Optimisation numérique - Corrigé contrôle continu du 15 mars 2012

Exercices 1 et 2

Voir cours.

Exercice 3

Question 1

$x \to x^6$ est strictement convexe, puisque sa dérivée $x \to 5x^5$ est strictement croissante. $F : x \to \sum_{i=1}^n x_i^6$ est donc strictement convexe. Soit $x, y \in S$, supposons qu'il existe un $t \in]0,1[$ tel que $tx + (1-t)y \in S$. Alors, $F(tx + (1-t)y) < tF(x) + (1-t)F(y) = 1$, donc $tx + (1-t)y$ n'est pas sur S.

Question 2

Tout d'abord, B est un fermé (image réciproque d'un fermé par une application continue) borné (puisque $|x_i| \leq 1$). Comme on est en dimension finie, B est compact, et, par le théorème de Weierstrass, $f(x)$, application linéaire donc continue, admet un minimiseur.

Supposons que le minimum est atteint sur un point de l'intérieur de B. Alors le point vérifie la condition nécessaire du premier ordre, et $\nabla F = a = 0$, ce qui est impossible. Les seuls minimiseurs possibles sont donc sur S. Supposons qu'il existe deux minimiseurs x et y sur S. Comme f est linéaire, $f(\frac{x+y}{2}) = f(x) = f(y)$ et donc $\frac{x+y}{2}$ est sur S. Mais par la question précédente, $x = y$, ce qui montre l'unicité.

Question 3

L'unique minimum est solution de : minimiser $f(x)$ sous contrainte $g(x) = \sum_{i=1}^n x_i^6 = 1$. On peut donc utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange, et on obtient l'équation $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$, soit $a_i = 5\lambda x_i^5$, soit

$$x_i = \left(\frac{a_i}{5\lambda}\right)^{1/5}$$

En injectant cette équation dans les contraintes, on obtient une équation pour λ, qu'on résoud pour obtenir

$$x_i = \frac{a_i^{1/5}}{\left(\sum_{j=1}^n a_j^{6/5}\right)^{1/6}}$$

Exercice 4

Question 1

On sait (cf TD) que

$$\nabla f(x) = Ax + b$$
$$\nabla^2 f(x) = A$$

$\nabla^2 f(x)$ est définie positive, donc f est coercive et strictement convexe. Comme elle est continue et coercive, il existe un minimum. Comme elle est strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ qui est convexe, ce minimum est unique. Il est donné par l'équation $\nabla f(x) = 0$, soit $Ax + b = 0$, qui possède une unique solution $x = -A^{-1}b$, puisque A est DP donc inversible.

Question 2

Voir cours, l'itération s'écrit $x_{n+1} = x_n - t\nabla f(x_n)$, où t est un pas fixé. La condition est $t < 2/L$.

Question 3

On prend par exemple $g(x) = e^{-x^2}$. g'' est borné sur $\mathbb{R}$, donc la dérivée est bien Lipschitzienne. Pourtant, l'algorithme diverge quel que soit le pas pour $x_0 \neq 0$. En effet, si la suite converge, c'est nécessairement vers un point critique, c'est-à-dire 0, et c'est impossible pour $x_0 \neq 0$ puisque la suite s'éloigne de 0.

On a convergence dans le cas de f car f est coercive, ce qui garantit la compacité des ensembles de niveaux (cf cours).

Question 4

On rappelle le théorème du point fixe de Banach. Soit $F : X \to X$ une application K-Lipschitzienne sur un Banach X, avec $|K| < 1$. Alors il existe un unique point fixe x^* de F, et la suite $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers ce point fixe à la vitesse $O(|K|^n)$.

On applique ce théorème à $F(x) = x - t\nabla f(x)$. On calcule la jacobienne de F pour étudier la constante de Lipschitz :

$$\begin{aligned}\nabla F(x) &= I - t\nabla^2 f(x) \\ &= I - tA\end{aligned}$$

La constante de Lipschitz (le taux de contraction) est la plus grande valeur propre en valeur absolue de cette matrice. A étant DP, la plus petite valeur propre est $1 - t\lambda_n$, et la plus grande $1 - t\lambda_1$, où λ_1 et λ_n sont les plus petites et plus grandes valeurs propres de A. La plus grande valeur propre en valeur absolue est minimisée quand ces deux valeurs sont opposées, soit quand $1 - t\lambda_1 = t\lambda_n - 1$, donc $t = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$ (à comparer avec la condition $t < 2/L$).