

Solutions stationnaires pour deux modèles de mouvement de foule : multiplicité et stabilité dynamique

J. Dolbeault¹ G. Jankowiak¹ P. Markowich²

¹Ceremade
Université Paris Dauphine

²DAMTP
University of Cambridge

Seignosse, 27 mai 2013

Modèle I

Ω ouvert borné de \mathbb{R}^n :

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \rho - \nabla \cdot [\rho(1 - \rho) \nabla D], \\ \partial_t D = \kappa \Delta D - \delta D + \rho(\mathbf{1} - \rho). \end{cases}$$

- ρ densité de personnes, D “champ de force” au sol
- $\kappa, \delta \ll 1$

Modèle I

Ω ouvert borné de \mathbb{R}^n :

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \rho - \nabla \cdot [\rho(1 - \rho) \nabla D], \\ \partial_t D = \kappa \Delta D - \delta D + \rho(\mathbf{1} - \rho). \end{cases}$$

- ρ densité de personnes, D “champ de force” au sol
- $\kappa, \delta \ll 1$
- Dérivé d'un modèle discret (automate cellulaire) par Burger et al. [2011].

Solutions
stationnaires pour
deux modèles de
mouvement de
foule :
multiplicité et
stabilité
dynamique

J. Dolbeault,
G. Jankowiak,
P. Markowich

Références

Solutions plateau

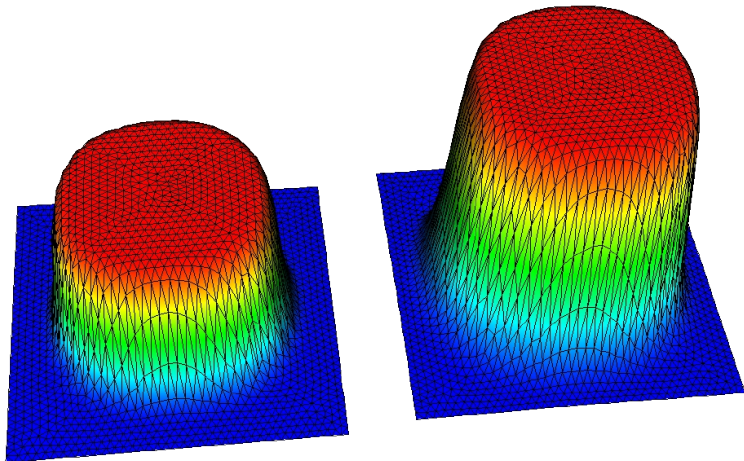


Figure : ρ à gauche, D à droite, image issue de Burger et al. [2011].

Modèle II

Type Keller-Segel

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \rho - \nabla \cdot [\rho(1 - \rho) \nabla D], \\ \partial_t D = \kappa \Delta D - \delta D + \rho. \end{cases}$$

- Variante du modèle de Keller-Segel pour la chémotaxie : sensibilité non linéaire $\rho(1 - \rho)$.
- Introduit par Painter et Hillen en 2001.

Modèle II

Type Keller-Segel

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \rho - \nabla \cdot [\rho(1 - \rho) \nabla D], \\ \partial_t D = \kappa \Delta D - \delta D + \rho. \end{cases}$$

- Variante du modèle de Keller-Segel pour la chimotaxie : sensibilité non linéaire $\rho(1 - \rho)$.
- Introduit par Painter et Hillen en 2001.
- Fonctionnelle de Lyapunov associée :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int \rho \log(\rho) + (1 - \rho) \log(1 - \rho) - \rho D \\ & + \frac{\kappa}{2} \int |\nabla D|^2 + \frac{\delta}{2} \int D^2. \end{aligned}$$

Solutions
stationnaires pour
deux modèles de
mouvement de
foule :
multiplicité et
stabilité
dynamique

J. Dolbeault,
G. Jankowiak,
P. Markowich

Références

Modèle I & II

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \rho - \nabla \cdot [\rho(1-\rho)\nabla D], \\ \partial_t D = \kappa \Delta D - \delta D + g(\rho) \end{cases}$$

Modèle I & II

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \rho - \nabla \cdot [\rho(1-\rho)\nabla D], \\ \partial_t D = \kappa \Delta D - \delta D + g(\rho) \end{cases}$$

