Klassifikation von Tonreihen und Tropen

Harald Fripertinger, Universität Graz
Peter Lackner, Universität für Musik und Darstellende Kunst, Graz.

Festkolloquium zum 75. Geburtstag von Prof. Adalbert Kerber
Universität Bayreuth
5. Juli 2014

Klassifikation von Tonreihen und Tropen

Harald Fripertinger, Universität Graz

Peter Lackner, Universität für Musik und Darstellende Kunst, Graz.

Festkolloquium zum 75. Geburtstag von Prof. Adalbert Kerber

Universität Bayreuth

5. Juli 2014

1. Einleitung: Pitch classes, Tonreihen, Äquivalenz von Tonreihen.

Klassifikation von Tonreihen und Tropen

Harald Fripertinger, Universität Graz
Peter Lackner, Universität für Musik und Darstellende Kunst, Graz.

Festkolloquium zum 75. Geburtstag von Prof. Adalbert Kerber
Universität Bayreuth
5. Juli 2014

1. Einleitung: Pitch classes, Tonreihen, Äquivalenz von Tonreihen.
2. Bahnen von Tonreihen, Stabilisatoren von Tonreihen, Tropenstruktur.

Klassifikation von Tonreihen und Tropen

Harald Fripertinger, Universität Graz
Peter Lackner, Universität für Musik und Darstellende Kunst, Graz.

Festkolloquium zum 75. Geburtstag von Prof. Adalbert Kerber
Universität Bayreuth
5. Juli 2014

1. Einleitung: Pitch classes, Tonreihen, Äquivalenz von Tonreihen.
2. Bahnen von Tonreihen, Stabilisatoren von Tonreihen, Tropenstruktur.
3. Der Parametertausch.

Klassifikation von Tonreihen und Tropen

Harald Fripertinger, Universität Graz

Peter Lackner, Universität für Musik und Darstellende Kunst, Graz.

Festkolloquium zum 75. Geburtstag von Prof. Adalbert Kerber

Universität Bayreuth

5. Juli 2014

1. Einleitung: Pitch classes, Tonreihen, Äquivalenz von Tonreihen.

2. Bahnen von Tonreihen, Stabilisatoren von Tonreihen, Tropenstruktur.

3. Der Parametertausch.

4. Die Datenbank.

Home Page
Title Page
Contents
Page 2 of 37
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Tonleiter — Pitch classes

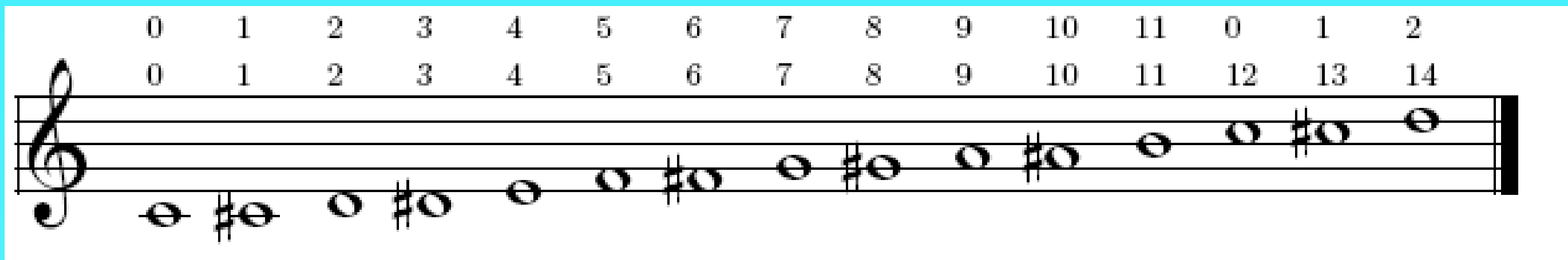
Sei $\mathbb{Z}$ die Menge aller möglichen Töne. (Z.B. sei $f = 440$Hz, dann könnte man $n \mapsto 2^{n/12} f$ als die Frequenz des n-ten Tons, $n \in \mathbb{Z}$, interpretieren.)

Oktav-Äquivalenz

Äquivalenzklassen sind die pitch classes

Menge der pitch classes ist der Restklassenring $\mathbb{Z}_{12} := \mathbb{Z} \bmod 12\mathbb{Z}$

chromatische Tonleiter:



Tonreihen

Tonreihe: Abfolge von 12 Tönen, wobei Töne in unterschiedlichen Positionen zu verschiedenen pitch classes gehören müssen.

$$f\colon\{1,\dots,12\}\to\mathbb{Z},\qquad \overline{f(i)}\neq\overline{f(j)},\; i\neq j.$$

$\{1,\dots,12\}$ Positionen der Einsatzzeiten der einzelnen Töne $f(i)$, $i\in\{1,\dots,12\}$, ist der Ton in i-ter Position.

Tonreihen

Tonreihe: Abfolge von 12 Tönen, wobei Töne in unterschiedlichen Positionen zu verschiedenen pitch classes gehören müssen.

$$f\colon\{1,\ldots,12\}\to\mathbb{Z}, \qquad \overline{f(i)}\neq\overline{f(j)},\ i\neq j.$$

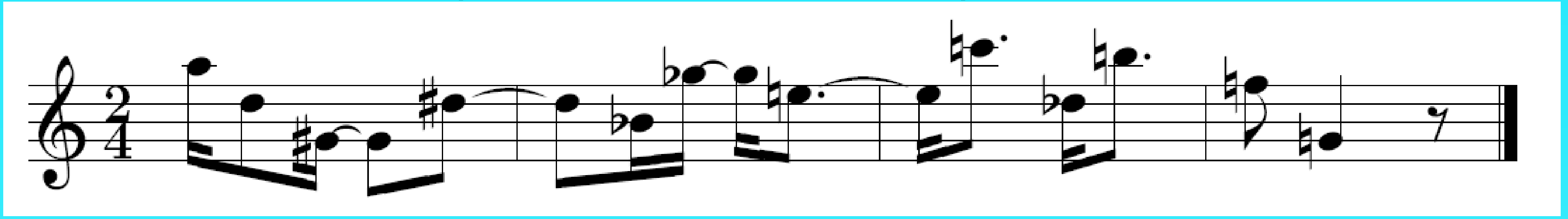
$\{1,\ldots,12\}$ Positionen der Einsatzzeiten der einzelnen Töne
$f(i)$, $i\in\{1,\ldots,12\}$, ist der Ton in i-ter Position.
Jeder Tonreihe entspricht eine injektive (bijektive) Abbildung

$$f\colon\{1,\ldots,12\}\to\mathbb{Z}_{12}.$$

Die Menge aller Tonreihen ist demnach die Menge aller bijektiven Funktionen von $\{1,\ldots,12\}$ nach $\mathbb{Z}_{12}$.
Dies liefert eine Gesamtheit von $12! = 12\cdot 11\cdots 2\cdot 1 = 479\,001\,600$ Tonreihen.

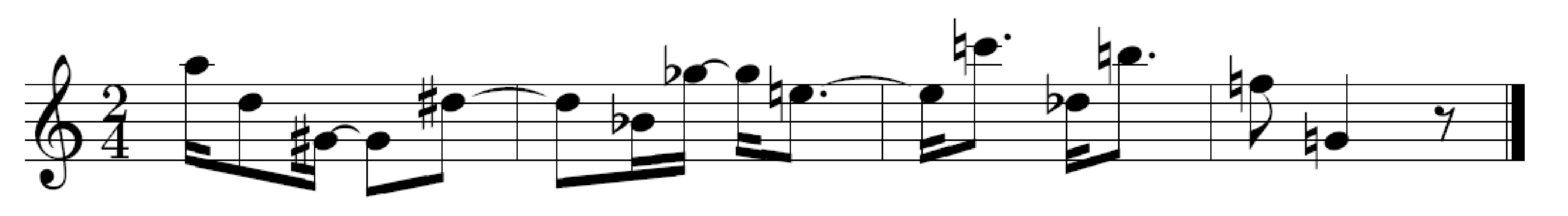
O. Messiaen: Le Merle Noir

Stück für Flöte und Klavier, komponiert 1951. Die Tonreihentechnik wird in der Coda der Komposition für den Klavierpart verwendet. (Min 5.06)

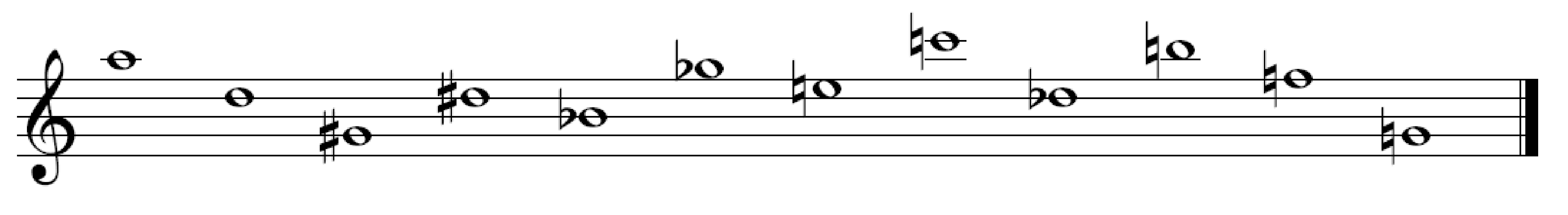


O. Messiaen: Le Merle Noir

Stück für Flöte und Klavier, komponiert 1951. Die Tonreihentechnik wird in der Coda der Komposition für den Klavierpart verwendet. (Min 5.06)

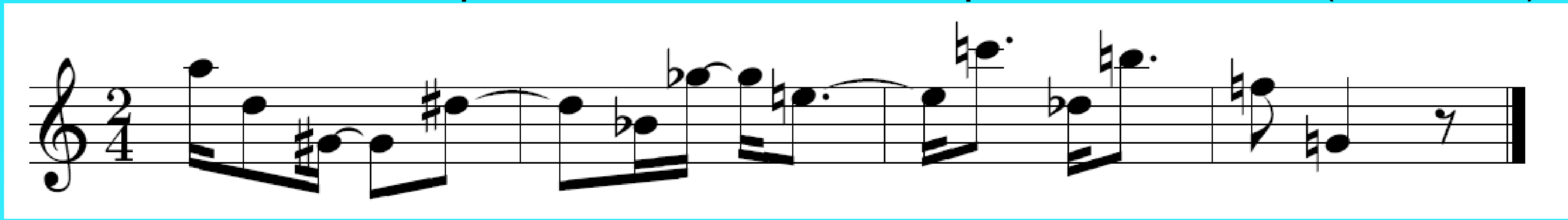


Der Rhythmus ist für die Analyse unwichtig.

