TD/TP 1

1. Rappels de calcul différentiel

Exercice 1

On considère une fonction $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

1. Rappeler la formule de Taylor à l'ordre deux autour d'un point x.
2. Montrer que si x est un minimum local de F, alors $\nabla F(x) = 0$.
3. Montrer que si x est un minimum local de F, alors $\nabla^2 F(x)$ est symétrique semi-définie positive.
4. Montrer que si x vérifie $\nabla F(x) = 0$, $\nabla^2 F(x)$ définie positive, alors x est un minimum local de F.
5. Donner un exemple où $\nabla^2 F(x)$ est semi-définie positive, mais x n'est pas un minimum local.

Exercice 2

Soit $\phi(t) = F(x + th)$, où x et $h \in \mathbb{R}^N$ sont fixes. Calculer ϕ' et ϕ''. Si on cherche à minimiser F à partir du point x, dans quelles directions peut-on se déplacer pour être assuré de faire descendre la valeur de F avec un pas t suffisamment petit ?

2. Calcul de gradients et de Hessiennes

Exercice 3

Soit $F(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, où $b \in \mathbb{R}^N$ et $A \in M_N(\mathbb{R})$ est inversible.

1. Pourquoi peut-on supposer sans perte de généralité que A est symétrique ?
2. Calculer le gradient et la Hessienne de F.
3. Quels sont les points critiques de F ? À quelle condition sont-ils des minima locaux ? Globaux ?

Exercice 4

Soit $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = ||Ax - b||^2$, où $b \in \mathbb{R}^M$ et $A \in M_{M\times N}(\mathbb{R})$, avec $M > N$.

1. Calculer le gradient et la hessienne de F.
2. À quelle condition le problème d'optimisation de F est-il bien posé (la solution existe et elle est unique) ? Comment calculer le minimiseur en pratique ?

Exercice 5

Soit $F : M_N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $F(M) = \mathrm{tr}(M^3 - AM)$, où $A \in M_N(R)$ est une matrice fixée.

1. Rappeler le produit scalaire canonique de $M_N(\mathbb{R})$
2. Calculer le gradient et la Hessienne de F.

3. Problèmes d'optimisation

Exercice 6

À périmètre fixe, quel est le rectangle ayant l'aire maximale ? L'aire minimale ? (utiliser deux méthodes différentes)

Exercice 7

Un maître-nageur de plage court à 20 km/h, et nage à 10 km/h. Formuler un problème d'optimisation pour trouver la trajectoire optimale qu'il doit choisir pour sauver un baigneur en train de se noyer.

4. Implémentation Matlab

Guide de survie Matlab

- Chaque fonction doit être placée dans un fichier portant le même nom
- `help eye` affiche l'aide pour la fonction `eye`. `doc eye` l'affiche dans le navigateur d'aide.
- Préférer le style vectoriel au style scalaire : on écrira
  `A = B + C;`
  plutôt que

```
for i = 1:N
    for j = 1:N
        A(i,j) = B(i,j) + C(i,j);
    end
end
```

Afin d'éviter les boucles, on peut utiliser les commandes d'accès par plages de valeurs : par exemple,

```
A(:,1) = A(:,1) + A(2,:)'
```

sur une matrice carrée ajoute la deuxième ligne à la première colonne

- Utiliser `;` à la fin d'une ligne pour ne pas afficher le résultat de la commande.

Exercice 8

Un oracle est une fonction qui à x associe $F(x)$, et éventuellement $\nabla F(x)$ et $\nabla^2 F(x)$. Par exemple, l'oracle de $F(x) = ||x||^2$ peut s'écrire

```
function [F,grad,hess] = oracle(x)
    F = x'*x;
    grad = 2*x;
    hess = eye(numel(x));
end
```

Cette fonction est à mettre dans le fichier `oracle.m` et à appeler par une commande du type

```
[F,grad,hess] = oracle([1;2]);
```

Ecrire un oracle pour les fonctions des exercices 3, 4 et 5. On supposera que les données A et b sont des variables globales, qu'on déclarera comme telles. Tester l'oracle de l'exercice 3 avec les données $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Ecrire une fonction `grad_findiff` qui calcule une approximation du gradient d'une fonction F à un point x par différences finies. Comment choisir le pas de différence finie en pratique ? Que se passe-t-il si ce pas est trop petit ? Trop grand ? Vérifier le résultat de cette fonction sur l'oracle de l'exercice 3.

Exercice 10

On se propose de minimiser la fonction F de l'exercice 3 par un algorithme de gradient à pas fixe.

1. Comment vérifier que la matrice proposée dans l'exercice 8 est bien définie positive ?
2. Comment choisir le pas ? Que se passe-t-il si ce pas est trop petit ? Trop grand ?
3. Proposer plusieurs critères d'arrêt pour l'algorithme. Lequel choisissez-vous ?
4. Ecrire une procédure générique `gradfix` qui prend en paramètre un oracle, un point de départ et un pas, et renvoie la solution du problème de minimisation. La tester sur l'oracle de l'exercice 3, et comparer avec la solution exacte.

Exercice 11

Résoudre numériquement le problème de l'exercice 7 : se donner des positions de départ pour le maître nageur, la mer et le baigneur, et trouver la trajectoire optimale grâce à la procédure `gradfix`. Comment obtenir ce résultat sans recourir à des méthodes d'optimisation ?

Optionnel : Vérifier que le résultat satisfait à la loi de Descartes pour la diffraction $v_2 \sin\theta_1 = v_1 \sin\theta_2$, où θ_1 et θ_2 représentent les angles d'entrée et de sortie dans l'eau. Visualiser le résultat en Matlab.