Université Paris-Dauphine — Optimisation numérique
Département MIDO
Chargé de cours : F.-X. Vialard.
Chargés de TD/TP : G. Jankowiak, A. Frouvelle.
DUMI2E troisième année — année 2012/2013

TD/TP n$^{\text{o}}$2
Séparation de sources[1]

1. Introduction

On propose de comprendre la méthode dite d'*analyse en composantes indépendantes* (ACI - introduite au début des années 90) dans un cadre simple et de tester les algorithmes étudiés sur des signaux sonores. Un problème simple (appelé *Cocktail party problem*) est le suivant : dans une pièce, n sources sonores sont enregistrées simultanément à l'aide de m micros placés à des endroits différents. Comment retrouver les signaux sources à l'aide de ces enregistrements ?

2. Approche théorique

L'hypothèse faite par l'ACI est de considérer les signaux sources comme indépendants. Pour expliquer cette notion d'indépendance, on considère pour simplifier que chaque signal temporel $S_i(t)$ est un échantillon i.i.d. d'une variable aléatoire S_i. On note $S_1, \ldots, S_n$ les n sources indépendantes que l'on suppose de moyennes nulles et de variances σ_i non nulle. On note $D_1, \ldots, D_m$ les données du problème constituées par les enregistrements des micros. Dans ce qui suit, on va supposer que quelque soit $i \in [1, \ldots, m]$ on a $D_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} S_k$ avec des coefficients $a_{i,k}$ constants.

Dans cette section, on étudie une quantité reliée au kurtosis qui est le moment d'ordre 4 de la variable aléatoire considérée une fois centrée (moyenne 0) et réduite (variance 1). On rappelle qu'on note $E[S_i]$ l'espérance de la variable aléatoire S_i. L'espérance empirique de $S_i(t)$ est donnée par $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} S(t)$. On note dans ce qui suit $D = \sum_{k=1}^{n} a_i S_k$.

1. Montrer que $E[D^2] = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_k^2$.
2. Soient $H(X) = E[X^4] - 3E[X^2]^2$ et $a = (a_1, \ldots, a_n)$, montrer que $H(a) := H(D) = \sum_{k=1}^{n} a_k^4 \; H(S_k)$.

1. Ce TD reprend en grande partie un TD de Gérard Lebourg.

3. Calculer $H(G)$ avec G une variable gaussienne centrée réduite.
4. On suppose dans ce qui suit que, pour au plus un indice j, $H(S_j) = 0$. On cherche à maximiser $H(D)$ sous la contrainte $E[D^2] = 1$ et on s'intéresse à ses extremums locaux. On considère dans la suite un extremum local a de H sous la contrainte de moment d'ordre deux.
   (a) Montrer qu'il existe λ un réel tel que quel que soit i, $a_i = 0$ ou $H(S_i)a_i^2 = \lambda\sigma_i^2$.
   (b) Montrer que $\lambda = H(D)$.
   (c) A quelle condition sur a les conditions du second-ordre sont-elles vérifiées ? (On montrera qu'une seule coordonnée a_i est non nulle et $H(S_i)$ est non nulle).
5. Déduire de ce qui précède l'ensemble des maximums locaux de $|H(D)|$ sous la contrainte $E[D^2] = 1$.

3. Mise en place d'un algorithme de minimisation

La section précédente montre que l'on peut récupérer, à partir des données D_i, les signaux indépendants dont un au plus a le kurtosis d'une gaussienne. On cherche à transformer le problème contraint en un problème non contraint. Avant cela, on va d'abord changer de base pour obtenir une matrice de corrélation égale à l'identité.