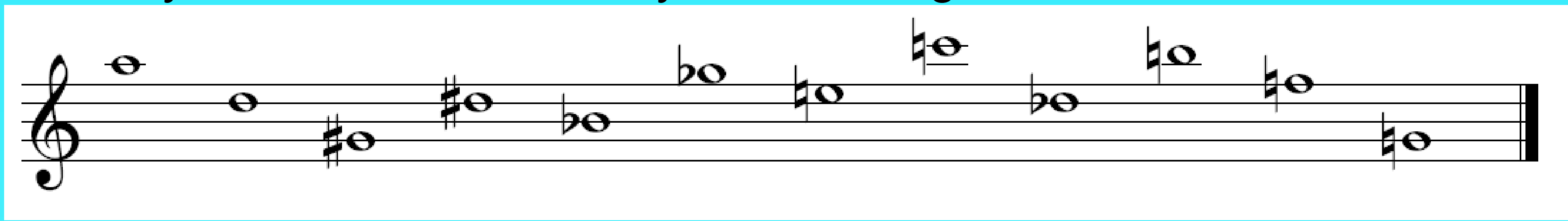


O. Messiaen: Le Merle Noir

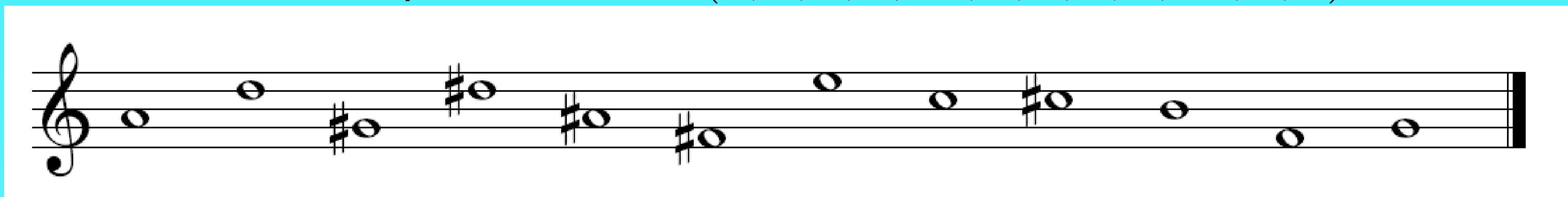
Stück für Flöte und Klavier, komponiert 1951. Die Tonreihentechnik wird in der Coda der Komposition für den Klavierpart verwendet. (Min 5.06)



Der Rhythmus ist für die Analyse unwichtig.



Reduktion auf die pitch classes $(9, 2, 8, 3, 10, 6, 4, 0, 1, 11, 5, 7)$.



Tonreihendiagramm

Darstellung einer Tonreihe als Graph:

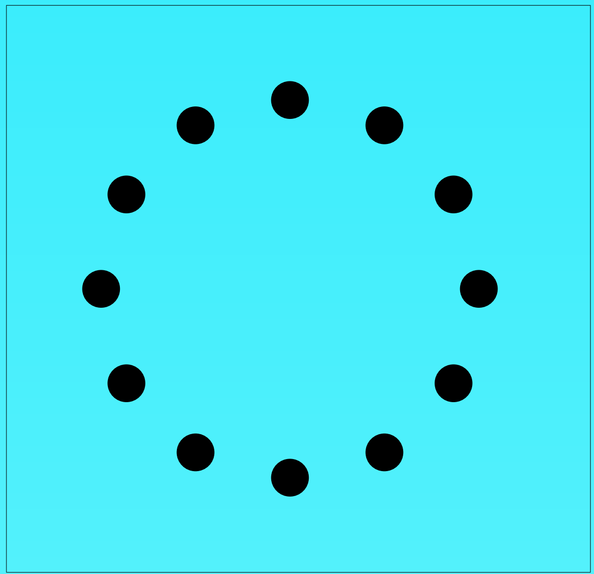
Beispiel Tonreihe von “Le Merle Noir”

$$f := (f(1), \ldots, f(12)) = (9, 2, 8, 3, 10, 6, 4, 0, 1, 11, 5, 7):$$

Tonreihendiagramm

Darstellung einer Tonreihe als Graph: Wir zeichnen die 12 pitch classes als regelmäßiges 12-Eck,

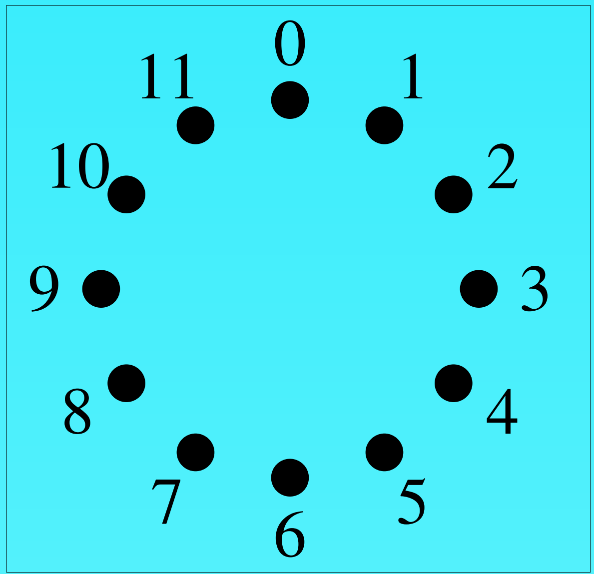
Beispiel Tonreihe von “Le Merle Noir”
$f := (f(1), \ldots, f(12)) = (9, 2, 8, 3, 10, 6, 4, 0, 1, 11, 5, 7)$:



Tonreihendiagramm

Darstellung einer Tonreihe als Graph: Wir zeichnen die 12 pitch classes als regelmäßiges 12-Eck, wir numerieren die Ecken,

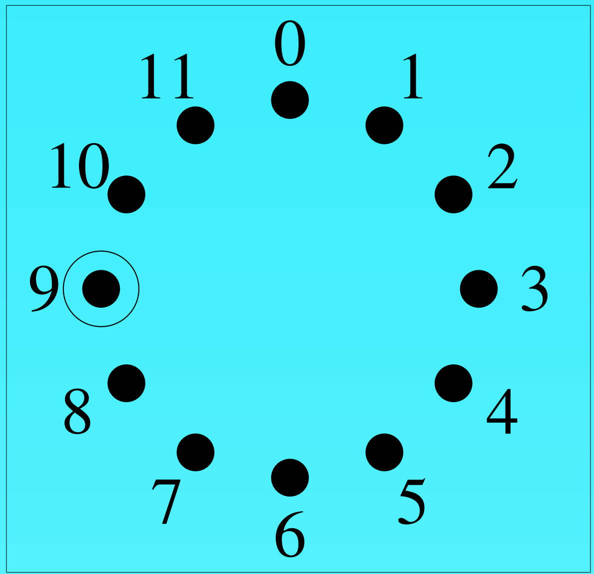
Beispiel Tonreihe von “Le Merle Noir”
$f := (f(1),\ldots,f(12)) = (9,2,8,3,10,6,4,0,1,11,5,7)$:



Tonreihendiagramm

Darstellung einer Tonreihe als Graph: Wir zeichnen die 12 pitch classes als regelmäßiges 12-Eck, wir numerieren die Ecken, wir markieren den ersten Ton,

Beispiel Tonreihe von “Le Merle Noir”
$f := (f(1), \ldots, f(12)) = (9, 2, 8, 3, 10, 6, 4, 0, 1, 11, 5, 7)$:

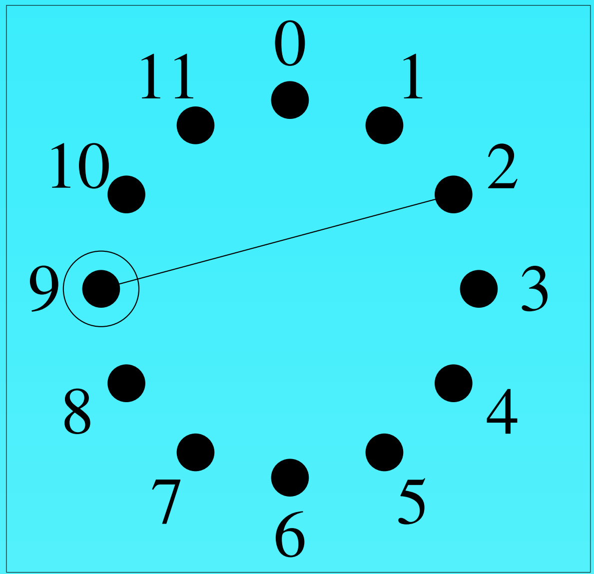


Tonreihendiagramm

Darstellung einer Tonreihe als Graph: Wir zeichnen die 12 pitch classes als regelmäßiges 12-Eck, wir numerieren die Ecken, wir markieren den ersten Ton, wir verbinden in der Tonreihe aufeinander folgende pitch classes mit einer geraden Kante.

Beispiel Tonreihe von “Le Merle Noir”

$f := (f(1), \ldots, f(12)) = (9, 2, 8, 3, 10, 6, 4, 0, 1, 11, 5, 7)$:



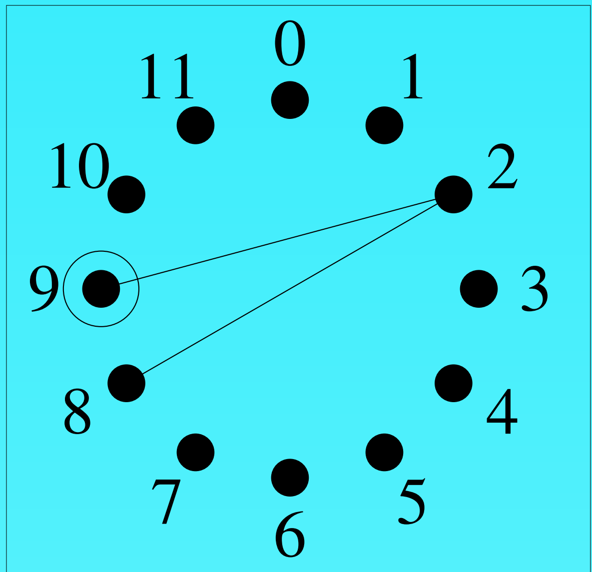
Home Page
Title Page
Contents
Page 5 of 37
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Tonreihendiagramm

Darstellung einer Tonreihe als Graph: Wir zeichnen die 12 pitch classes als regelmäßiges 12-Eck, wir numerieren die Ecken, wir markieren den ersten Ton, wir verbinden in der Tonreihe aufeinander folgende pitch classes mit einer geraden Kante.

Beispiel Tonreihe von “Le Merle Noir”

$f := (f(1), \ldots, f(12)) = (9, 2, 8, 3, 10, 6, 4, 0, 1, 11, 5, 7)$:

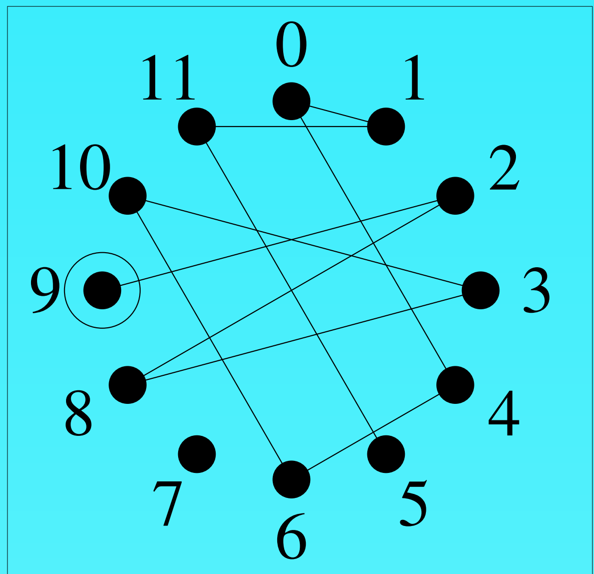


Tonreihendiagramm

Darstellung einer Tonreihe als Graph: Wir zeichnen die 12 pitch classes als regelmäßiges 12-Eck, wir numerieren die Ecken, wir markieren den ersten Ton, wir verbinden in der Tonreihe aufeinander folgende pitch classes mit einer geraden Kante.

