{n+2} n^3 e}$. Zeige, dass die Taylorreihe von u um x_0 in $B_{r_0}(x_0)$ konvergiert.

Aufgabe 15. (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reell analytische Funktion. Sei $\Omega' \subset \Omega$ eine nichtleere, offene Menge. Zeige, dass aus $f|_{\Omega'} = 0$ auch $f \equiv 0$ folgt.

Aufgabe 16. (6 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch.

(i) Sei u nach unten beschränkt. Zeige, dass u konstant ist.
(ii) Sei $k \in \mathbb{N}$. Nehme an es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|^k)$$

gilt. Zeige, dass u ein Polynom mit $\operatorname{grad} u \leq k$ ist.

Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak
Universität Konstanz
Wintersemester 2021/2022

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG THEORIE PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 5

Aufgabe 17. (4 Punkte) Sei $K(x,y)$ wie im Theorem über die Poissonsche Darstellungsformel für einen Halbraum und $n \geq 2$. Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$

$$1 = \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\,dy$$

gilt. Es genügt den Beweis für $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$ durchzuführen.
Hinweis: Zeige die Behauptung per Induktion nach m und verwende $n\omega_n = 2\pi\omega_{n-2}$.

Aufgabe 18. (4 Punkte) Zeige, dass die Funktion u, die wir im Theorem „Poissonsche Darstellungsformel für einen Halbraum" definiert haben, in $C^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ist.

Aufgabe 19. (8 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sei $r \in \mathbb{R}_+$. Sei $g \in C^2(\overline{B_r(0)})$. Sei $u \in C^2(\overline{B_r(0)})$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B_r(0), \\ u = g & \text{auf } \partial B_r(0). \end{cases}$$

(i) Sei $0 \neq x \in B_r(0)$. Zeige, dass $\varphi^x(y) := \Phi(\frac{|x|}{r}|y - \tilde{x}|)$ mit der Involution $\tilde{x} = \frac{r^2 x}{|x|^2}$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta\varphi^x = 0 & \text{in } B_r(0) \\ \varphi^x(y) = \Phi(y - x) & \text{für } y \in \partial B_r(0) \end{cases}$$

löst. Für $x = 0$ setzen wir $\varphi^x \equiv \Phi(r)$.

(ii) Sei für $x, y \in B_r(0)$ mit $x \neq y$ die Funktion $G(x,y) := \Phi(y-x) - \varphi^x(y)$ definiert. Verwende Theorem 3.19, um die Darstellung des Integralkerns K in

$$u(x) = \int_{\partial B_r(0)} K(x,y) g(y) dy$$

herzuleiten.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2021/2022
Gaspard Jankowiak

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 6

Aufgabe 20. (4 Punkte) Sei $r > 0$ und $g \in C^0(\partial B_r)$, $B_r \subset \mathbb{R}^n$. Definiere

$$u(x) := \int\limits_{\partial B_r} K(x,y) g(y)\, dy$$

mit

$$K(x,y) := \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \frac{1}{|x-y|^n}$$

für $x \in B_r$ und $y \in \partial B_r$. Dann gelten

(i) $u \in C^\infty(B_r)$,
(ii) $\Delta u = 0$ in B_r,
(iii) u lässt sich stetig auf ∂B_r fortsetzen und die Fortsetzung $\tilde{u}$ erfüllt dort $\tilde{u} = g$.

Aufgabe 21. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Seien $u, v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei u eine C^0-subharmonische Funktion und v eine C^0-superharmonische Funktion. Gelte $u = v$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt entweder $u < v$ in Ω oder $u \equiv v$. Im zweiten Fall sind beide Funktionen harmonisch.

Aufgabe 22. (4 Punkte)
Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^0(\Omega)$. Dann erfüllt u die Ungleichung $\Delta u \geq 0$ im Viskositätssinne, falls für jeden Punkt $x_0 \in \Omega$, jede Kugel $B_r(x_0) \subset \Omega$, $r \in \mathbb{R}_+$, und jede Funktion $\varphi \in C^2(B_r(x_0))$ mit

$$u(x_0) = \varphi(x_0)$$

und

$$u(x) \leq \varphi(x) \quad \text{für } x \in B_r(x_0)$$

folgt, dass

$$\Delta\varphi(x_0) \geq 0.$$

Analog definiert man $\Delta u \leq 0$ im Viskositätssinne. Falls $\Delta u \geq 0$ und $\Delta u \leq 0$ im Viskositätssinne gelten, so heißt u im Viskositätssinne harmonisch oder eine Viskositätslösung von $\Delta u = 0$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^0(\Omega)$. Zeige, dass u genau dann im Viskositätssinne harmonisch ist, wenn u (nach bisheriger Definition) harmonisch ist.

