Université Paris-Dauphine
Département MIDO
Chargé de cours :
Chargés de TD/TP :
DUMI2E troisième année

Optimisation numérique

F.-X. Vialard.
G. Jankowiak, A. Frouvelle.
année 2012/2013

TD n°3 : Inpainting

Objectif

On s'intéresse au problème dit d'*inpainting* d'une image par des méthodes variationnelles. Le problème d'inpainting est le suivant : étant donnée une image[(1)] dont on ne connait pas la valeur en certains pixels, proposer une reconstitution qui parait réaliste. Différentes méthodes ont été proposées dans la littérature scientifique dont certaines reposent sur des méthodes variationnelles.

Dans la suite, on étudie deux méthodes variationnelles pour résoudre le problème d'inpainting. Ces deux méthodes reposent sur un modèle continu des images, par exemple une image I est une représentation discrète de $f : [0,1]^2 \mapsto \mathbb{R}$ et on cherche à minimiser sur cet espace de fonctions une fonctionnelle généralement composée de deux termes :

1. un terme d'énergie associé à la fonction f (exemple d'énergie, la norme L^2 de f)
2. un terme d'attache aux données qui prend en compte l'information dont on dispose (en l'occurence, les valeurs connues des pixels).

Un modèle discret est construit à partir du modèle continu et des méthodes d'optimisation adéquates sont utilisées pour la résolution du problème de minimisation.

1. Modélisation

On considère qu'une image est la representation discrète d'une fonction $f : [0,1] \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}$. La question suivante présente une simple projection d'une fonction f sur l'ensemble des images.

Question 1 *Soit $U_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $\chi_{i,j} : [0,1]^2 \mapsto \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de $U_i \times U_j$. Écrire la projection orthogonale de f sur $Vect(\chi_{i,j} \,|\, i, j = 1, \ldots, n)$. On suppose que cette projection est l'image numérique correspondant à f.*

Dans la suite, on considère que la donnée du problème est m (appelé masque) et mf, avec $m : [0,1]^2 \mapsto \{0,1\}$ une application mesurable (qui vaut 1 où la fonction f est connue et 0 où on ne connait pas f). A partir de ces données, on définit une fonctionnelle sur l'espace $L^2([0,1]^2, \mathbb{R})$ que l'on cherche à minimiser. On propose le premier modèle suivant :

Question 2 *La fonction recherchée g appartient à l'espace des fonctions $L^2([0,1]^2, \mathbb{R})$ et le terme d'énergie est le carré de la norme L^2. On propose le terme d'attache suivant : $\frac{1}{2}\|m(f-g)\|^2_{L^2}$. Résoudre le problème de minimisation de la fonctionnelle suivante pour $g \in L^2([0,1]^2, \mathbb{R})$*

$$\mathcal{J}_0(g) = \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|m(f-g)\|^2_{L^2} \,. \tag{1}$$

Commenter le résultat et donner le résultat de la minimisation associée dans le cas discret.

Pour proposer un modèle plus intéressant, on suppose que l'image recherchée appartient à l'espace des fonctions dérivables et dont la dérivée est dans $L^2([0,1]^2, \mathbb{R}^2)$. On formule maintenant un problème d'optimisation permettant de résoudre le problème d'inpainting :

$$\mathcal{J}_1(g) = \frac{1}{2\beta}\|\nabla g\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|m(f-g)\|^2_{L^2} \,, \tag{2}$$

où β est un paramètre réel positif. Minimiser $\mathcal{J}_1$ donnera a priori un bon compromis entre le terme d'attache aux données et le terme d'énergie.

1. La donnée d'une image numérique en "noir et blanc" est une matrice réelle de taille (n, m).

Question 3 *Pour comprendre pourquoi ce modèle donnera probablement de meilleurs résultats que le premier, il suffit de traiter l'exemple suivant en dimension 1 :*
- *Minimiser* $\int_0^1 |\nabla g(x)|^2 \, dx$ *sous la contrainte* $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ *pour* g *dérivable.*
- *Faire le lien avec le terme d'énergie dans* $\mathcal{J}_1$.

Question 4 *Écrire une version discrète des termes* $\frac{1}{2}\|m(f-g)\|_{L^2}^2$ *et* $\frac{1}{2\beta}\|\nabla g\|_{L^2}^2$ *qui soient des fonctions quadratiques des valeurs* $[g_{i,j}]_{(i,j)\in[1,n]^2}$ *et* $[f_{i,j}]_{(i,j)\in[1,n]^2}$. *On supposera que le masque* m *pour le cas discret rend connues des valeurs* $f_{i,j}$ *pour* $i, j \in \mathcal{M} \subset [1,n]^2$ *et on utilisera des différences finies décentrées pour l'approximation du gradient.*

Question 5 *Quelle est la régularité de la fonctionnelle discrète en fonction des coefficients matriciels ? Discuter de l'existence et de l'unicité de solutions du problème discret. On donnera une condition nécessaire et suffisante sur* $\mathcal{M}$ *pour obtenir l'unicité.*

Question 6 *Calculer le gradient et la Hessienne de la fonctionnelle discrète en fonction des coefficients de la matrice associée à* g *et de la matrice associée à* f *connue uniquement sur* $\mathcal{M}$. *Remarquer que la Hessienne de ce problème est creuse (c'est-à-dire beaucoup de coefficients sont nuls).*

2. Un autre modèle

Dans cette partie, on considère un autre terme d'énergie qui fait intervenir la norme L_1 sur les fonctions :

$$\|f\|_{L_1} = \int_{[0,1]^2} |f(x)| \, dx \, dy \,. \tag{3}$$

On souhaite utiliser la norme L^1 du gradient de l'image (plutôt que sa norme L^2).

Question 7 *Proposer une version discrète (c'est à dire sur les matrices) de la fonctionnelle*

$$\mathcal{J}_2(g) = \frac{1}{2}\|m(f-g)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\beta}\|\nabla g\|_{L^1} \,.$$

Question 8 *Discuter l'existence et l'unicité de solutions de ce problème de minimisation.*

Question 9 *Pourquoi cette fonctionnelle ne rentre-t-elle pas dans le cadre d'applications des méthodes numériques étudiées en cours ?*

Question 10 *On propose de remplacer la norme* L^1 *par*

$$\|f\|_\varepsilon = \int_{[0,1]^2} \sqrt{f(x)^2 + \varepsilon^2} \, dx \, dy \,., \tag{4}$$

pour un paramètre ε *réel strictement positif.*
Proposer un équivalent discret de cette norme sur la représentation numérique de l'image.

Question 11 *En déduire l'expression de la fonctionnelle discrète correspondant à*

$$\mathcal{J}_2(g) = \frac{1}{2}\|m(f-g)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\beta}\|\nabla g\|_\varepsilon$$

qui soit une fonction régulière des coefficients matriciels.

Question 12 *Calculer le gradient de la fonctionnelle* (4) *et la hessienne.*