Beispiel Tonreihe von “Le Merle Noir”

$f := (f(1), \ldots, f(12)) = (9, 2, 8, 3, 10, 6, 4, 0, 1, 11, 5, 7)$:

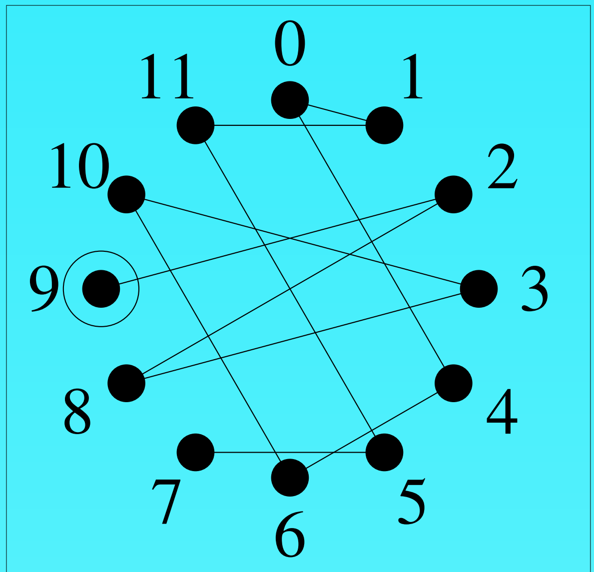


Tonreihendiagramm

Darstellung einer Tonreihe als Graph: Wir zeichnen die 12 pitch classes als regelmäßiges 12-Eck, wir numerieren die Ecken, wir markieren den ersten Ton, wir verbinden in der Tonreihe aufeinander folgende pitch classes mit einer geraden Kante.

Beispiel Tonreihe von "Le Merle Noir"

$f := (f(1), \ldots, f(12)) = (9, 2, 8, 3, 10, 6, 4, 0, 1, 11, 5, 7)$:



Transponieren einer Tonreihe

Transponieren einer Tonreihe um einen Halbton bedeutet, jeden Ton der Tonreihe um einen Halbton zu verschieben. Diese Operation kann auch für pitch classes definiert werden: Sei

$$T : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12} : i \mapsto i + 1,$$

dann ist die um k pitch classes transponierte Reihe $T^k \circ f$, $k \in \mathbb{Z}$.

Umkehrung einer Tonreihe

Die Umkehrung stellt eine Spiegelung von Tonhöhen dar.

Umkehrung an pitch class 0 ist gegeben durch

$$I : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12} : i \mapsto -i.$$

Dann gilt $I \circ T^k = T^{-k} \circ I$, $k \in \{0, \ldots, 11\}$. Alle Umkehrungsoperatoren auf $\mathbb{Z}_{12}$ sind von der Form $T^k \circ I$ mit $k \in \{0, \ldots, 11\}$.

Umkehrung einer Tonreihe

Die Umkehrung stellt eine Spiegelung von Tonhöhen dar.

Umkehrung an pitch class 0 ist gegeben durch

$$I\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12} : i \mapsto -i.$$

Dann gilt $I \circ T^k = T^{-k} \circ I$, $k \in \{0, \dots, 11\}$. Alle Umkehrungsoperatoren auf $\mathbb{Z}_{12}$ sind von der Form $T^k \circ I$ mit $k \in \{0, \dots, 11\}$.

Umkehrung von f wird als $T^k \circ I \circ f$ definiert. Umkehrung bedeutet Spiegelung der graphischen Darstellung.

Krebs und zyklische Verschiebung einer Tonreihe

Wir betrachten die Permutationen $R = (1,12)(2,11)\cdots(6,7)$ und $S = (1,2,3,\ldots,12)$, dann ist der Krebs der Tonreihe f gleich $f \circ R$ und die zyklische Verschiebung von f gleich $f \circ S$.

Permutationsgruppen

Die Gruppen $\langle T, I\rangle$ und $\langle S, R\rangle$ sind Permutationsgruppen, isomorph zur ***Diedergruppe*** D_{12} bestehend aus 24 Elementen.

Permutationsgruppen

Die Gruppen $\langle T, I\rangle$ und $\langle S, R\rangle$ sind Permutationsgruppen, isomorph zur ***Diedergruppe*** D_{12} bestehend aus 24 Elementen.

Theorem. *Sei π eine Permutation von $\mathbb{Z}_{12}$, dann gilt. $\pi(i+1) = \pi(i)+1$ für alle $i \in \mathbb{Z}_{12}$, oder $\pi(i+1) = \pi(i) - 1$ für alle $i \in \mathbb{Z}_{12}$, dann und nur dann, wenn $\pi \in D_{12}$.*

Permutationsgruppen

Die Gruppen $\langle T, I\rangle$ und $\langle S, R\rangle$ sind Permutationsgruppen, isomorph zur ***Diedergruppe*** D_{12} bestehend aus 24 Elementen.

Theorem. *Sei* π *eine Permutation von* $\mathbb{Z}_{12}$*, dann gilt.* $\pi(i+1) = \pi(i) + 1$ *für alle* $i \in \mathbb{Z}_{12}$*, oder* $\pi(i+1) = \pi(i) - 1$ *für alle* $i \in \mathbb{Z}_{12}$*, dann und nur dann, wenn* $\pi \in D_{12}$*.*

$C_{12} = \langle T\rangle$ ist eine ***zyklische Gruppe*** der Ordnung 12. Sie ist eine Untergruppe von D_{12}.

Permutationsgruppen

Die Gruppen $\langle T, I\rangle$ und $\langle S, R\rangle$ sind Permutationsgruppen, isomorph zur ***Diedergruppe*** D_{12} bestehend aus 24 Elementen.

Theorem. *Sei π eine Permutation von $\mathbb{Z}_{12}$, dann gilt. $\pi(i+1) = \pi(i)+1$ für alle $i \in \mathbb{Z}_{12}$, oder $\pi(i+1) = \pi(i)-1$ für alle $i \in \mathbb{Z}_{12}$, dann und nur dann, wenn $\pi \in D_{12}$.*

$C_{12} = \langle T\rangle$ ist eine ***zyklische Gruppe*** der Ordnung 12. Sie ist eine Untergruppe von D_{12}.

Die ***Quartzirkeloperation*** Q ist definiert als $Q\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$, $i \mapsto 5i$.

Damit wird die chromatische Tonleiter durch eine Folge von Quarten ersetzt. Den Quintenzirkel erhält man als $(I \circ Q)(i) = 7i$, $i \in \mathbb{Z}_{12}$.
Die Gruppe $\langle T, I, Q\rangle$ ist die Gruppe aller ***affinen Abbildungen*** auf $\mathbb{Z}_{12}$, abgekürzt als $\mathrm{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12})$.

Auf der Menge der Einsatzzeiten entspricht dieser Operation der ***Fünf-Schritt*** F.

Äquivalente Tonreihen

Eine Tonreihe f' ist ***äquivalent*** zu f, wenn man f' aus f mittels einer Kombination der Operationen Transponieren, Umkehrung, zyklische Verschiebung und Krebs konstruieren kann.

Äquivalente Tonreihen

Eine Tonreihe f' ist ***äquivalent*** zu f, wenn man f' aus f mittels einer Kombination der Operationen Transponieren, Umkehrung, zyklische Verschiebung und Krebs konstruieren kann.

Sei $\mathscr{R}$ die Menge aller Tonreihen, d.h. aller bijektiven Abbildungen von $\{1,\ldots,12\}$ nach $\mathbb{Z}_{12}$. Wir betrachten die folgende Abbildung

$$(\langle T,I\rangle \times \langle S,R\rangle) \times \mathscr{R} \to \mathscr{R}$$

$$((\varphi,\pi),f) \mapsto \varphi \circ f \circ \pi^{-1}. \qquad (*)$$

Dies definiert eine ***Gruppenaktion*** auf $\mathscr{R}$.

Äquivalente Tonreihen

Eine Tonreihe f' ist ***äquivalent*** zu f, wenn man f' aus f mittels einer Kombination der Operationen Transponieren, Umkehrung, zyklische Verschiebung und Krebs konstruieren kann.

Sei $\mathscr{R}$ die Menge aller Tonreihen, d.h. aller bijektiven Abbildungen von $\{1,\dots,12\}$ nach $\mathbb{Z}_{12}$. Wir betrachten die folgende Abbildung

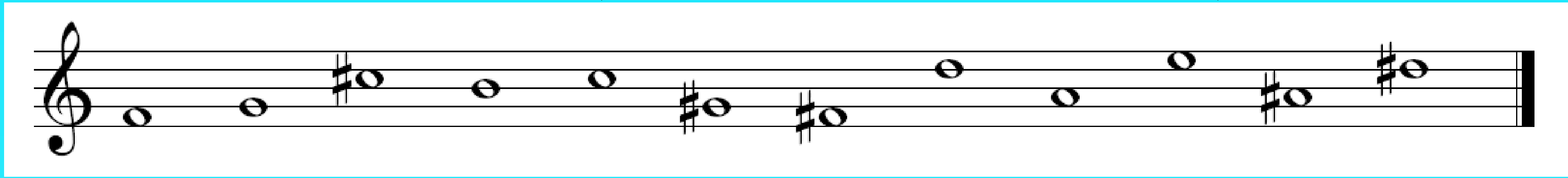
$$(\langle T,I\rangle \times \langle S,R\rangle) \times \mathscr{R} \to \mathscr{R}$$

$$((\varphi,\pi),f) \mapsto \varphi \circ f \circ \pi^{-1}. \qquad (*)$$

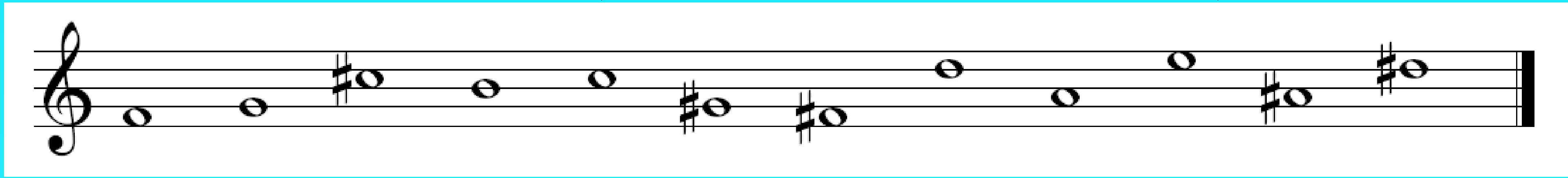
Dies definiert eine ***Gruppenaktion*** auf $\mathscr{R}$.

Eine Tonreihe f' ist genau dann äquivalent zu f, wenn $f' = \varphi \circ f \circ \pi^{-1}$ für ein geeignetes Paar (φ,π) in $\langle T,I\rangle \times \langle S,R\rangle$.

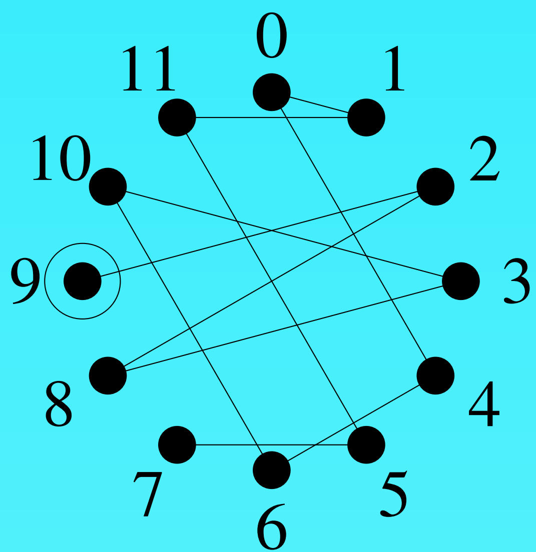
Z.B. ist der Krebs der Umkehrung der Tonreihe aus Le Merle Noir gegeben durch $I \circ f \circ R = (5, 7, 1, 11, 0, 8, 6, 2, 9, 4, 10, 3)$.



