Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DUMI2E troisième année

Optimisation numérique
François-Xavier Vialard
année 2011/2012

Séance de TD/TP n°3

Objectif

On s'intéresse au problème de débruitage d'une image donnée par des méthodes variationnelles. La donnée d'une image numérique est une matrice de taille (n, n). On utilisera l'image test classique en traitement d'image `lena.jpg` de taille $(512, 512)$ pour valider les algorithmes implémentés. Les méthodes de débruitage reposent souvent sur des méthodes variationnelles qui passent par une représentation continue de l'image. C'est à dire que les modèles sont introduits sur des espaces fonctionnels et une approximation discrète est ensuite utilisée pour les tests numériques.

1. Norme L^2

On rappelle qu'une image numérique au format RGB est composée de trois matrices M^k, représentant les trois canaux de couleur rouge, vert et bleu. Pour chacun de ces canaux, la valeur $M^k_{i,j}$ est un entier entre 0 et 255 et représente l'intensité lumineuse (0 pour le noir, 255 pour le blanc). Ainsi, une couleur violette (rouge + bleu) très lumineuse au pixel (i, j) sera encodée par $M^1(i, j) = 255, M^2(i, j) = 0, M^3(i, j) = 255$.

Question 1 *Télécharger le fichier* `lena.jpg` *sur*
http://www.ceremade.dauphine.fr/~levitt/optinum/
La charger sous la forme d'un tableau à trois dimensions $n \times n \times 3$ par la commande [1]

```
lena_rgb = imread('lena.jpg');
```

Ce tableau est un tableau d'entiers non signés codés sur 8 bits, ce n'est pas adapté pour la manipulation d'image. On va donc le convertir en tableau de nombres à virgule flottante :

```
lena_rgb = cast(lena_rgb, 'double');
```

Par soucis de simplicité, on ne veut travailler sur un seul canal ; pour ceci convertir l'image en niveaux de gris en faisant une moyenne sur les 3 canaux. [2]

```
lena = (lena_rgb(:,:,1) + lena_rgb(:,:,2) + lena_rgb(:,:,3))/3
```

On peut afficher l'image par la commande `imagesc(lena);colormap('gray');`

1. Vous pouvez utiliser n'importe quelle image (carrée) de la même manière.
2. C'est une opération grossière qui ne prend pas en compte les particularités de la vision humaine : 2 lampes bleue et verte de même puissance ne sont pas perçues comme ayant la même clarté. Pour plus d'info :
`http://en.wikipedia.org/wiki/Grayscale`
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_spectrale`

Question 2 *Implémenter l'algorithme du gradient conjugué pour résoudre numériquement le problème discretisé. On rappelle l'algorithme pour minimiser* $\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ *:*

Initialisation de $k = 0$*,* $x_0 \in \mathbb{R}^{n^2}$*,* $r_0 \leftarrow Ax_0 + b$ *and* $p_0 \leftarrow -r_0$ *et itération tant que* $r_k \neq 0$ *de*

$$\begin{cases} \alpha_k \leftarrow \frac{\langle r_k, r_k\rangle}{\langle p_k, Ap_k\rangle} \\ x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k p_k \\ r_{k+1} \leftarrow r_k + \alpha_k A p_k \\ \beta_{k+1} \leftarrow \frac{\langle r_{k+1}, r_{k+1}\rangle}{\langle r_k, r_k\rangle} \\ p_{k+1} \leftarrow -r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k \\ k \leftarrow k+1 \end{cases} \tag{1}$$

Pourquoi choisit-on cette méthode ? Qu'est-ce qui joue le rôle de A *et* b *dans notre cas ? Attention, implémenter cet algorithme de façon à pouvoir changer facilement* A *et* b*.*

Question 3 *Utiliser l'agorithme pour* `lena.jpg` *à laquelle vous ajouterez un bruit gaussien, c'est à dire pour* $(i, j) \in [1, n] \times [1, n]$*, on pose :*

$$g_{i,j} = f_{i,j} + r_{i,j} \tag{2}$$

avec $r_{i,j}$ *un tirage de variables gaussiennes indépendantes de variance* σ *et de moyenne nulle.*

Question 4 *Comparer la convergence de l'algorithme avec une descente de gradient à pas fixe.*

Question 5 *Que se passe-t-il pour des valeurs extrêmes de* β *et comment l'expliquez-vous ?*

2. Norme L^1

Question 6 *La méthode de Newton utilise la direction de descente définie par :*

$$-[\nabla^2 f(x)]^{-1}(\nabla f(x))\,.$$

Utiliser la méthode du gradient conjugué pour implémenter la méthode de Newton à pas fixe.

Question 7 *Observer la vitesse de convergence et la comparer à une descente de gradient à pas fixe. Comme le calcul de la direction de descente pour l'algorithme de Newton est relativement longue, établir une comparaison prenant en compte le temps de calcul de chaque algorithme.*

Question 8 *Comparer les résultats de ce nouveau modèle avec le précédent. Proposer une explication.*