Tipp: Zeige, dass eine Viskositätslösung von $\Delta u = 0$ auch C^0-subharmonisch sowie C^0-superharmonisch ist.

Aufgabe 23. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$.

(i) Zeige, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ und offene, beschränkte Mengen $U_i, V_i \subset \mathbb{R}^n$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$ gibt, so dass $U_i \Subset V_i$ ist, $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ gilt und so dass $\partial\Omega \cap V_i$ Graph einer C^2-Funktion u_i ist und $\Omega \cap V_i$ jeweils auf einer Seite dieses Graphen liegt. Zeige, dass man die Mengen $(V_i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ so wählen kann, dass u_i die Gradientenabschätzung $\|Du_i\| \leq \frac{1}{8}$ erfüllt.

(ii) Zeige, dass Ω eine gleichmäßige äußere (und innere) Kugelbedingung erfüllt.
Hinweis: Sei $i \in \{1, \dots, m\}$ fest. Dann ist $\partial\Omega \cap V_i$ Graph einer C^2-Funktion u. Sei $x = (\hat{x}, u(\hat{x})) \in \partial\Omega \cap U_i$. Sei $r \in \mathbb{R}_+$ klein. Bestimme $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, so dass die Funktion

$$v : B_r^{n-1}(\hat{x}) \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sqrt{r^2 - |y - \hat{x} - \bar{x}|^2} - \sqrt{r^2 - |\bar{x}|^2} + u(\hat{x})$$

die Bedingung $Dv(\hat{x}) = Du(\hat{x})$ erfüllt. Zeige dann mit Hilfe der Taylorentwicklung, dass für kleine $r > 0$ die Funktion $u - v : B_r^{n-1}(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\} \to \mathbb{R}$ positiv ist.

Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 7

Aufgabe 24. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $Lu \geq f$. Hierbei betrachten wir

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{ij}(x) + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_i(x) + d(x)u(x),$$

wobei

(i) a^{ij} symmetrisch ist, d. h. $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ gilt.
(ii) L elliptisch ist: Es existiert $\lambda > 0$, so dass

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
(iii) die Koeffizienten gleichmäßig beschränkt sind, d. h. es gibt $K > 0$, so dass

$$|a^{ij}(x)|, |b^i(x)|, |d(x)| \leq K$$

für alle i, j und alle $x \in \Omega$.

Sei $d \leq 0$. Zeige, dass es eine Konstante $c = c(\Omega, K, \lambda)$ gibt, so dass

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + c \sup_{\Omega} |f|$$

gilt.

Aufgabe 25. (12 Punkte) Sei $T > 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Erfülle

$$u \in C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C^0\left((\Omega \times (0,T)) \cup \mathcal{P}(\Omega \times (0,T))\right)$$

die Differentialungleichung

$$\dot{u} \leq Lu \quad \text{in } \Omega \times (0,T),$$

wobei wir annehmen, dass

$$Lu(x,t) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)u_{ij}(x,t) + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)u_i(x,t) + d(x,t)u(x,t),$$

wobei

(i) a^{ij} symmetrisch ist, d. h. $a^{ij}(x,t) = a^{ji}(x,t)$ gilt.
(ii) L elliptisch ist: Es existiert $\lambda > 0$, so dass

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j$$

für alle $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
(iii) die Koeffizienten gleichmäßig beschränkt sind, d. h. es gibt $K > 0$, so dass

$$|a^{ij}(x,t)|, |b^i(x,t)|, |d(x,t)| \leq K$$

für alle i, j und alle $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$.

a) Sei $d \leq 0$. Zeige, dass
$$\sup_{\Omega\times(0,T)} u^+ \leq \sup_{\mathcal{P}(\Omega\times(0,T))} u^+$$
gilt.

b) Zeige, dass
$$\sup_{\Omega\times(0,T)} u^+ \leq \sup_{\mathcal{P}(\Omega\times(0,T))} (e^{Kt}u^+)$$
gilt.

c) Sei $t_0 \in (0,T)$ und $I = (t_0 - \delta, t_0)$ mit $0 < \delta < t_0$. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und gelte
   (i) es gibt eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$
   (ii) $0 = u(x_0,t_0) > u(x,t)$ für $(x,t) \in \left(\overline{B_R}(y) \times \overline{I}\right) \setminus \{(x_0,t_0)\}$.