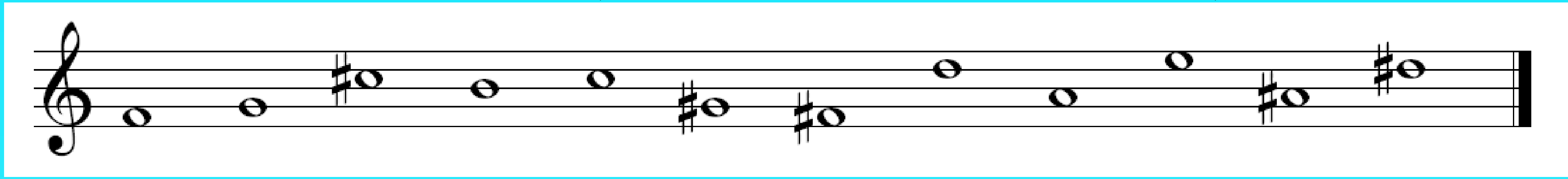
Z.B. ist der Krebs der Umkehrung der Tonreihe aus Le Merle Noir gegeben durch $I \circ f \circ R = (5, 7, 1, 11, 0, 8, 6, 2, 9, 4, 10, 3)$.



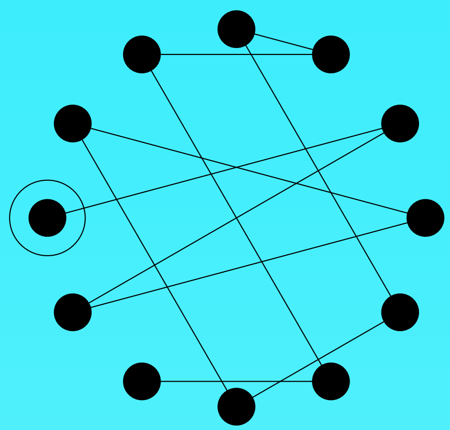
Tonreihendiagramm aller äquivalenten Reihen: Wir beginnen mit f.



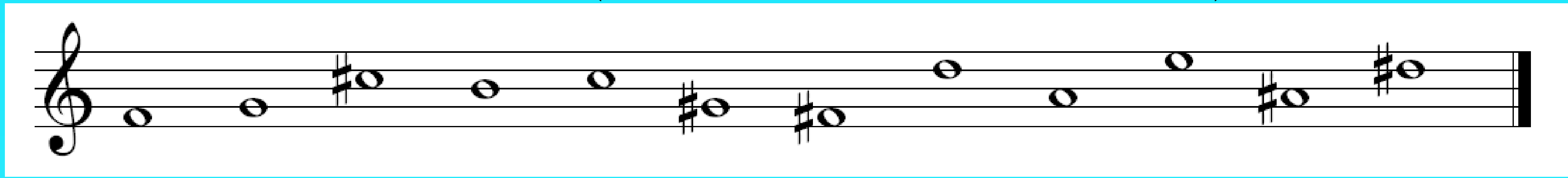
Z.B. ist der Krebs der Umkehrung der Tonreihe aus Le Merle Noir gegeben durch $I \circ f \circ R = (5,7,1,11,0,8,6,2,9,4,10,3)$.



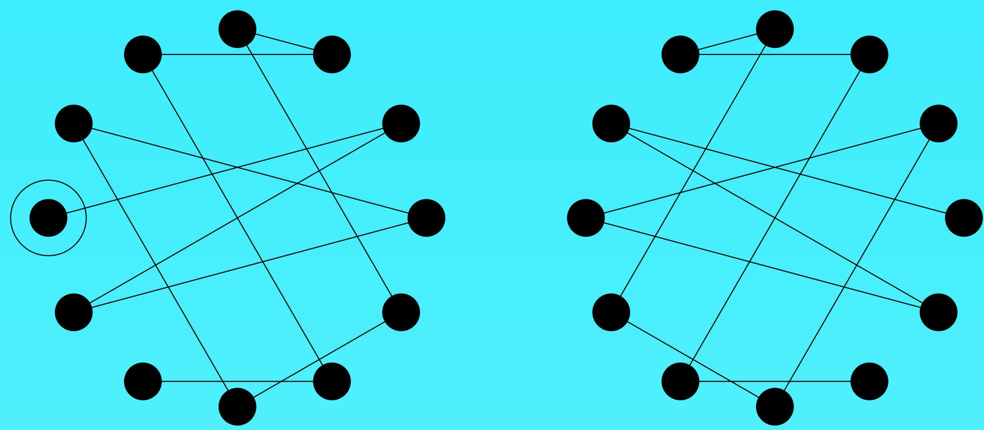
Tonreihendiagramm aller äquivalenten Reihen: Wir beginnen mit f. Da wir transponieren, löschen wir die Nummern der pitch classes.



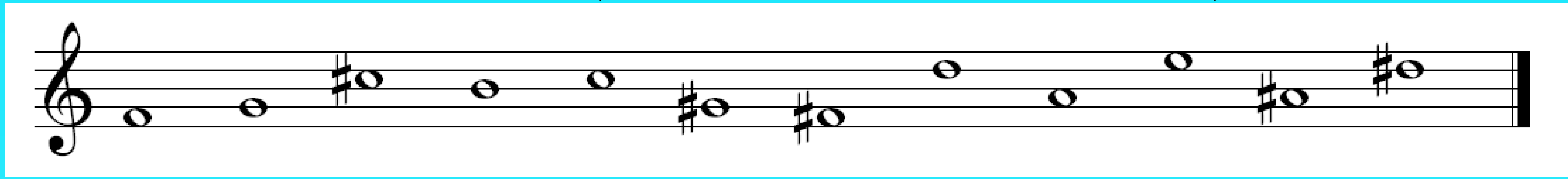
Z.B. ist der Krebs der Umkehrung der Tonreihe aus Le Merle Noir gegeben durch $I \circ f \circ R = (5,7,1,11,0,8,6,2,9,4,10,3)$.



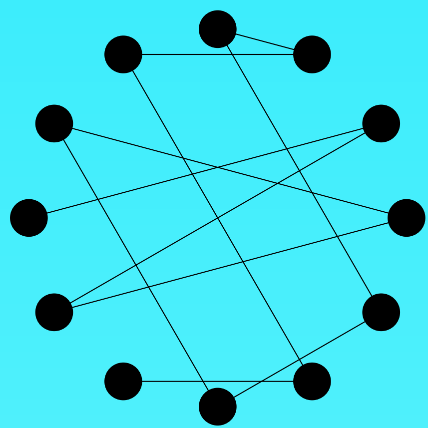
Tonreihendiagramm aller äquivalenten Reihen: Wir beginnen mit f.
Da wir transponieren, löschen wir die Nummern der pitch classes.
Umkehrung von f bedeutet Spiegelung.



Z.B. ist der Krebs der Umkehrung der Tonreihe aus Le Merle Noir gegeben durch $I \circ f \circ R = (5, 7, 1, 11, 0, 8, 6, 2, 9, 4, 10, 3)$.

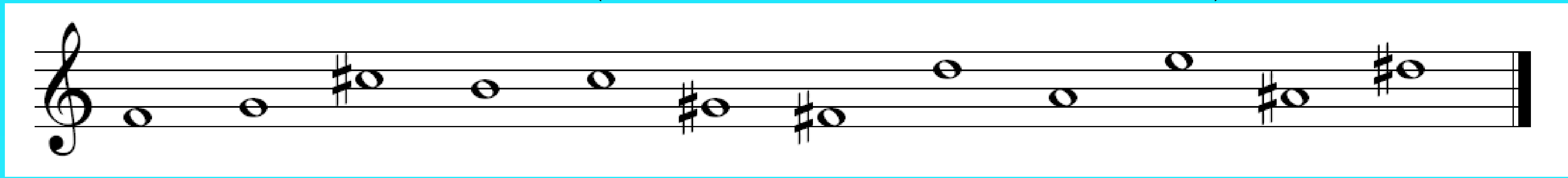


Tonreihendiagramm aller äquivalenten Reihen: Wir beginnen mit f.
Da wir transponieren, löschen wir die Nummern der pitch classes.
Umkehrung von f bedeutet Spiegelung.
Da wir den Krebs zulassen, markieren wir nicht den 1. Ton.

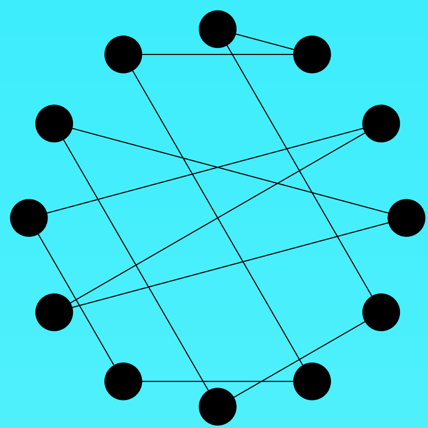


Home Page
Title Page
Contents
Page 11 of 37
Go Back
Full Screen
Close
Quit

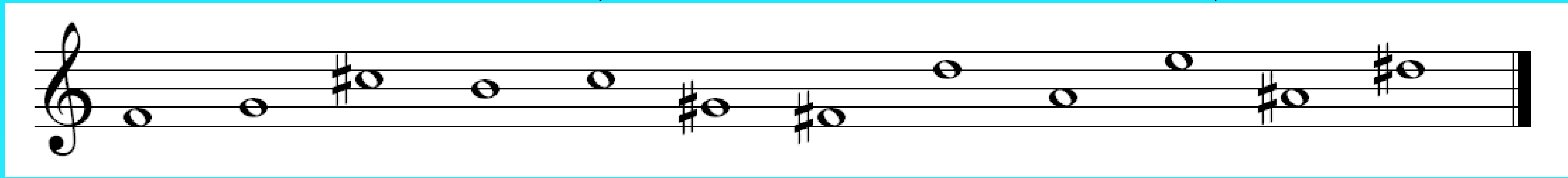
Z.B. ist der Krebs der Umkehrung der Tonreihe aus Le Merle Noir gegeben durch $I \circ f \circ R = (5, 7, 1, 11, 0, 8, 6, 2, 9, 4, 10, 3)$.



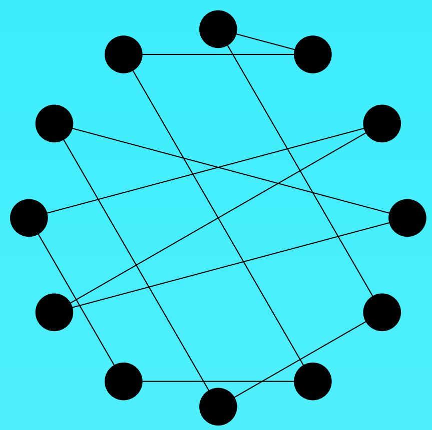
Tonreihendiagramm aller äquivalenten Reihen: Wir beginnen mit f.
Da wir transponieren, löschen wir die Nummern der pitch classes.
Umkehrung von f bedeutet Spiegelung.
Da wir den Krebs zulassen, markieren wir nicht den 1. Ton.
Wegen des zyklischen Verschiebens schließen wir den Polygonzug.



Z.B. ist der Krebs der Umkehrung der Tonreihe aus Le Merle Noir gegeben durch $I \circ f \circ R = (5,7,1,11,0,8,6,2,9,4,10,3)$.



Tonreihendiagramm aller äquivalenten Reihen: Wir beginnen mit f.
Da wir transponieren, löschen wir die Nummern der pitch classes.
Umkehrung von f bedeutet Spiegelung.
Da wir den Krebs zulassen, markieren wir nicht den 1. Ton.
Wegen des zyklischen Verschiebens schließen wir den Polygonzug.



Datenbank: The equivalence class of (9,2,8,3,10,6,4,0,1,11,5,7)

Klassifizieren von Tonreihen

Äquivalente Tonreihen werden zu Bahnen von Tonreihen unter der Operation ($*$) zusammengefasst. Kennt man alle Bahnen, so kennt man auch ein System von paarweise nicht äquivalenten Tonreihen.

