

---

# Séance de TD/TP n°1

---

## 1. Approximation numérique des dérivées

**Rappel :** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Si  $f$  admet un extremum local en un point  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $f'(a) = 0$ . [en donner une preuve]

Cette condition nécessaire d'optimalité peut être vérifiée numériquement en approximant la dérivée au point considéré par une méthode de différence finies :

### Exercice 1 TD

On considère une fonction  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .

1. Justifier l'approximation

$$\partial_i f(x) = f'(x)(e_i) \simeq \frac{f(x + \varepsilon e_i) - f(x)}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Quel est l'ordre de cette approximation ?

2. On suppose la fonction  $f$  de classe  $C^2$ . Étudier le cas de la différence finie centrée :

$$\partial_i f(x) = f'(x)(e_i) \simeq \frac{f(x + \varepsilon e_i) - f(x - \varepsilon e_i)}{2\varepsilon}. \quad (2)$$

3. Comparer les ordres d'approximation obtenus.

### Exercice 2 TD

On s'intéresse au choix numérique de la valeur du paramètre  $\varepsilon$ . On rappelle que MATLAB représente les réels sous la forme de nombre à virgule flottante : en double précision, 64 bits sont alloués à un nombre donné : 1 bit est alloué au signe, 11 à l'exposant et les 52 bits restant sont alloués à la mantisse (chiffres significatifs). La conséquence directe de cette approximation est que les calculs ne sont pas nécessairement exacts. Par exemple,  $1.0e30 + 1 - 1.0e30$  donne un résultat nul.

1. Pour choisir  $\varepsilon$ , il faut prendre en compte cette approximation : théoriquement, il faut faire tendre  $\varepsilon$  vers 0. Pourquoi choisir  $\varepsilon$  le plus petit possible n'est pas un bon choix pratique ?
2. On suppose que l'évaluation numérique de  $f$  est donnée par  $\hat{f}$  vérifiant  $\|f(x) - \hat{f}(x)\| \leq \eta \|f\|_\infty$  avec  $\eta$  de l'ordre de  $10^{-p}$ . En utilisant une inégalité triangulaire, comparer la différence finie (1) appliquée à  $\hat{f}$  et la valeur de la dérivée de  $f$  au point  $x$ .
3. En minimisant le majorant précédent en  $\varepsilon$ , proposer une valeur de  $\varepsilon$  offrant un bon compromis.
4. Mêmes questions (2 et 3) pour l'approximation par différences finies centrées (2).

### Exercice 3 TP

On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (3)$$

et le point  $a = [i]_{i=1, \dots, n}$ .

1. Calculer la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x_1$ .
2. Utiliser la différence finie à droite (1) pour calculer une valeur approchée de la dérivée partielle par rapport à  $x_1$  au point  $a$ , pour différentes valeurs de  $n$  et différentes valeurs de  $\varepsilon$ . On choisira  $n = 10^i$  pour  $3 \leq i \leq 8$ .
3. Étudier le cas de la différence finie centrée :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x + \varepsilon e_i) - f(x - \varepsilon e_i)}{2\varepsilon}. \quad (4)$$

4. Comparer et discuter les approximations obtenues. Comment expliquer ces résultats ?

## 2. Optimisation en dimension 1

**Definition 1** Une fonction  $f : [0, T] \mapsto \mathbb{R}$  est dite unimodale sur  $[0, T]$  s'il existe un minimum strict  $t^* \in ]0, T[$  tel que  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, t^*]$  et strictement croissante sur  $[t^*, T]$ .

La minimisation en dimension 1 intervient dans les algorithmes de descente pour la minimisation de fonctionnelles sur  $\mathbb{R}^n$ . Lorsque le minimum est recherché exactement, on appelle ces méthodes *méthodes à pas optimal*. En pratique, il est intéressant de proposer des

méthodes faisant seulement appel à l'évaluation de la fonction à minimiser. La méthode la plus simple pour localiser le minimum à  $M\varepsilon$  près d'une fonction lipschitzienne de constante  $M$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est d'évaluer  $f$  sur une grille de pas  $\varepsilon$ . Vous pourrez l'utiliser en TP pour confirmer les résultats des autres méthodes. On rappelle que les méthodes sont souvent basées sur la méthode générique de dichotomie suivante :

```

Initialisation de l'intervalle  $[a = 0, b]$  pour  $b \in \mathbb{R}_+^*$ .
Tant que  $(f(a) \leq f(b))$  faire
    |  $b \leftarrow \frac{b}{2}$ 
Fin
Initialisation de  $c \leftarrow 2b$ 
Tant que  $(f(b) > f(c))$  faire
    |  $a \leftarrow b,$ 
    |  $b \leftarrow c,$ 
    |  $c \leftarrow 2c$ 
Fin
Tant que  $((b - a) > \text{tolérance})$  faire
    | Application d'une méthode de réduction du triplet  $a, b, c$ .
Fin
Retourner  $c$ 

```

Algorithme 1: Méthode de dichotomie

#### Exercice 4 TD/TP

1. Montrer que la recherche du triplet de point dans l'algorithme précédent termine pour une fonction unimodale.
2. Proposer une méthode de réduction du triplet basée sur le polynôme d'interpolation de Lagrange pour ce triplet de point.
3. Montrer la convergence de la méthode pour une fonction unimodale  $C^1$  dont la dérivée s'annule uniquement au minimum.
4. (optionnel) Montrer que l'ordre de convergence est super-linéaire si cet algorithme converge si on suppose la fonction suffisamment régulière.
5. Implémenter l'algorithme en faisant bien attention aux cas de boucles infinies.

#### Exercice 5 TD/TP

Un véhicule doit se rendre d'un point  $a \in \mathbb{R}^2$  à un point  $b \in \mathbb{R}^2$  en un minimum de

temps. Sa vitesse est  $v_1$  dans un domaine  $D$  convexe contenant  $a$  et  $v_2 > v_1$  sur  $D^c$  le complémentaire de  $D$ . On suppose que  $D = \{(x, y) \mid y \leq f(x)\}$  pour  $f$  une fonction concave que vous choisirez.

1. Formuler ce problème d'optimisation et le résoudre pour retrouver la loi de Snell dans le cas d'une fonction  $f$  constante.
2. Implémenter sous MATLAB une méthode d'optimisation simple pour trouver numériquement l'optimum et tracer la trajectoire optimale pour différentes valeurs de  $v_1$  et  $v_2$ .

### Exercice 6 TD/TP

On cherche à appliquer les algorithmes codés précédemment au problème de la séparation de sources dans le cas particulier de deux enregistrements. Télécharger les données **micro1\_1** et **micro1\_2** sur <http://www.ceremade.dauphine.fr/~vialard/>. Charger les signaux en MATLAB en utilisant la commande `[x,fs] = wavread('nom_fichier.wav')`. Pour écouter le signal, il suffit d'appeler `sound(x,fs)`. Pour chaque signal  $D_i$ , soustraire la moyenne et normaliser par la déviation standard. On notera  $E[X]$  la moyenne du vecteur  $X$ .

1. On définit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par  $(x, y) \rightarrow E[(xD_1 + yD_2)^4]$ . Comment se ramener à un problème d'optimisation unidimensionnel pour minimiser  $f$  sous la contrainte (\*)  $x^2 + 2cxy + y^2 = 1$  avec  $c = E[D_1D_2]$  ?
2. Tracer sous MATLAB la fonction unidimensionnelle obtenue.
3. Utiliser une méthode d'optimisation implémentée précédemment et écouter le signal optimal obtenu pour l'optimum  $(x_0, y_0)$  ainsi que le signal associé à l'orthogonal de  $(x_0, y_0)$  pour la forme quadratique définissant la contrainte (\*).

### Exercice 7 TP

1. Implémenter la méthode de la section dorée.
2. Comparer sur différents exemples la robustesse des deux méthodes unidimensionnelles implémentées (interpolation quadratique et section dorée).
3. Proposer un algorithme plus robuste profitant de la convergence superlinéaire de l'algorithme d'interpolation quadratique.