Université Paris-Dauphine
Département MIDO
Chargé de cours : F.-X. Vialard.
Chargés de TD/TP : G. Jankowiak, A. Frouvelle.
DUMI2E troisième année

Optimisation numérique

année 2012/2013

TP n$^{\text{o}}$2
Séparation de sources

Faites attention à la présentation de vos fichiers matlab et pensez notamment à commenter les lignes importantes de votre code.

1. Introduction

Afin d'appliquer sur quelques exemples le principe de l'ACI, présentée dans le TD 2, on propose l'utilisation d'une méthode de descente dont la direction de descente sera simplement le gradient.

Dans ce qui suit, on demande de se conformer aux choix des noms proposés pour plus de lisibilité. Les fichiers pour coder les fonctions demandées sont déjà présents dans l'archive présente à l'adresse ci-dessous :

`http://gjankowiak.github.com/files/opt/2013/tp2.tar.gz`

Le choix du noms des variables est laissée libre à condition que les noms soient suffisamment explicites. On demande de remplir le script global `TP2_NomsBinome.m`. Chaque bloc (séparé par `%%`) peut y être évalué indépendamment grâce à l'éditeur de Matlab. Vous y incluerez l'ensemble des commandes à effectuer pour illustrer le résultat de chaque question.

1. Utiliser la fonction `CalculeGradient` (fournie) qui prend une fonction f, un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et un réel ε comme arguments et retourne un vecteur qui est une approximation du gradient par différences finies.
   Vérifier son fonctionnement sur la fonction $f_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}$. Donner un exemple de vecteur x pour lequel on perd en précision en diminuant ε.
2. En utilisant le fichier fourni, implémenter une fonction `DescenteGradient`, prenant comme argument une fonction f, un vecteur x_0, un paramètre ε comme précédemment, un pas initial p_0, une tolérance *tol* et un booléen `recherche1D` qui sera utilisé à la question 4. La direction de descente sera choisie en fonction du retour de `CalculeGradient`. Le pas sera fixe, égal à p_0 pour le moment.

3. Soit $D \in \mathcal{M}_{20}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale telle que $D_{ii} = i$, $i \in [\![1;20]\!]$ et $b \in \mathbb{R}^{20}$ un vecteur choisi aléatoirement.

   On considère l'exemple de la fonction : $f_3(x) = \frac{1}{2}\langle x, Dx\rangle + \langle b, x\rangle$, ce problème de minimisation est-il bien posé ? Discuter de l'existence et unicité du minimum.

   Testez votre implémentation de `DescenteGradient` sur f_3.

4. Implémenter une fonction de nom `SectionDoree` qui prendra comme arguments une fonction f, un pas initial p_0, un vecteur x, un direction de descente *dirDescente*, ainsi qu'une tolérance, qui sera égale à celle utilisée pour `DescenteGradient`, et qui renvoie un pas p correspondant à une approximation d'un pas optimal dans la direction *dirDescente* : on résout par la méthode de la section dorée le problème unidimensionnel $\min_{p>0} f(x + p\ dirDescente)$. Vérifier votre implémentation de `SectionDoree` sur un exemple du type $f_4(x) = x^2 + a\sin(x)$.

   Modifier la fonction `DescenteGradient` pour que le pas soit choisi par recherche linéaire via la fonction `SectionDoree` quand `recherche1D` vaut vrai.

5. Modifier `DescenteGradient` pour que les itérés x_n soient stockés dans la variable de sortie `listex`. Pour la fonction f_3, tracer un graphe de la vitesse de convergence des deux méthodes (pas fixe et section dorée) et retrouver expérimentalement le résultat du cours. On pourra utiliser les commandes `semilogy` et `norm`. Est-ce que la recherche du pas optimal améliore l'ordre de convergence de la méthode de descente ? Comparer la vitesse de convergence de la méthode de descente de gradient à pas fixe et à pas optimal.

6. Coder une fonction `ProjStereoInverse` qui calcule la projection stéréographique inverse $j_1 : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ donnée en TD, et l'utiliser, à l'aide de `DescenteGradient`, pour calculer le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre d'une matrice (D par exemple).

Lors de la prochaine séance, on implémentera la séparation de sources à l'aide des fonctions de ce TP.