Conditions au bord : sans flux

$$\begin{cases} (\nabla \rho - \rho(1-\rho)\nabla D) \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \nabla D \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad \text{on } \partial\Omega$$

Solutions stationnaires

On cherche des solutions au système

$$\begin{cases} \Delta \rho - \nabla \cdot [\rho(1 - \rho)\nabla D] = 0, \\ \kappa \Delta D - \delta D + g(\rho) = 0 \end{cases}$$

Solutions stationnaires

On cherche des solutions au système

$$\begin{cases} \Delta \rho - \nabla \cdot [\rho(1-\rho)\nabla D] = 0, \\ \kappa \Delta D - \delta D + g(\rho) = 0 \end{cases}$$

La première équation donne

$$\rho = \frac{1}{1 + e^{\phi_0 - D}} = \frac{1}{1 + e^{-\phi}},$$

où la constante d'intégration $\phi_0 \in \mathbb{R}$ est choisie telle que

$$\int \rho = M.$$

Solutions stationnaires

On cherche des solutions au système

$$\begin{cases} \Delta \rho - \nabla \cdot [\rho(1-\rho)\nabla D] = 0, \\ \kappa \Delta D - \delta D + g(\rho) = 0 \end{cases}$$

La première équation donne

$$\rho = \frac{1}{1 + e^{\phi_0 - D}} = \frac{1}{1 + e^{-\phi}},$$

où la constante d'intégration $\phi_0 \in \mathbb{R}$ est choisie telle que

$$\int \rho = M.$$

Lien entre M et ϕ_0 source de complexité.

Solutions stationnaires et fonctionnelle d'énergie

ϕ est solution de l'EDP non linéaire

$$-\kappa\Delta\phi + \delta(\phi + \phi_0) - F'(\phi) = 0,$$

Solutions stationnaires et fonctionnelle d'énergie

ϕ est solution de l'EDP non linéaire

$$-\kappa\Delta\phi + \delta(\phi + \phi_0) - F'(\phi) = 0,$$

i.e. ϕ est un point critique de la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{E}_{\phi_0} = \frac{\kappa}{2} \int |\nabla\phi|^2 + \frac{\delta}{2} \int (\phi + \phi_0)^2 - \int F(\phi),$$

avec

$$\begin{cases} \frac{1}{1+e^{-\phi}} & \text{(I),} \\ \log(1 + e^{-\phi}) & \text{(II).} \end{cases}$$

Notation

Avec $(\rho, D = \phi + \phi_0)$ solution stationnaire :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}_{\phi_0}[\phi + \varepsilon v] - \mathcal{E}_{\phi_0}[\phi]}{2\varepsilon^2} = \int v E(v)$$

$$\mathcal{L}[u, v] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}[\rho + \varepsilon u, D + \varepsilon v] - \mathcal{L}[D]}{2\varepsilon^2}$$

H opérateur d'évolution linéarisé, *i.e.*

$$(u, v)_t = H(u, v) = \begin{cases} \nabla \cdot \left[\rho(1 - \rho) \nabla \left(\frac{u}{\rho(1 - \rho)} - v \right) \right] \\ \kappa \Delta v - \delta v + h(\rho)u. \end{cases}$$

Stabilité

Deux notions de stabilité pour une solution stationnaire $(\rho, D = \phi + \phi_0)$.

- Stabilité variationnelle : (ρ, ϕ) stable si c'est un minimiseur local pour \mathcal{E}_{ϕ_0} , *i.e.*

$$\inf_{\int v \rho(1-\rho)=0} \int v E[v] / \int v^2 =: \Lambda > 0.$$

Stabilité

Deux notions de stabilité pour une solution stationnaire $(\rho, D = \phi + \phi_0)$.

- Stabilité variationnelle : (ρ, ϕ) stable si c'est un minimiseur local pour \mathcal{E}_{ϕ_0} , *i.e.*

$$\inf_{\int v \rho(1-\rho)=0} \int v E[v] / \int v^2 =: \Lambda > 0.$$

- Stabilité dynamique :

$$2 \inf_{\substack{\int u = 0 \\ \int v^2 = 1}} L[u, v] =: \Lambda_1 > 0.$$

Stabilité

Deux notions de stabilité pour une solution stationnaire $(\rho, D = \phi + \phi_0)$.

