Université Paris Dauphine
Algèbre linéaire 3
2010-2011

Algèbre linéaire 3 : exercices supplémentaires

Exercices totalement optionnels. Commencez par chercher sans lire les indices donnés en bas de page. [$\star$] : il y a juste à écrire en étant rigoureux, [$\star\star$], il faut un peu réfléchir, [$\star\star\star$], il faut beaucoup réfléchir.

1 Espaces vectoriels

Exercice 1 [$\star\star$] Montrer que toute matrice de rang 1 s'écrit sous la forme $M = xy^T$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Exercice 2 [$\star$] (Opérations sur des espaces vectoriels) Soit E un espace vectoriel, S_1 et S_2 deux sous-espaces. Dites si les espaces suivants sont des espaces vectoriels. Dans le cas où E est de dimension finie, donner leur dimension, et un procédé de construction d'une base à partir de celles de S_1 et S_2.

$$\begin{aligned} E_1 &= S_1 \cap S_2 \\ E_2 &= S_1 \cup S_2 \\ E_3 &= S_1 + S_2 = \{x + y, x \in S_1, y \in S_2\} \\ E_4 &= S_1 \times S_2 = \{(x, y), x \in S_1, y \in S_2\} \end{aligned}$$

Pour E_4, qui n'est pas un sous-ensemble de E, définir les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire.

Exercice 3 [$\star\star\star$] (Interpolation, matrice de Vandermonde) On considère le problème d'interpolation polynomiale : étant donné des réels $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$, on cherche un polynome P de degré $n - 1$ qui interpole le jeu de valeurs, c'est-à-dire tel que

$$P(x_i) = y_i, 1 \leq i \leq n$$

- Réécrire ce problème sous la forme d'une équation matricielle $VA = Y$, où A est le vecteur des coefficients du polynome P : $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$ et Y le vecteur des y_i. La matrice V est appelée matrice de Vandermonde associée aux points (x_i).
- Démontrer que si les x_i sont tous distincts, la matrice V est inversible, et ainsi prouver l'existence et l'unicité du problème d'interpolation polynomiale. [1]
- Donner l'expression explicite du polynome correspondant à la j-ième colonne de l'inverse de V (c'est-à-dire dont les coefficients sont égaux à la j-ième colonne de V^{-1}) [2]. Ces polynômes sont appelés polynômes de Lagrange. Ils s'interprètent naturellement comme étant la base antéduale de la base de l'espace dual $l_i : P \to P(x_i)$ (la base antéduale d'une base de l'espace dual l_i est une base e_i dont la base duale est l_i, c'est-à-dire vérifiant $l_i(e_j) = \delta_{i,j}$)

1. Indice : on pourra montrer que si $VA = 0$, alors P est nul.
2. Indice : on pourra montrer qu'il correspond au problème d'interpolation $P(x_i) = 1$ si $i = j$, 0 sinon, et résoudre ce problème explicitement en factorisant P

- Que se passe-t-il si on considère des polynomes de degré supérieur ou inférieur à $n-1$?
- On cherche à calculer le déterminant de la matrice de Vandermonde $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On admet que le déterminant est une fonction polynomiale de degré $n-1$ des x_i (le vérifier sur $n=2$ ou $n=3$; on peut le démontrer avec une bonne définition du déterminant). Factoriser ce polynome, et en déduire $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à une constante k_n près. Calculer k_n pour $n = 1, 2, 3$ (prendre des x_i où le calcul est simple), et conjecturer la valeur de k_n. On peut démontrer cette conjecture avec des notions plus avancées sur les déterminants.

Exercice 4 [$\star$] (Équivalence de normes) Prouver les inégalités suivantes sur $\mathbb{R}^N$. À chaque fois, donner un cas d'égalité, ce qui prouve que les inégalités sont optimales (on ne peut pas remplacer les constantes par des constantes plus faibles) [3]

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &\leq \sqrt{N}\|x\|_2 \\ \|x\|_2 &\leq \sqrt{N}\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty &\leq N\|x\|_1 \end{aligned}$$

Ceci prouve que ces trois normes sont équivalentes (c'est-à-dire définissent la même topologie : même notions de continuité, de limites, etc.). Ce sont des cas particuliers du théorème fondamental : toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

Exercice 5 [$\star\star$] (Norme induite) Soit f une application linéaire sur $(E, \|.\|)$ de dimension finie. On définit la *norme induite* par $\|.\|$:

$$N(f) = \sup\left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \;\middle|\; x \in E \setminus \{0\} \right\} = \sup\left\{ \|f(x)\| \;\middle|\; x \in E,\ \|x\| = 1 \right\}.$$

Montrer que N est bien définie, puis que c'est une norme sur l'espace $\mathrm{End}(E)$ des endomorphismes de E.

Exercice 6 [$\star\star$] (Normes de matrices) Soit une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$. La norme induite par $\|.\|$ (cf exercice précédent) définit une norme sur l'espace des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- Montrer que la norme induite par $\|.\|_1$ s'exprime comme

$$N(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(somme sur les lignes)}$$

- Montrer que la norme induite par $\|.\|_\infty$ s'exprime comme

$$N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(somme sur les colonnes)}$$

- (Nécessite le théorème spectral, 4.4 du cours) Montrer que, pour le cas particulier d'une matrice symétrique, la norme induite par $\|.\|_2$ est $|\lambda|_{\max}$, la plus grande valeur propre en valeur absolue. [Difficile] Généraliser à une matrice non symétrique [4].