   Zeige, dass
$$\langle Du(x_0,t_0), x_0 - y\rangle > 0,$$
   ist, falls diese Ableitung existiert.

d) Sei $t_0 \in (0,T)$ und $I = (t_0 - \delta, t_0)$ mit $0 < \delta < t_0$. Nehme an, dass $u < 0$ in $I \times \overline{\Omega}$ gilt und dass es ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0,t_0) = 0$ gibt. Zeige, dass $u(x,t_0) = 0$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 8

Aufgabe 26. (8 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^2$. Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ die Perronlösung von

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeige, dass es eine Konstante $c = c(\Omega, \|\varphi\|_{C^2(\overline{\Omega})})$ mit

$$\sup_{\substack{x \in \Omega \\ x_0 \in \partial\Omega}} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|} \leq c$$

gibt.
Anleitung:

(i) Sei $R \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$

$$\left|x - \left(0, \tfrac{R}{2}\right)\right|^2 - \left(\tfrac{R}{2}\right)^2 \geq \tfrac{1}{2}\, |x - (0, R)|^2$$

gilt.

(ii) Zeige, dass es eine Konstante $M = M(R, \|\varphi\|_{C^2(\overline{\Omega})})$ gibt, so dass für alle $x_0 \in \partial\Omega$ und alle $x \in \overline{\Omega}$

$$\varphi(x) \leq (\geq)\, \varphi(x_0) + \langle \nabla\varphi(x_0), x - x_0 \rangle + (-)M|x - x_0|^2$$

gilt.

(iii) Sei $R \in \mathbb{R}_+$ eine Konstante, so dass Ω die äußere Kugelbedingung mit Radius R erfüllt. Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Sei $z_1 \in \Omega^c$ mit $\overline{B_R(z_1)} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Sei $z_0 := x_0 + \frac{1}{2}(z_1 - x_0)$. Zeige, dass es eine Konstante $c_0 = c_0(M, \Omega, R)$ gibt, so dass die Funktion

$$\psi^{\pm}_{x_0} : \mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{R}{2}}(z_0) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(x_0) + \langle \nabla\varphi(x_0), x - x_0 \rangle \pm c_0 \left(\left(\tfrac{R}{2}\right)^{2-n} - |x - z_0|^{2-n} \right)$$

die Ungleichung $\psi_{x_0}(x) \geq (\leq)\, \varphi(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$ erfüllt. Wir nennen $\psi^{\pm}_{x_0}$ eine obere beziehungsweise untere Barriere in x_0 zu den Randwerten φ.

(iv) Zeige, dass es eine Konstante $c_1 = c_1(\|\varphi\|_{C^2(\overline{\Omega})}, \Omega, R)$ gibt, so dass für alle $x_0 \in \partial\Omega$

$$[\psi^{\pm}_{x_0}]_{C^{0,1}(\Omega)} = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|\psi^{\pm}_{x_0}(x) - \psi^{\pm}_{x_0}(y)|}{|x - y|} \leq c_1$$

gilt, wobei $\psi^{\pm}_{x_0}$ die im vorigen Teil konstruierten Barrieren bezeichnet.

(v) Verwende die Barrieren in den Randpunkten, um die gewünschte Abschätzung herzuleiten.

Aufgabe 27. (4 Punkte) Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ eine Lösung von $\dot{u} - \Delta u = 0$.

(i) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$u_\lambda : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

(ii) Zeige, dass

$$v : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto \langle x, Du(x, t) \rangle + 2t\dot{u}(x, t)$$

ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Aufgabe 28. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch, $u \geq 0$ und $\overline{B_R(0)} \subset \Omega$. Beweise die folgende explizite Version der Harnackungleichung für $x \in B_R(0)$:

$$\frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} u(0).$$

Beweise damit erneut den Satz von Liouville.