- Stabilité variationnelle : (ρ, ϕ) stable si c'est un minimiseur local pour \mathcal{E}_{ϕ_0} , *i.e.*

$$\inf_{\int v \rho(1-\rho)=0} \int v E[v] / \int v^2 =: \Lambda > 0.$$

- Stabilité dynamique :

$$2 \inf_{\substack{\int u = 0 \\ \int v^2 = 1}} L[u, v] =: \Lambda_1 > 0.$$

Peut-on lier les deux notions ?

Résultat (modèle II)

Théorème

Soit (ρ, D) une solution stationnaire telle que $\int \rho = M$.

- (i) Si (ρ, D) est un minimiseur local de \mathcal{L} sous contrainte de masse, alors toute solution (u, v) du système linéarisé converge vers $(0, 0)$.*
- (ii) La stabilité dynamique implique la stabilité variationnelle.*
- (iii) Instabilité instabilité dynamique et variationnelle sont équivalentes.*

Éléments de preuve

- $\mathcal{L}[\rho, D] \geq \mathcal{E}_{\phi_0}$, égalité si $\rho = \frac{1}{1+e^{\phi_0-D}}$
- H est auto-adjoint pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$, le produit scalaire associé à L , dans l'orthogonal du noyau de E
- Pour un minimiseur local de \mathcal{L} ,
$$\frac{d}{dt}L = \langle (u, v), H(u, v) \rangle \leq 0.$$
- On montre que $\Lambda_1 \leq \Lambda$, et si $\Lambda_1 < \delta$ ou $\Lambda < \delta$, alors $\Lambda_1 = \Lambda$

Résultats numériques

- Restriction aux solutions (et perturbations) radiales
- Calculs via méthode de tir (SciPy)

Résultats numériques

- Restriction aux solutions (et perturbations) radiales
- Calculs via méthode de tir (SciPy)
- Résultats principalement en 1D, en 2D, modèle II seulement