3. Indice : pour la première, utiliser Cauchy-Schwartz
4. Indice : écrire les conditions d'optimalité pour obtenir que le x qui maximise $||Ax||/||x||$ est vecteur propre de A^TA (on peut utiliser la première forme de N(A) ou la deuxième via la méthode des multiplicateurs de Lagrange). Conclure.

2 Produit scalaire

Exercice 7 [$\star$] (Polynomes orthogonaux) On considère l'espace E_n des polynomes de degré n. On considère la fonction

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ.$$

Montrer que c'est un produit scalaire. Donner une base orthonormée de E_0, E_1, E_2 [5]. La base ainsi obtenue forme les polynomes de Legendre. Il existe toute une ménagerie de polynomes orthogonaux pour différents produits scalaires [6], avec des applications en physique, théorie de l'approximation, etc.

Exercice 8 [$\star$] (Polynomes trigonométriques) On considère l'espace vectoriel (le vérifier) E des fonctions continues, périodiques de période 2π. Montrer que

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} fg$$

est un produit scalaire sur E. On considère la famille infinie $\{\cos(nx), \sin(nx), n \in \mathbb{Z}\}$ d'éléments de E. Montrer que cette famille est orthogonale. Comment modifier cette famille pour l'orthonormaliser ? Comment modifier le produit scalaire sans toucher à la famille pour l'orthonormaliser ?

On peut montrer qu'en un certain sens, la famille $\{\cos(nx), \sin(nx), n \in \mathbb{Z})$ est une "base de dimension infinie" de E. En d'autres termes, pour tout f dans E, on a

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Comme la base est orthogonale, les coefficients a_n et b_n s'obtiennent comme projection orthogonale de f sur la base. On a donc

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\langle f, \cos(nx) \rangle}{\langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \end{aligned}$$

et de même

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Cette décomposition de f en somme de signaux élémentaires (appelés harmoniques) a d'innombrables applications, en mathématiques pures (équations aux dérivées partielles, théorie des nombres ...) et appliquées (JPEG, MP3 ... à chaque fois le principe est de garder un nombre fini de coefficients a_n et b_n pour reconstituer le signal à partir d'un nombre réduit de variables) ainsi qu'en physique (électronique, traitement du signal ... par exemple, les égaliseurs des chaînes hifi).

Exercice 9 [$\star \star \star$] (Alternative de Fredholm) On s'intéresse à l'équation linéaire $Ax = b$ sur $\mathbb{R}^n$. On sait que quand A est inversible, il existe une unique solution. Quand A est non inversible, il y a soit une infinité soit aucune solution. On va préciser cette alternative.

---

5. Indice : on pourra orthonormaliser la base canonique de l'espace des polynomes grâce au procédé de Gram-Schmidt.

6. `http://fr.wikipedia.org/wiki/Polynomes_orthogonaux#Tableau_des_polynomes_orthogonaux_classiques`

- Montrer que si il existe x tel que $Ax = b$, alors pour tout $y \in \ker(A^T)$, $y^T b = 0$.
- Montrer que $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(A^T))$
- En déduire que $\mathrm{Im}(A)$ est un supplémentaire orthogonal de $\ker(A^T)$.
- Conclure l'alternative de Fredholm : soit $b \in \ker(A^T)^\perp$, auquel cas $Ax = b$ admet une infinité de solutions, soit $b \notin \ker(A^T)^\perp$, auquel cas $Ax = b$ n'admet pas de solutions.
- Vérifier sur un exemple simple que cette formulation formalise la notion intuitive : pour qu'un système avec des équations qui se déduisent les unes des autres ait une solution, il faut que les équations soient compatibles entre elles [7].

L'alternative de Fredholm donne les équations permettant de tester si $Ax = b$ a une solution. Elle admet des généralisations à certains cas en dimension infinie, qui sont par exemple utilisées pour des questions d'existence d'équations différentielles.

3 Projecteurs

Exercice 10 [$\star$] Montrer que la matrice $M = xx^T$ représente la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par x. En s'inspirant de cette forme, donner l'expression de la matrice de la projection orthogonale sur un sous-espace.

Exercice 11 [$\star\star\star$] (Moindres carrés) Reformuler les résultats du cours en utilisant le langage matriciel, sous la forme : trouver $x \in \mathbb{R}^n$ qui minimise

$$F(x) = \|Ax - b\|_2^2,$$

où $b \in \mathbb{R}^m$ et $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ sont fixés. n est le nombre de paramètres, m le nombre d'observations, $m \gg n$.

On rappelle les conditions nécessaires pour que x soit le minimum de F :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \frac{d}{d\varepsilon} F(x + \varepsilon y) = 0$$

(ou, autrement dit, $\nabla F(x) = 0$). En déduire que, pour le minimum, on a

$$A^T A x = A^T b$$

Ces équations (les "équations normales") expriment les conditions d'orthogonalité vues en cours (le vérifier sur le cas bien connu de la droite des moindres carrés).

7. Indice : $y \in \ker(A^T)$ est le vecteur des combinaisons linéaires d'équations