Wieviele Bahnen gibt es?

Klassifizieren von Tonreihen

Äquivalente Tonreihen werden zu Bahnen von Tonreihen unter der Operation ($*$) zusammengefasst. Kennt man alle Bahnen, so kennt man auch ein System von paarweise nicht äquivalenten Tonreihen.

Wieviele Bahnen gibt es?

	operierende Gruppe	# der Bahnen
1.	$\langle T\rangle \times \langle R\rangle$	19 960 320
2.	$\langle T, I\rangle \times \langle R\rangle$	9 985 920
3.	$\langle T\rangle \times \langle S\rangle$	3 326 788
4.	$\langle T, I\rangle \times \langle S\rangle$	1 664 354
5.	$\langle T, I\rangle \times \langle S, R\rangle$	836 017
6.	$\langle T, I, Q\rangle \times \langle S, R\rangle$	419 413
7.	$\langle T, I\rangle \times \langle S, R, F\rangle$	419 413
8.	$\langle T, I, Q\rangle \times \langle S, R, F\rangle$	211 012

Arnold Schönberg bezeichnete Tonreihen als äquivalent falls man nur die Operationen Transponieren, Umkehrung und Krebs zulässt. Dies entspricht also der Situation in 2.

Arnold Schönberg bezeichnete Tonreihen als äquivalent falls man nur die Operationen Transponieren, Umkehrung und Krebs zulässt. Dies entspricht also der Situation in 2.

Wie im Theorem vorhin erwähnt ist die Diedergruppe die größte Gruppe, die die Nachbarschaftsrelation in $\mathbb{Z}_{12}$ erhält. Deshalb sehen wir die Situation in **5. als das Standardmodell für die Klassifizierung** an. Es gibt viele Hinweise, dass ***Josef Matthias Hauer*** auch diese Relation verwendete. Es gibt auch eine Arbeit von ***Ron C. Read***, in der er diese Relation studiert [3, page 546] und auch die Anzahl von 836 017 nicht-äquivalenten Tonreihen bestimmt. Diese Zahl wurde bereits für ein geometrisches Problem von ***Solomon W. Golomb*** und ***Lloyd R. Welch*** in [1] bestimmt. Auch ***David J. Hunter*** und ***Paul T. von Hippel*** verwenden in [2] diese Gruppe als Symmetriegruppe auf der Menge aller Tonreihen.

Die Bahn einer Tonreihe

In Zusammenhang mit Bahnen von Tonreihen kann man folgende Fragen studieren:

Die Bahn einer Tonreihe

In Zusammenhang mit Bahnen von Tonreihen kann man folgende Fragen studieren:

- Bestimme die ***Menge aller Tonreihen***, die in der Bahn $G(f)$ der Tonreihe f liegen.

Die Bahn einer Tonreihe

In Zusammenhang mit Bahnen von Tonreihen kann man folgende Fragen studieren:

- Bestimme die ***Menge aller Tonreihen***, die in der Bahn $G(f)$ der Tonreihe f liegen.

- Bestimme einen ***Standardrepräsentanten*** oder ***Normalform*** der Bahn $G(f)$.

Die Bahn einer Tonreihe

In Zusammenhang mit Bahnen von Tonreihen kann man folgende Fragen studieren:

- Bestimme die ***Menge aller Tonreihen***, die in der Bahn $G(f)$ der Tonreihe f liegen.
- Bestimme einen ***Standardrepräsentanten*** oder ***Normalform*** der Bahn $G(f)$.
- Falls die zwei Tonreihen f_1 und f_2 zur gleichen Bahn gehören, bestimme ein Gruppenelement $g \in G$, so dass $f_2 = gf_1$.

Die Bahn einer Tonreihe

In Zusammenhang mit Bahnen von Tonreihen kann man folgende Fragen studieren:

- Bestimme die ***Menge aller Tonreihen***, die in der Bahn $G(f)$ der Tonreihe f liegen.
- Bestimme einen ***Standardrepräsentanten*** oder ***Normalform*** der Bahn $G(f)$.
- Falls die zwei Tonreihen f_1 und f_2 zur gleichen Bahn gehören, bestimme ein Gruppenelement $g \in G$, so dass $f_2 = gf_1$.
- Bestimme ein ***Repräsentantensystem aller Bahnen*** von Tonreihen.

Datenbank: The normal form (9,2,8,3,10,6,4,0,1,11,5,7)

Der Stabilisatortyp einer Tonreihe

Sei f eine Tonreihe und G eine Gruppe, die die Äquivalenz von Tonreihen beschreibt.

Der ***Stabilisatortyp*** der Bahn $G(f)$ ist die Konjugiertenklasse $\tilde{G}_f = \{gG_f g^{-1} \mid g \in G\}$, von G_f, dem Stabilisator von f.

Der Stabilisatortyp einer Tonreihe

Sei f eine Tonreihe und G eine Gruppe, die die Äquivalenz von Tonreihen beschreibt.

Der ***Stabilisatortyp*** der Bahn $G(f)$ ist die Konjugiertenklasse $\tilde{G}_f = \{gG_fg^{-1} \mid g \in G\}$, von G_f, dem Stabilisator von f.

In der Standardsituation gibt es ***17 verschiedene Stabilisatortypen***. Hier listen wir nun alle auftretenden Stabilisatortypen $\tilde{U}_i$ und die Anzahl der $D_{12} \times D_{12}$-Bahnen von Tonreihen auf, die diese Stabilisatortypen besitzen. Diese Anzahlen wurden abstrakt mit Hilfe des Lemmas von Burnside bestimmt. Dafür verwendeten wir auch das Computer-Algebrasystem GAP.

Beispiele:

- Sei $f = (0, 1, 10, 8, 9, 11, 5, 3, 2, 4, 7, 6)$,
  dann $T^6 f = (6, 7, 4, 2, 3, 5, 11, 9, 8, 10, 1, 0)$
  und $fR = (6, 7, 4, 2, 3, 5, 11, 9, 8, 10, 1, 0)$,
  also $(T^6, R) * f = f$.

Home Page

Title Page

Contents

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Beispiele:

- Sei $f = (0,1,10,8,9,11,5,3,2,4,7,6)$,
  dann $T^6 f = (6,7,4,2,3,5,11,9,8,10,1,0)$
  und $fR = (6,7,4,2,3,5,11,9,8,10,1,0)$,
  also $(T^6,R) * f = f$.

- Sei $f = (5,4,0,7,3,2,8,9,1,6,10,11)$,
  dann $TIf = (8,9,1,6,10,11,5,4,0,7,3,2) = fS^6$
  und $T^6 f = (11,10,6,1,9,8,2,3,7,0,4,5) = fR$.
  Der Stabilisator von f ist $\{\mathrm{id},(TI,S^6),(T^6,R),(T^7I,S^6R)\}$.

Beispiele:

- Sei $f = (0,1,10,8,9,11,5,3,2,4,7,6)$,
  dann $T^6 f = (6,7,4,2,3,5,11,9,8,10,1,0)$
  und $fR = (6,7,4,2,3,5,11,9,8,10,1,0)$,
  also $(T^6, R) * f = f$.

- Sei $f = (5,4,0,7,3,2,8,9,1,6,10,11)$,
  dann $TIf = (8,9,1,6,10,11,5,4,0,7,3,2) = fS^6$
  und $T^6 f = (11,10,6,1,9,8,2,3,7,0,4,5) = fR$.
  Der Stabilisator von f ist $\{\mathrm{id}, (TI, S^6), (T^6, R), (T^7 I, S^6 R)\}$.

- Die chromatische Tonleiter hat einen Stabilisator der Ordnung 24.

  Datenbank: The stabilizer of the chromatic scale

Beispiele:

- Sei $f = (0,1,10,8,9,11,5,3,2,4,7,6)$,
  dann $T^6 f = (6,7,4,2,3,5,11,9,8,10,1,0)$
  und $fR = (6,7,4,2,3,5,11,9,8,10,1,0)$,
  also $(T^6, R) * f = f$.

- Sei $f = (5,4,0,7,3,2,8,9,1,6,10,11)$,
  dann $TIf = (8,9,1,6,10,11,5,4,0,7,3,2) = fS^6$
  und $T^6 f = (11,10,6,1,9,8,2,3,7,0,4,5) = fR$.
  Der Stabilisator von f ist $\{\mathrm{id}, (TI, S^6), (T^6, R), (T^7 I, S^6 R)\}$.

- Die chromatische Tonleiter hat einen Stabilisator der Ordnung 24.

  Datenbank: The stabilizer of the chromatic scale

- 99.93% aller Bahnen haben nur trivialen Stabilisatortyp.

Name	Erzeuger	$\lvert U\rvert$	$\lvert\tilde{U}\rvert$	$\lvert\tilde{U}_i\backslash\backslash\mathscr{R}\rvert$
$\tilde{U}_1$	id	1	1	827 282
$\tilde{U}_2$	(TI,S^6)	2	6	912
$\tilde{U}_3$	(T^6,R)	2	3	912
$\tilde{U}_4$	(T^6,S^6)	2	1	130
$\tilde{U}_5$	(I,SR)	2	36	942
$\tilde{U}_6$	(TI,R)	2	36	5 649
$\tilde{U}_7$	(T^4,S^4)	3	2	11
$\tilde{U}_8$	(T^3,S^3)	4	2	2
$\tilde{U}_9$	$(TI,S^6),(T^6,R)$	4	36	96
$\tilde{U}_{10}$	$(I,SR),(T^6,S^6)$	4	18	12
$\tilde{U}_{11}$	$(TI,R),(T^6,S^6)$	4	18	42
$\tilde{U}_{12}$	$(I,SR),(T^4,S^4)$	6	24	2
$\tilde{U}_{13}$	$(TI,R),(T^4,S^4)$	6	24	15
$\tilde{U}_{14}$	$(I,SR),(T^3,S^3)$	8	36	6
$\tilde{U}_{15}$	$(TI,R),(T^2,S^2)$	12	12	2
$\tilde{U}_{16}$	$(I,SR),(T,S)$	24	12	1
$\tilde{U}_{17}$	$(I,SR),(T,S^5)$	24	12	1

Datenbank: Search for tone rows of given stabilizer type

Bahnen von Hexachorden

Ein ***Hexachord*** in der 12-Skala $\mathbb{Z}_{12}$ ist eine 6-elementige Teilmenge von $\mathbb{Z}_{12}$. Es gibt $\binom{12}{6} = 924$ verschiedene Hexachorde in der Menge $\mathscr{H} = \{A \subset \mathbb{Z}_{12} : |A| = 6\}$.

Wenn die Gruppe G auf $\mathbb{Z}_{12}$ operiert, dann operiert $g \in G$ auf den k-Teilmengen A von $\mathbb{Z}_{12}$, $k \in \{1, \ldots, 12\}$, durch $g * A := \{g * a \mid a \in A\}$.