Diagramme de bifurcation - 1D Model I

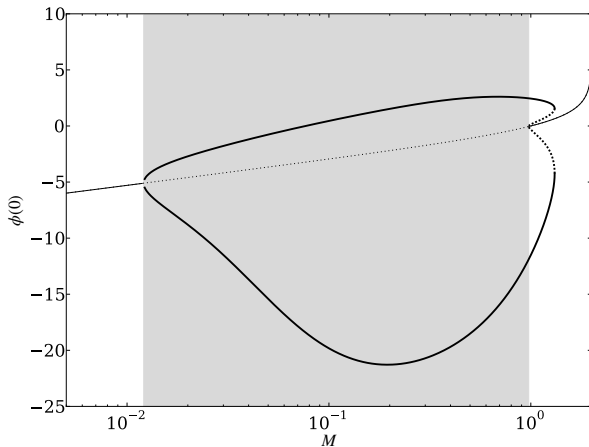


Figure : Bifurcation $\delta = 10^{-3}$, $\kappa = 5 \cdot 10^{-4}$

Diagramme de bifurcation - 1D

Model II

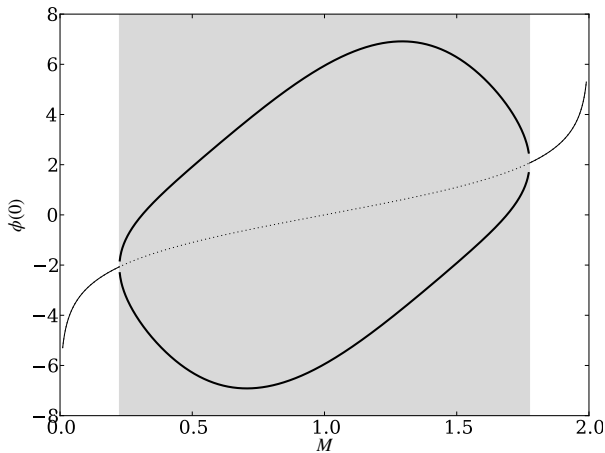


Figure : Bifurcation $\delta = 10^{-3}$, $\kappa = 5 \times 10^{-3}$

Diagramme de bifurcation - 2D

Model II

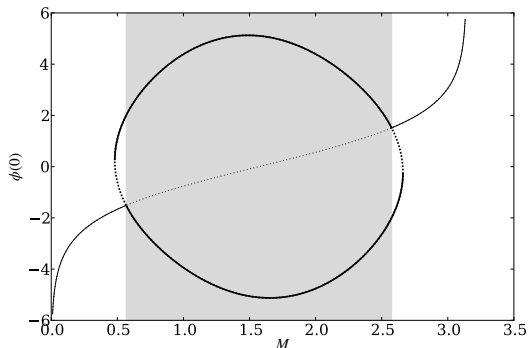
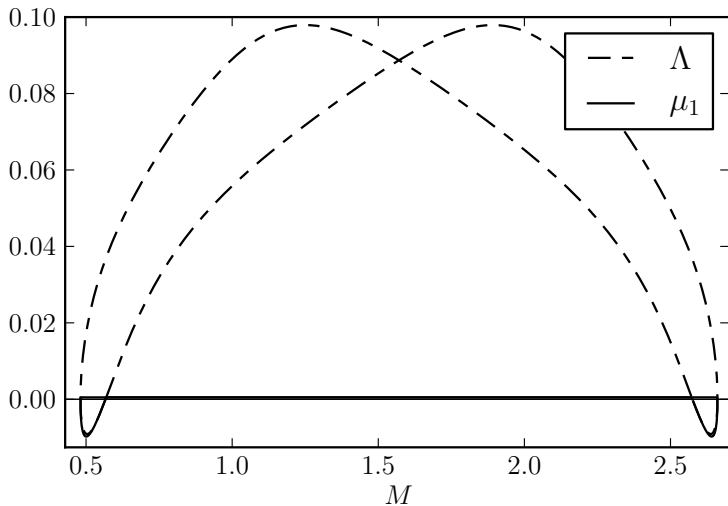
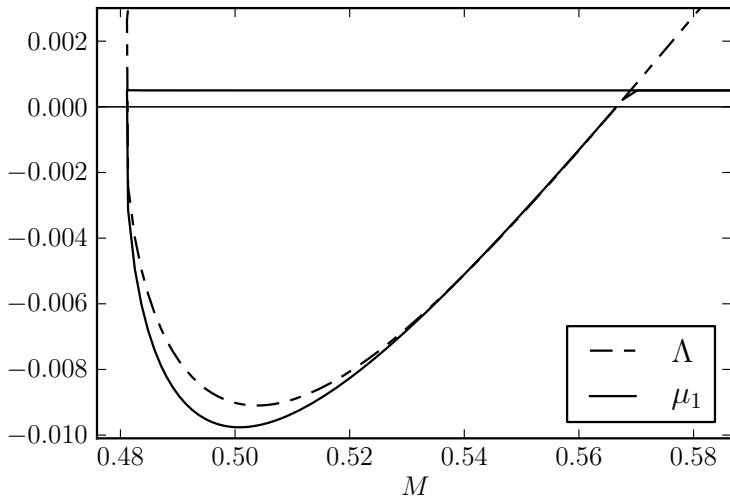


Figure : Bifurcation $\delta = 10^{-3}$, $\kappa = 2.5 \times 10^{-3}$

Stabilité



Stabilité



Conclusion

- Peu de résultats sur le modèle I
- Numérique restreint aux solutions et perturbations radiales
- Instabilité variationnelle équivalente instabilité dynamique

Conclusion

- Peu de résultats sur le modèle I
- Numérique restreint aux solutions et perturbations radiales
- Instabilité variationnelle équivalente instabilité dynamique
- En cours, même analyse pour les solutions auto-similaire du modèle de Keller-Segel parabolique-parabolique dans \mathbb{R}^2 avec $\delta = 0$.

Références

- M. Burger, P. A. Markowich, and J.-F. Pietschmann. Continuous Limit of a Crowd Motion and Herding Model : Analysis and Numerical Simulations. *Kinetic & Related Models*, 4(4) :1025–1047, Dec. 2011.
- J. Dolbeault, G.J., and P. Markowich. Stationary solutions of keller-segel type crowd motion and herding models : multiplicity and dynamical stability. *arXiv :1305.1715*, 2013.

Solutions
stationnaires pour
deux modèles de
mouvement de
foule :
multiplicité et
stabilité
dynamique

J. Dolbeault,
G. Jankowiak,
P. Markowich

Références

Merci !