1. On note la matrice la matrice de corrélation C : $E[D_iD_j] = c_{i,j}$. Pourquoi existe-t-il une base orthonormée de $\mathbb{R}^m$ dans laquelle la matrice de C soit diagonale à coefficients positifs ?
2. Maximiser $\frac{1}{2}\langle a, Ca\rangle$ sous la contrainte $|a|^2 = 1$. Montrer qu'un maximum global est un vecteur propre pour C associé à sa plus grande valeur propre.
3. On considère l'application suivante (l'inverse de la projection stéréographique) :

$$j_1 : \mathbb{R}^{n-1} \ni (a_2, \ldots, a_n) \to \frac{1}{1+\|a\|^2}\left(\frac{1-\|a\|^2}{1+\|a\|^2}, \frac{2a_2}{1+\|a\|^2}, \ldots, \frac{2a_n}{1+\|a\|^2}\right) \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$$

   avec $\|a\|^2 = \sum_{i=2}^n a_i^2$. L'indice 1 de j_1 est présent pour signifier qu'on utilise la première composante dans la définition de la projection. Déterminer l'image de j_1 et montrer que j_1 est injective et C^∞.
4. Comment ramener le problème d'optimisation sur la sphère à un problème d'optimisation sur $\mathbb{R}^{n-1}$? En déduire un algorithme de diagonalisation en base orthonormée de C en utilisant les projection j_1 . Quels cas potentiellement problématiques doit-on gérer ? Donner une solution simple pour les résoudre.

Utiliser ce qui précède pour :

1. se ramener au cas où la matrice de corrélation est l'identité.

2. proposer un algorithme de minimisation sans contrainte pour le problème initial. (On pourra utiliser par exemple une descente de gradient en approximant la dérivée de la fonction objectif par différences finies).

4. Une méthode de point fixe : FastICA

On présente dans cette section la convergence d'un algorithme de point fixe. On suppose dans la suite qu'il existe $w_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que $h(w_0) \neq 0$ où $h(a) = E[D^4]$ et $D = \sum_{k=1}^{n} a_i S_k$. On supposera pour simplifier $\sigma_i = 1$ quelque soit $i = 1, \ldots, n$.

1. Calculer la différentielle de h.
2. Montrer que la fonction h est convexe sur $\mathbb{R}^m$.
3. Discuter le cas de la stricte convexité.
4. Montrer qu'un extremum de h sous contrainte $E[D^2] = 1$ vérifie $\nabla h(a) = \|\nabla h(a)\| a$.
5. On s'intéresse donc aux points fixes de l'application $FP : a \to \frac{\nabla h(a)}{\|\nabla h(a)\|}$. Montrer que la suite définie par $a_0 = w_0$ et $a_n = FP(a_{n-1})$ est bien définie.
6. Montrer (en utilisant la convexité de h) que la suite $h(a_n)$ est croissante.
7. En déduire que $\lim_{k\to\infty} \langle a_k, \nabla h(a_k)\rangle - \|\nabla h(a_k)\| = 0$.
8. Montrer alors que $\lim_{k\to\infty} \nabla h(a_k) - \|\nabla h(a_k)\| a_k = 0$ et donc que $\lim_{k\to\infty} a_{k+1} - a_k = 0$.
9. Montrer enfin que, sous l'hypothèse supplémentaire h sous contrainte $\|a\|^2 = 1$ a un nombre fini de points critiques, alors la suite a_k converge vers l'un d'entre eux.

5. Rappel du théorème de KKT

On rappelle le théorème dans le cas d'une seule contrainte d'égalité. On la note $c(x) = 0$ et on suppose que $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n'a pas de point critique sur l'ensemble de niveau $\{x \mid c(x) = 0\}$. On cherche à minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sous la contrainte $c(x) = 0$. Le théorème de KKT donne l'existence d'un réel λ tel que, au point minimum x, on a :

$$\nabla f(x) - \lambda \nabla c(x) = 0\,.$$

La condition nécessaire de second-ordre donne, quelque soit $d \in [\nabla c(x)]^{\perp}$ on a, en posant $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda c$

$$\langle d, \nabla^2_{xx} L(x, \lambda) d\rangle \geq 0\,. \tag{1}$$