Die Anzahl der Bahnen der Hexachorde unter dieser Aktion kann leicht mittels des Satzes von Pólya bestimmt werden. Wir erhalten

G	$\lvert G \backslash\backslash \mathscr{H} \rvert$
C_{12}	80
D_{12}	50
$\mathrm{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12})$	34

Datenbank: List all k-chords

Tropen

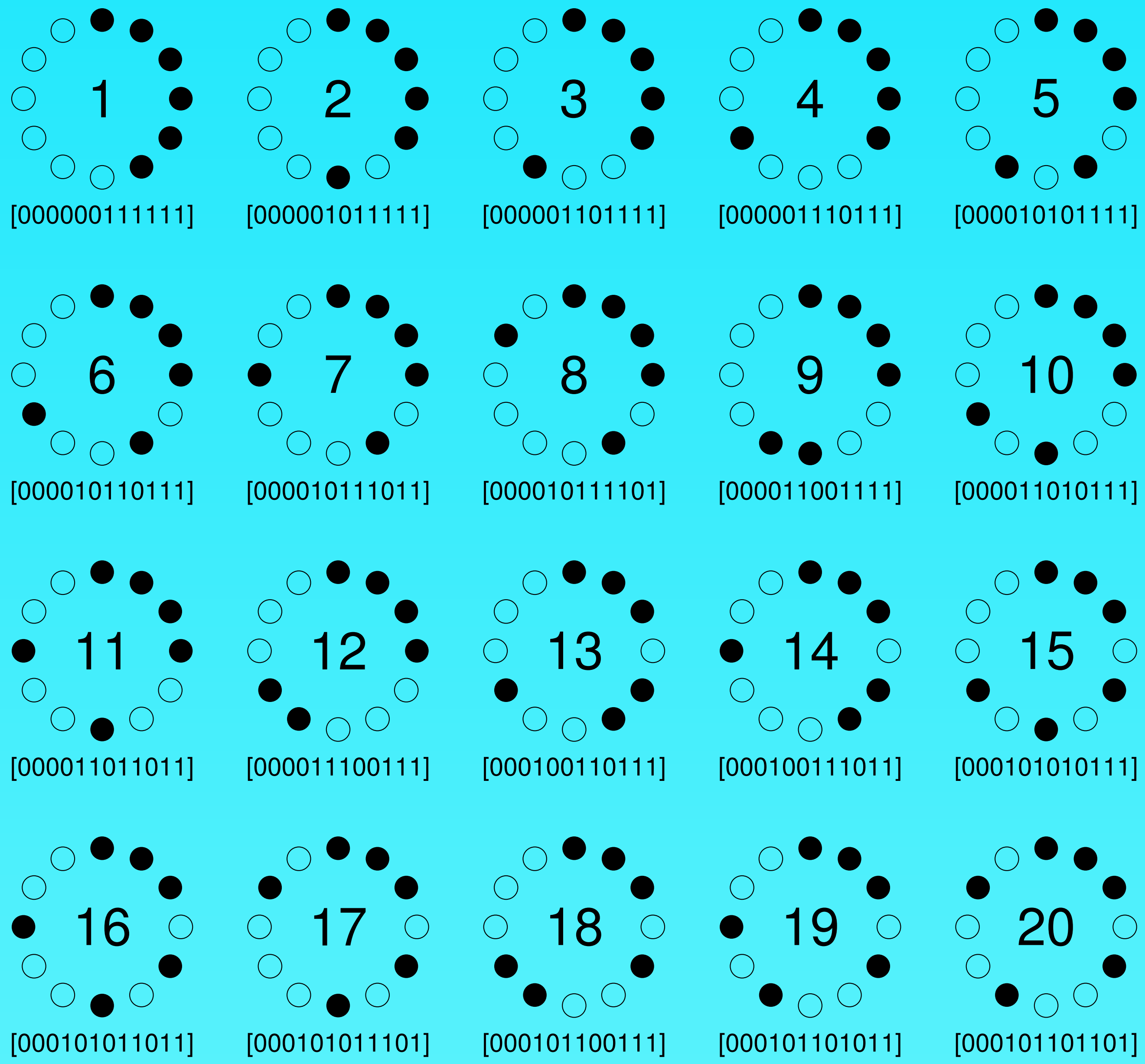
Sei A ein Hexachord, dann ist auch das Komplement $A' := \mathbb{Z}_{12} \setminus A$ von A ein Hexachord. Wir untersuchen nun "Paare" $\{A, A'\}$ von Hexachorden, die wir als ***Tropen*** bezeichnen. (Wir verwenden Anführungszeichen, da $\{A, A'\}$ eigentlich kein Paar sondern eine 2-elementige Menge von Hexachorden ist!)

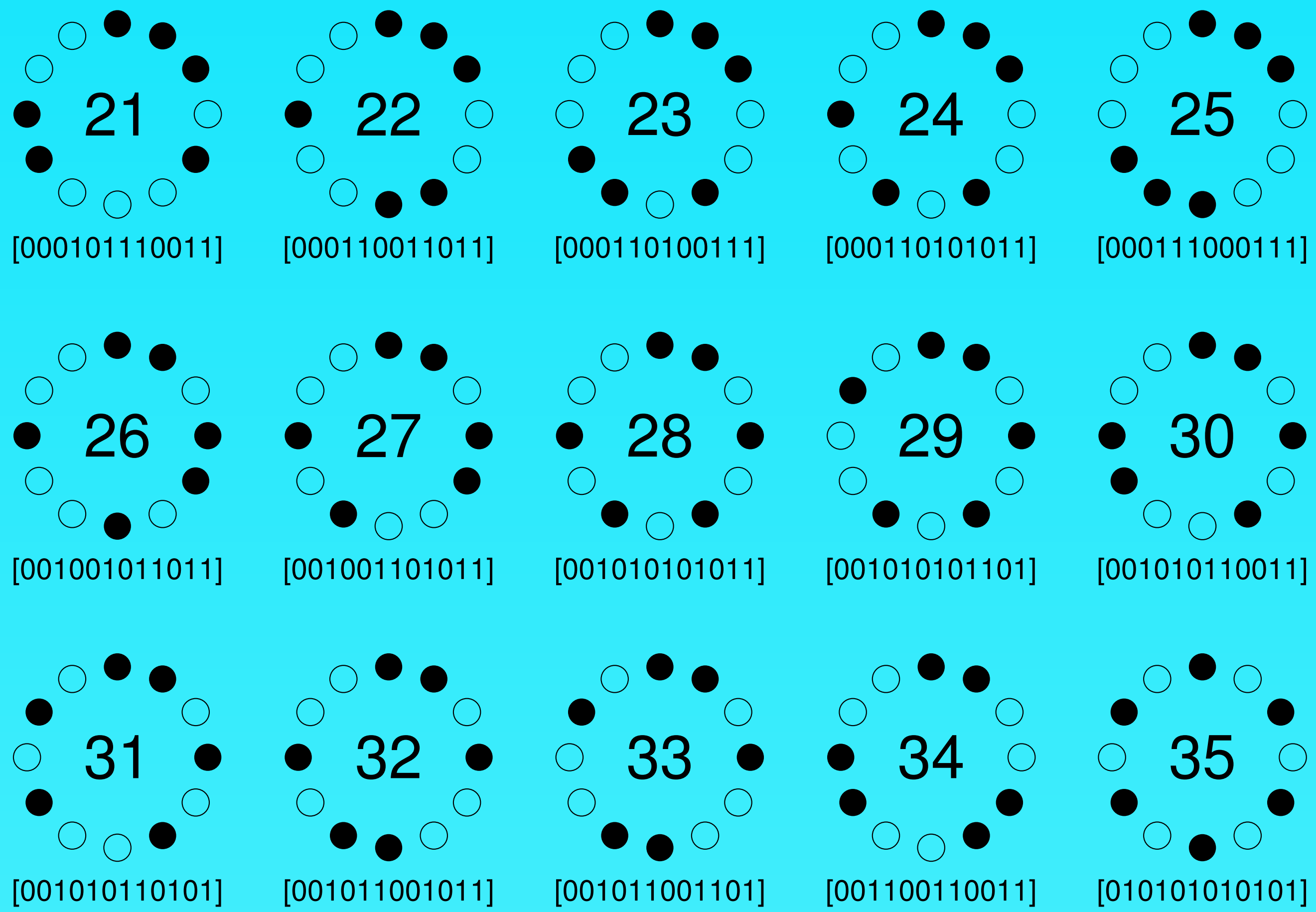
Die Menge der Tropen sei mit $\mathscr{T} := \{\{A, \mathbb{Z}_{12} \setminus A\} \mid A \in \mathscr{H}\}$ bezeichnet. Es gibt $924/2 = 462$ Tropen in einer 12-Skala. Jede Aktion von einer Gruppe G auf $\mathbb{Z}_{12}$ induziert eine Aktion von G auf $\mathscr{T}$, wobei $g * \{A, A'\} := \{g * A, g * A'\}$, $g \in G$.
Anzahl der G-Bahnen von Tropen:

G	$\lvert G \backslash\backslash \mathscr{T} \rvert$
C_{12}	44
D_{12}	35
$\mathrm{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12})$	26

Datenbank: List all tropes

Liste aller 35 D_{12}-Bahnen von Tropen




21
[000101110011]
22
[000110011011]
23
[000110100111]
24
[000110101011]
25
[000111000111]
26
[001001011011]
27
[001001101011]
28
[001010101011]
29
[001010101101]
30
[001010110011]
31
[001010110101]
32
[001011001011]
33
[001011001101]
34
[001100110011]
35
[010101010101]

Die Tropenstruktur einer Tonreihe

Sei f eine Tonreihe. Diese definiert auf natürliche Weise eine Folge von sechs “Paaren” von Hexachorden:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &:= \{\{f(1),f(2),f(3),f(4),f(5),f(6)\},\{f(7),f(8),f(9),f(10),f(11),f(12)\}\}\\
\tau_2 &:= \{\{f(2),f(3),f(4),f(5),f(6),f(7)\},\{f(8),f(9),f(10),f(11),f(12),f(1)\}\}\\
\tau_3 &:= \{\{f(3),f(4),f(5),f(6),f(7),f(8)\},\{f(9),f(10),f(11),f(12),f(1),f(2)\}\}\\
\tau_4 &:= \{\{f(4),f(5),f(6),f(7),f(8),f(9)\},\{f(10),f(11),f(12),f(1),f(2),f(3)\}\}\\
\tau_5 &:= \{\{f(5),f(6),f(7),f(8),f(9),f(10)\},\{f(11),f(12),f(1),f(2),f(3),f(4)\}\}\\
\tau_6 &:= \{\{f(6),f(7),f(8),f(9),f(10),f(11)\},\{f(12),f(1),f(2),f(3),f(4),f(5)\}\}
\end{aligned}$$

Die Tropenstruktur einer Tonreihe

Sei f eine Tonreihe. Diese definiert auf natürliche Weise eine Folge von sechs "Paaren" von Hexachorden:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &:= \{\{f(1),f(2),f(3),f(4),f(5),f(6)\},\{f(7),f(8),f(9),f(10),f(11),f(12)\}\}\\
\tau_2 &:= \{\{f(2),f(3),f(4),f(5),f(6),f(7)\},\{f(8),f(9),f(10),f(11),f(12),f(1)\}\}\\
\tau_3 &:= \{\{f(3),f(4),f(5),f(6),f(7),f(8)\},\{f(9),f(10),f(11),f(12),f(1),f(2)\}\}\\
\tau_4 &:= \{\{f(4),f(5),f(6),f(7),f(8),f(9)\},\{f(10),f(11),f(12),f(1),f(2),f(3)\}\}\\
\tau_5 &:= \{\{f(5),f(6),f(7),f(8),f(9),f(10)\},\{f(11),f(12),f(1),f(2),f(3),f(4)\}\}\\
\tau_6 &:= \{\{f(6),f(7),f(8),f(9),f(10),f(11)\},\{f(12),f(1),f(2),f(3),f(4),f(5)\}\}
\end{aligned}$$

Beim Wechsel von τ_i zu τ_{i+1} wechseln genau 2 pitch classes ihren Hexachord. Diese bilden das ***wechselnde Paar*** $\{f(i),f(i+6)\}$. Zwei Tropen τ_i und τ_{i+1}, zwischen denen es ein wechselndes Paar gibt, nennt man ***verbindbar***.

