Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak | Universität Konstanz | Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Blatt 1

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, sei $\eta \geq 0$ mit $\operatorname{supp} \eta \subset B_1(0)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$ und $\|\eta\|_{C^{0,1}} \leq M$. Zeige, dass fur $g := f * \eta$

$$|g(x) - g(y)| \leq 2|B_1(0)| \cdot M \cdot |x - y| \cdot \|f\|_{L^\infty} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n\,,$$

gilt.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Sei η eine Friedrichsche Glättungsfunktion, d. h. es gilt $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \eta \subset B_1(0)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, d\lambda = 1$ und $\eta \geq 0$. Wir definieren für beliebige $\varepsilon > 0$ die zugehörige Diracfolge $\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$. Wir setzen f durch Null auf das Komplement von Ω fort und definieren für beliebige $\varepsilon > 0$ die Funktionen $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x - y) f(y) dy$. Sei $(\varepsilon_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ eine Nullfolge und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
(ii) Sei $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge von Ω und sei in dieser Teilaufgabe f noch zusätzlich stetig auf Ω. Dann gilt $f_{\varepsilon_\ell} \rightrightarrows f$ auf K für $\ell \to \infty$.
(iii) Sei $m \in \mathbb{N}_+$. Sei in dieser Teilaufgabe f noch zusätzlich von der Klasse $C^m(\Omega)$. Sei $x \in \Omega$. Falls $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ gilt, dann ist $D^\alpha f_\varepsilon(x) = (D^\alpha f)_\varepsilon(x)$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq m$. Sei $\Omega' \Subset \Omega$ offen. Dann gilt $\|f_{\varepsilon_\ell} - f\|_{C^m(\Omega')} \to 0$ für $\ell \to \infty$.

Aufgabe 3. (2 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $f > 0$. Zeige, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \langle Du, \nu \rangle = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

keine Lösung besitzt.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

(i) Nehme an, dass $\Delta u(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$ erfüllt ist. Zeige, dass für alle $x \in \Omega$

$$u(x) < \sup_{y \in \partial\Omega} u(y)$$

gilt. *Hinweis:* Untersuche Δu in einem inneren Maximum.
(ii) Nehme an, dass $\Delta u(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ erfüllt ist. Zeige, dass

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

gilt. *Hinweis:* Berechne zunächst $\Delta(\varepsilon|x|^2)$.

Aufgabe 5. (2 Punkte für $n = 2$, 4 Punkte für $n \in \mathbb{N}_+$) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch, d.h. es gelte $\Delta u = 0$. Definiere $k(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeige, dass k in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist.