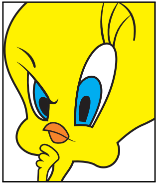
Inégalités de Sobolev et Hardy-Littlewood-Sobolev

Gaspard Jankowiak

Séminaire des thésards - Ceremade
17 janvier 2014

Plan



$$\mathbb{R}^d,\ d \geq 3.$$

Deux inégalités

L'inégalité de Sobolev

Le cas critique

Théorème (Aubin, 1976 et Talenti, 1976)

$$\mathcal{S}[u] := S_d \|\nabla u\|_2^2 - \|u\|_{2^*}^2 \geq 0 \quad \forall\, u \in H^1\,, \tag{1}$$

avec égalité si u est de la forme

$$u_*(x) := \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{d-2}{2}}}\,,$$

L'inégalité de Sobolev

Le cas critique

Théorème (Aubin, 1976 et Talenti, 1976)

$$\mathcal{S}[u] := S_d \|\nabla u\|_2^2 - \|u\|_{2^*}^2 \geq 0 \quad \forall\, u \in H^1\,, \tag{1}$$

avec égalité si u est de la forme

$$u_*(x) := \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{d-2}{2}}}\,,$$

et où

$$2^* = \frac{2d}{d-2} \quad \text{et} \quad S_d = \frac{1}{\pi\, d\,(d-2)} \left(\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^{\frac{2}{d}} \ldots$$

L'inégalité de Sobolev

Le cas critique

Théorème (Aubin, 1976 et Talenti, 1976)

$$\mathcal{S}[u] := S_d \|\nabla u\|_2^2 - \|u\|_{2^*}^2 \geq 0 \quad \forall\, u \in H^1\,, \tag{1}$$

avec égalité si u est de la forme

$$u_*(x) := \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{d-2}{2}}}\,,$$

et où

$$2^* = \frac{2d}{d-2} \quad \text{et} \quad S_d = \frac{1}{\pi\, d\,(d-2)} \left(\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^{\frac{2}{d}} \ldots$$

(1) contient les injections $H^1 \hookrightarrow L^p$, $p \in (2, 2^*]\,.$

L'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev

Théorème (Lieb (83))

$$\mathcal{H}[v] := S_d \|v\|^2_{\frac{2d}{d+2}} - \int v(-\Delta)^{-1} v \geq 0 \quad \forall\, v \in L^{\frac{2d}{d+2}}\,, \tag{2}$$

avec égalité si v est de la forme

$$v_*(x) := (1+|x|^2)^{-\frac{d+2}{2}}$$

L'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev

Théorème (Lieb (83))

$$\mathcal{H}[v] := S_d \|v\|^2_{\frac{2d}{d+2}} - \int v(-\Delta)^{-1} v \geq 0 \quad \forall\, v \in L^{\frac{2d}{d+2}}\,, \tag{2}$$

avec égalité si v est de la forme

$$v_*(x) := (1 + |x|^2)^{-\frac{d+2}{2}}$$

Applications, principalement pour des problèmes d'existence :

- Physique quantique, modèles d'étoiles à neutrons
- Chemotaxie *p.ex.* Keller-Segel*

Les deux inégalités

$$\mathcal{S}[u] = S_d \|\nabla u\|_2^2 - \|u\|_{2^*}^2 \geq 0\,, \quad u_* = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{d-2}{2}}}\,,$$

$$\mathcal{H}[v] = S_d \|v\|_{\frac{2d}{d+2}}^2 - \int v(-\Delta)^{-1} v \geq 0\,, \quad v_* = (1+|x|^2)^{-\frac{d+2}{2}}$$

Les deux inégalités

$$\mathcal{S}[u] = S_d \|\nabla u\|_2^2 - \|u\|_{2^*}^2 \geq 0\,, \quad u_* = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{d-2}{2}}}\,,$$

$$\mathcal{H}[v] = S_d \|v\|_{\frac{2d}{d+2}}^2 - \int v(-\Delta)^{-1} v \geq 0\,, \quad v_* = (1+|x|^2)^{-\frac{d+2}{2}}$$

Remarques pas très malines :

- $v_* = u_*^{\frac{d+2}{d-2}} = u_*^q$
- $\mathcal{S}[u_*] = \mathcal{H}[u_*^q] = 0$
- $\mathcal{H}[u^q] = S_d \|u\|_{2^*}^q - \int u^q (-\Delta)^{-1} u^q$

Les deux inégalités

$$\mathcal{S}[u] = S_d \|\nabla u\|_2^2 - \|u\|_{2^*}^2 \geq 0\,, \quad u_* = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{d-2}{2}}}\,,$$

$$\mathcal{H}[v] = S_d \|v\|_{\frac{2d}{d+2}}^2 - \int v(-\Delta)^{-1} v \geq 0\,, \quad v_* = (1+|x|^2)^{-\frac{d+2}{2}}$$

Remarques pas très malines :

- $v_* = u_*^{\frac{d+2}{d-2}} = u_*^q$
- $\mathcal{S}[u_*] = \mathcal{H}[u_*^q] = 0$
- $\mathcal{H}[u^q] = S_d \|u\|_{2^*}^q - \int u^q (-\Delta)^{-1} u^q$

Les deux inégalités sont *duales*, de plusieurs façons...

Dualité de Legendre

Lieb (83)

La tranformée de Legendre F^* de F est

$$F^*[u] = \sup_v \left(\int u\, v - F[v] \right) .$$

Dualité de Legendre

Lieb (83)

La tranformée de Legendre F^* de F est

$$F^*[u] = \sup_v \left(\int u\, v - F[v] \right) .$$

Dans notre cas on a

$$\left(u \mapsto \frac{1}{2} \|u\|_{2^*}^2 \right)^* = v \mapsto \frac{1}{2} \|v\|_{\frac{2d}{d+2}}^2$$

$$\left(u \mapsto \frac{1}{2} S_d \int |\nabla u|^2 \right)^* = v \mapsto \frac{1}{2} S_d^{-1} \int v(-\Delta)^{-1} v \,.$$

Et comme $F_1 \leq F_2 \Rightarrow F_1^* \geq F_2^*$, on a $\mathcal{S} \geq 0 \Rightarrow \mathcal{H} \geq 0$.

Développement du carré

On prend u et $v = u^{\frac{d+2}{d-2}} = u^q$, et avec $\alpha = S_d \|u\|_{2^*}^2$

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int \left|\nabla\left(\alpha\, u + (-\Delta)^{-1} v\right)\right|^2 \\
&= \alpha^2 \int |\nabla u|^2 + 2\alpha \int \nabla u \nabla(-\Delta)^{-1} v + \int (\nabla(-\Delta) v)^2 \\
&= \alpha^2 \int |\nabla u|^2 - 2\alpha \int \underbrace{uv}_{u^{2^*}} + \int v(-\Delta)^{-1} v \\
&= S_d \|u\|_{2^*}^{\frac{8}{d-2}} \left[S_d \int |\nabla u|^2 - \|u\|_{2^*}^2 \right] - S_d \|v\|_{\frac{2d}{d+2}}^2 + \int v(-\Delta)^{-1} v
\end{aligned}
$$

et donc $S_d \|u\|_{2^*}^{\frac{8}{d-2}} \mathcal{S}[u] \geq \mathcal{H}[u^q]$.

Inégalité de Sobolev améliorée

Théorème (Dolbeault, 2011)

$$C \|u\|_{2^*}^{\frac{8}{d-2}} \mathcal{S}[u] \geq \mathcal{H}[u^q] \tag{3}$$

Questions :

- Est-ce qu'on peut faire mieux que $C = S_d$?
- Est-ce qu'il existe une fonction extrémale (telle qu'on ait égalité) ?

Autrement dit, que vaut

$$1 \leq \frac{S_d}{C_*} := \inf_{\mathcal{H}[u^q] \neq 0} \frac{S_d \|u\|_{2^*}^{\frac{8}{d-2}} \mathcal{S}[u]}{\mathcal{H}[u^q]} ,$$

et existe-t-il une fonction minimisante ?

Linéarisation

Idée : linéariser autour des profils d'Aubin-Talenti

$$\begin{aligned} SL[f] &:= \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{-2}(\mathcal{S}[u_*(1+\epsilon f)] - \mathcal{S}[u_*]) \\ &= S_d \left(\|\nabla f\|_2^2 - d(d+2) \int \frac{f^2}{(1+|x|^2)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} HL[f] &= \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{-2}(\mathcal{H}[(u_*(1+\epsilon f))^q] - \mathcal{H}[u_*^q]) \\ &= \left(\frac{d+2}{d-2}\right)^2 \left(\frac{1}{d\,(d+2)} \int \frac{f^2}{(1+|x|^2)^2} \right. \\ &\qquad \left. - \int \frac{f}{(1+|x|^2)^2} (-\Delta)^{-1} \frac{f}{(1+|x|^2)^2} \right) \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{S_d}{C_*} \leq \inf_{f \notin \ker LH} \quad \frac{SL[f]}{d^2(d+2)^2 HL[f]}$$

Maintenant on peut décomposer f sur les $(f_i)_{i\geq 2}$ tels que

$$-\Delta f_i = \mu_i \frac{f_i}{(1+|x|^2)^2} \quad \text{et} \quad \int \frac{f_i^2}{(1+|x|^2)^2} = 1$$

Donc

$$SL[f] = \sum a_i^2 \left(\mu_i - d(d+2)\right) = \sum a_i^2 c_i$$

$$HL[f] = \sum a_i^2 \left(\frac{1}{d(d+2)} - \frac{1}{\mu_i}\right) = \sum a_i^2 d_i$$

$c_i = d_i \mu_i d(d+2)$ et $SL[f] \leq \mu_2\, d\,(d+2) HL[f]$, avec égalité si $f = f_2$.

Finalement

$$\inf_{f \notin \ker LH} \quad \frac{SL[f]}{d^2(d+2)^2 HL[f]} = \frac{d+4}{d}$$

Maintenant on peut décomposer f sur les $(f_i)_{i\geq 2}$ tels que

$$-\Delta f_i = \mu_i \frac{f_i}{(1+|x|^2)^2} \quad \text{et} \quad \int \frac{f_i^2}{(1+|x|^2)^2} = 1$$

Donc

$$SL[f] = \sum a_i^2 \left(\mu_i - d(d+2)\right) = \sum a_i^2 c_i$$
$$HL[f] = \sum a_i^2 \left(\frac{1}{d(d+2)} - \frac{1}{\mu_i}\right) = \sum a_i^2 d_i$$

$c_i = d_i \mu_i d(d+2)$ et $SL[f] \leq \mu_2\, d\,(d+2) HL[f]$, avec égalité si $f = f_2$.

Finalement

$$\inf_{f \notin \ker LH} \quad \frac{SL[f]}{d^2(d+2)^2 HL[f]} = \frac{d+4}{d} \qquad > 1\,!$$

L'équation de diffusion rapide, vers l'optimalité ?

L'équation de diffusion rapide

$$v_t = \Delta v^m$$

- $m > 1$: équation des milieux poreux, une solution à support compact reste à support compact
- $m = 1$: équation de la chaleur
- $m < 1$: équation de diffusion rapide
- $m < \frac{d-2}{d}$: extinction en temps fini

On va s'intéresser au cas $m = \frac{d-2}{d+2} = 1/q$.

L'équation de diffusion rapide

$$v_t = \Delta v^m$$

- $m > 1$: équation des milieux poreux, une solution à support compact reste à support compact
- $m = 1$: équation de la chaleur
- $m < 1$: équation de diffusion rapide
- $m < \frac{d-2}{d}$: extinction en temps fini

On va s'intéresser au cas $m = \frac{d-2}{d+2} = 1/q$.
Toujours avec $v = u^q$ on a

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{H}[v] = \left(\int v^{m+1}\right)^{\frac{2}{d}} \mathcal{S}[u]\,.$$

Inégalité non-linéaire

L'idée de Dolbeault (2011) est d'intégrer le long du flot, on obtient alors

$$C\|u\|_{2^*}^{\frac{8}{d-2}}\mathcal{S} \geq \mathcal{H}\,,$$

mais avec $C > S_d$.
Avec la nouvelle estimation, on peut utiliser la même méthode et trouver une inégalité *non-linéaire*

$$S_d\|u\|_{2^*}^{\frac{d+2}{d}}\varphi\left(\|u\|_{2^*}^{\frac{d-2}{d}}\mathcal{S}\right) \geq \mathcal{H}$$

avec $x \mapsto x - \varphi(x)$ positive, convexe, et nulle seulement en 0.
Ceci permet (...) de voir qu'une suite minimisante de $S_d\|u\|_{2^*}^{\frac{8}{d-2}}\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{H}}$ minimise en fait $\mathcal{S}$.

Conclusion

- On devrait avoir optimalité, avec $C_* = \frac{d}{d+4} S_d$
- Extension à la dimension $d = 2$: oui avec Onofri et HLS logarithmique