Die Tropenstruktur einer Tonreihe

Sei f eine Tonreihe. Diese definiert auf natürliche Weise eine Folge von sechs "Paaren" von Hexachorden:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &:= \{\{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)\}, \{f(7), f(8), f(9), f(10), f(11), f(12)\}\\
\tau_2 &:= \{\{f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7)\}, \{f(8), f(9), f(10), f(11), f(12), f(1)\}\}\\
\tau_3 &:= \{\{f(3), f(4), f(5), f(6), f(7), f(8)\}, \{f(9), f(10), f(11), f(12), f(1), f(2)\}\}\\
\tau_4 &:= \{\{f(4), f(5), f(6), f(7), f(8), f(9)\}, \{f(10), f(11), f(12), f(1), f(2), f(3)\}\}\\
\tau_5 &:= \{\{f(5), f(6), f(7), f(8), f(9), f(10)\}, \{f(11), f(12), f(1), f(2), f(3), f(4)\}\}\\
\tau_6 &:= \{\{f(6), f(7), f(8), f(9), f(10), f(11)\}, \{f(12), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\}\}
\end{aligned}
$$

Beim Wechsel von τ_i zu τ_{i+1} wechseln genau 2 pitch classes ihren Hexachord. Diese bilden das ***wechselnde Paar*** $\{f(i), f(i+6)\}$. Zwei Tropen τ_i und τ_{i+1}, zwischen denen es ein wechselndes Paar gibt, nennt man ***verbindbar***.

Die Tropenstruktur einer Tonreihe

Sei f eine Tonreihe. Diese definiert auf natürliche Weise eine Folge von sechs “Paaren” von Hexachorden:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &:= \{\{f(1),f(2),f(3),f(4),f(5),f(6)\},\{f(7),f(8),f(9),f(10),f(11),f(12)\}\}\\
\tau_2 &:= \{\{f(2),f(3),f(4),f(5),f(6),f(7)\},\{f(8),f(9),f(10),f(11),f(12),f(1)\}\}\\
\tau_3 &:= \{\{f(3),f(4),f(5),f(6),f(7),f(8)\},\{f(9),f(10),f(11),f(12),f(1),f(2)\}\}\\
\tau_4 &:= \{\{f(4),f(5),f(6),f(7),f(8),f(9)\},\{f(10),f(11),f(12),f(1),f(2),f(3)\}\}\\
\tau_5 &:= \{\{f(5),f(6),f(7),f(8),f(9),f(10)\},\{f(11),f(12),f(1),f(2),f(3),f(4)\}\}\\
\tau_6 &:= \{\{f(6),f(7),f(8),f(9),f(10),f(11)\},\{f(12),f(1),f(2),f(3),f(4),f(5)\}\}
\end{aligned}
$$

Beim Wechsel von τ_i zu τ_{i+1} wechseln genau 2 pitch classes ihren Hexachord. Diese bilden das ***wechselnde Paar*** $\{f(i),f(i+6)\}$. Zwei Tropen τ_i und τ_{i+1}, zwischen denen es ein wechselndes Paar gibt, nennt man ***verbindbar***.

Die Tropenstruktur einer Tonreihe

Sei f eine Tonreihe. Diese definiert auf natürliche Weise eine Folge von sechs “Paaren” von Hexachorden:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &:= \{\{f(1),f(2),f(3),f(4),f(5),f(6)\},\{f(7),f(8),f(9),f(10),f(11),f(12)\}\}\\
\tau_2 &:= \{\{f(2),f(3),f(4),f(5),f(6),f(7)\},\{f(8),f(9),f(10),f(11),f(12),f(1)\}\}\\
\tau_3 &:= \{\{f(3),f(4),f(5),f(6),f(7),f(8)\},\{f(9),f(10),f(11),f(12),f(1),f(2)\}\}\\
\tau_4 &:= \{\{f(4),f(5),f(6),f(7),f(8),f(9)\},\{f(10),f(11),f(12),f(1),f(2),f(3)\}\}\\
\tau_5 &:= \{\{f(5),f(6),f(7),f(8),f(9),f(10)\},\{f(11),f(12),f(1),f(2),f(3),f(4)\}\}\\
\tau_6 &:= \{\{f(6),f(7),f(8),f(9),f(10),f(11)\},\{f(12),f(1),f(2),f(3),f(4),f(5)\}\}
\end{aligned}$$

Beim Wechsel von τ_i zu τ_{i+1} wechseln genau 2 pitch classes ihren Hexachord. Diese bilden das ***wechselnde Paar*** $\{f(i),f(i+6)\}$. Zwei Tropen τ_i und τ_{i+1}, zwischen denen es ein wechselndes Paar gibt, nennt man ***verbindbar***.

Die Tropenstruktur einer Tonreihe

Sei f eine Tonreihe. Diese definiert auf natürliche Weise eine Folge von sechs "Paaren" von Hexachorden:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &:= \{\{f(1),f(2),f(3),f(4),f(5),f(6)\},\{f(7),f(8),f(9),f(10),f(11),f(12)\}\}\\
\tau_2 &:= \{\{f(2),f(3),f(4),f(5),f(6),f(7)\},\{f(8),f(9),f(10),f(11),f(12),f(1)\}\}\\
\tau_3 &:= \{\{f(3),f(4),f(5),f(6),f(7),f(8)\},\{f(9),f(10),f(11),f(12),f(1),f(2)\}\}\\
\tau_4 &:= \{\{f(4),f(5),f(6),f(7),f(8),f(9)\},\{f(10),f(11),f(12),f(1),f(2),f(3)\}\}\\
\tau_5 &:= \{\{f(5),f(6),f(7),f(8),f(9),f(10)\},\{f(11),f(12),f(1),f(2),f(3),f(4)\}\}\\
\tau_6 &:= \{\{f(6),f(7),f(8),f(9),f(10),f(11)\},\{f(12),f(1),f(2),f(3),f(4),f(5)\}\}
\end{aligned}
$$

Beim Wechsel von τ_i zu τ_{i+1} wechseln genau 2 pitch classes ihren Hexachord. Diese bilden das ***wechselnde Paar*** $\{f(i),f(i+6)\}$. Zwei Tropen τ_i und τ_{i+1}, zwischen denen es ein wechselndes Paar gibt, nennt man ***verbindbar***.

Die Tropenstruktur einer Tonreihe

Sei f eine Tonreihe. Diese definiert auf natürliche Weise eine Folge von sechs “Paaren” von Hexachorden:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &:= \{\{f(1),f(2),f(3),f(4),f(5),f(6)\},\{f(7),f(8),f(9),f(10),f(11),f(12)\}\} \\
\tau_2 &:= \{\{f(2),f(3),f(4),f(5),f(6),f(7)\},\{f(8),f(9),f(10),f(11),f(12),f(1)\}\} \\
\tau_3 &:= \{\{f(3),f(4),f(5),f(6),f(7),f(8)\},\{f(9),f(10),f(11),f(12),f(1),f(2)\}\} \\
\tau_4 &:= \{\{f(4),f(5),f(6),f(7),f(8),f(9)\},\{f(10),f(11),f(12),f(1),f(2),f(3)\}\} \\
\tau_5 &:= \{\{f(5),f(6),f(7),f(8),f(9),f(10)\},\{f(11),f(12),f(1),f(2),f(3),f(4)\}\} \\
\tau_6 &:= \{\{f(6),f(7),f(8),f(9),f(10),f(11)\},\{f(12),f(1),f(2),f(3),f(4),f(5)\}\}
\end{aligned}
$$

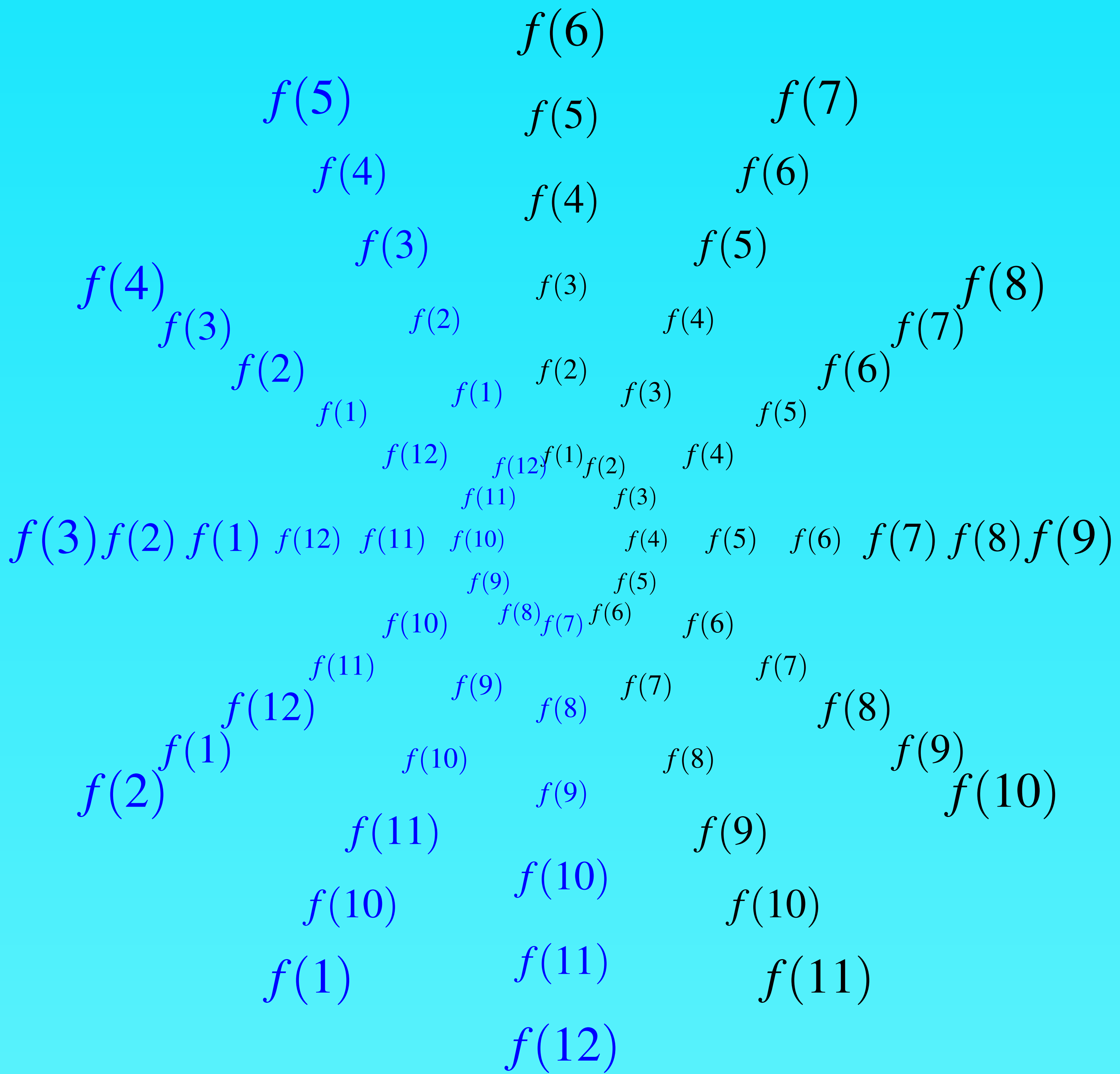
Beim Wechsel von τ_i zu τ_{i+1} wechseln genau 2 pitch classes ihren Hexachord. Diese bilden das ***wechselnde Paar*** $\{f(i),f(i+6)\}$. Zwei Tropen τ_i und τ_{i+1}, zwischen denen es ein wechselndes Paar gibt, nennt man ***verbindbar***.

Die Tropenstruktur einer Tonreihe

Sei f eine Tonreihe. Diese definiert auf natürliche Weise eine Folge von sechs “Paaren” von Hexachorden:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &:= \{\{f(1),f(2),f(3),f(4),f(5),f(6)\},\{f(7),f(8),f(9),f(10),f(11),f(12)\}\} \\
\tau_2 &:= \{\{f(2),f(3),f(4),f(5),f(6),f(7)\},\{f(8),f(9),f(10),f(11),f(12),f(1)\}\} \\
\tau_3 &:= \{\{f(3),f(4),f(5),f(6),f(7),f(8)\},\{f(9),f(10),f(11),f(12),f(1),f(2)\}\} \\
\tau_4 &:= \{\{f(4),f(5),f(6),f(7),f(8),f(9)\},\{f(10),f(11),f(12),f(1),f(2),f(3)\}\} \\
\tau_5 &:= \{\{f(5),f(6),f(7),f(8),f(9),f(10)\},\{f(11),f(12),f(1),f(2),f(3),f(4)\}\} \\
\tau_6 &:= \{\{f(6),f(7),f(8),f(9),f(10),f(11)\},\{f(12),f(1),f(2),f(3),f(4),f(5)\}\}
\end{aligned}
$$

Beim Wechsel von τ_i zu τ_{i+1} wechseln genau 2 pitch classes ihren Hexachord. Diese bilden das ***wechselnde Paar*** $\{f(i),f(i+6)\}$. Zwei Tropen τ_i und τ_{i+1}, zwischen denen es ein wechselndes Paar gibt, nennt man ***verbindbar***.



$f(6)$
$f(5)$ $f(5)$ $f(7)$
$f(4)$ $f(6)$
$f(4)$
$f(3)$ $f(5)$
$f(4)$ $f(3)$ $f(8)$
$f(2)$ $f(4)$ $f(7)$
$f(3)$
$f(2)$ $f(2)$ $f(6)$
$f(1)$ $f(3)$
$f(1)$ $f(5)$
$f(12)$ $f(12)$ $f(1)$ $f(2)$ $f(4)$
$f(11)$ $f(3)$
$f(3)$ $f(2)$ $f(1)$ $f(12)$ $f(11)$ $f(10)$ $f(4)$ $f(5)$ $f(6)$ $f(7)$ $f(8)$ $f(9)$
$f(9)$ $f(5)$
$f(8)$ $f(7)$ $f(6)$
$f(10)$ $f(6)$
$f(11)$ $f(7)$
$f(9)$ $f(7)$
$f(12)$ $f(8)$ $f(8)$
$f(1)$ $f(9)$
$f(10)$ $f(8)$
$f(2)$ $f(10)$
$f(9)$
$f(11)$ $f(9)$
$f(10)$
$f(10)$ $f(10)$
$f(1)$ $f(11)$ $f(11)$
$f(12)$

Sei f eine Tonreihe.

Tropenfolge: $t_f\colon \{1,\ldots,6\} \to \mathscr{T},\ t_f(i) = \tau_i,\ 1 \le i \le 6.$

Sei f eine Tonreihe.

Tropenfolge: $t_f\colon \{1,\ldots,6\} \to \mathscr{T}$, $t_f(i) = \tau_i$, $1 \le i \le 6$.

Tropennummernfolge: Ersetzt man die Tropen in der Tropenfolge durch die Nummern ihrer D_{12}-Bahnen, so erhält man die Tropennummernfolge $s_f\colon \{1,\ldots,6\} \to \{1,\ldots,35\}$, wobei $s_f(i)$ die Nummer der Bahn $D_{12}(\tau_i)$, $1 \le i \le 6$, ist.

Sei f eine Tonreihe.

Tropenfolge: $t_f\colon \{1,\dots,6\} \to \mathscr{T}$, $t_f(i) = \tau_i$, $1 \le i \le 6$.

Tropennummernfolge: Ersetzt man die Tropen in der Tropenfolge durch die Nummern ihrer D_{12}-Bahnen, so erhält man die Tropennummernfolge $s_f\colon \{1,\dots,6\} \to \{1,\dots,35\}$, wobei $s_f(i)$ die Nummer der Bahn $D_{12}(\tau_i)$, $1 \le i \le 6$, ist.

Die $D_{12} \times D_{12}$-Bahn der Tonreihe f identifizieren wir mit der D_{12}-Bahn von s_f, wobei die Diedergruppe D_{12} auf dem Definitionsbereich von s_f operiert. Die Bahn von s_f nennen wir die ***Tropenstruktur*** der Bahn $(D_{12} \times D_{12})(f)$.

Die Datenbank zeigt, dass es 538 139 verschiedene Tropenstrukturen gibt. Die Struktur $D_{12}(1,1,1,1,1,1)$ bestimmt eine eindeutige $D_{12} \times D_{12}$-Bahn von Tonreihen. Es gibt aber auch zwei Tropenstrukturen, und zwar $D_{12}(10,18,22,14,22,18)$ und $D_{12}(10,18,22,14,22,27)$, die jeweils zu 48 verschiedenen $D_{12} \times D_{12}$-Bahnen von Tonreihen gehören.

Datenbank: Compute the trope structure oder Search for the trope structure

Wann gibt es zu einer Folge von sechs Tropennummern eine Tonreihe mit dieser Tropennummernfolge?

Gibt eine Beziehung zwischen dem Stabilisatortyp einer Tonreihe und ihrer Tropenstruktur?

Theorem. *Sei f eine Tonreihe. Die Paare (TI, S^6) und (T^6, R) gehören genau dann zum Stabilisator von f, wenn gilt:*

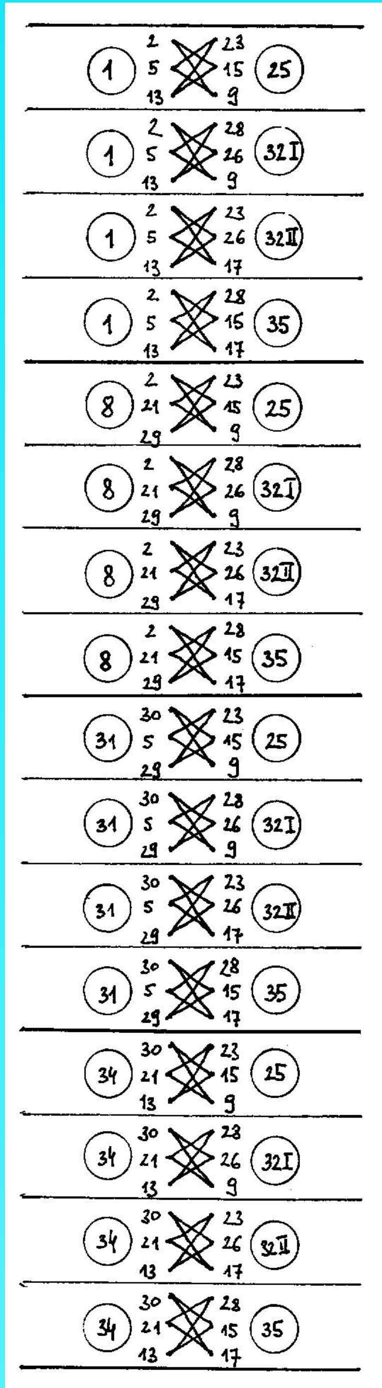
- *f besitzt genau 4 verschiedene Tropennummern aus der Menge $\{1, 2, 5, 8, 9, 13, 15, 17, 21, 23, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35\}$.*

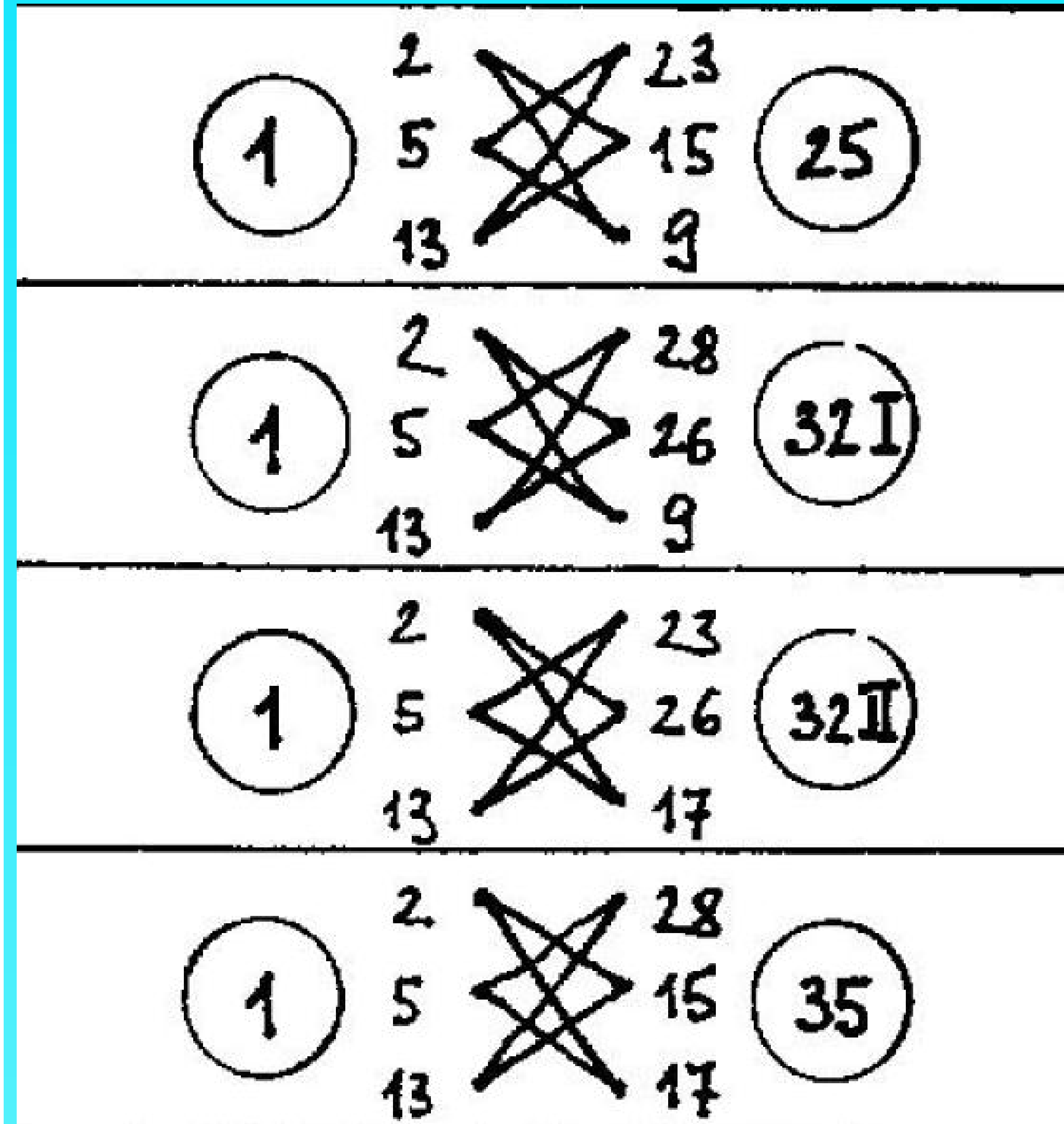
- *Die Tropennummernfolge von f ist von der Form $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_3, t_2)$, wobei t_1 zu $\{1, 8, 31, 34\}$ gehört. Das sind die Nummern von Tropen $\{A, A'\}$ mit $T^6(A) = A'$ und $TI(A) = A'$. Und t_4 gehört zu $\{25, 32, 35\}$. Das sind die Nummern von Tropen $\{A, A'\}$ mit $T^6(A) = A$ und $TI(A) = A'$.*

- *Es gibt eine Tropenfolge $(\tau_1, \ldots, \tau_6)$, wobei τ_r ein Repräsentant der t_r-ten D_{12}-Bahn von verbindbaren Tropen ist, $1 \leq r \leq 6$, wobei zusätzlich auch $TI(\tau_r) = \tau_r$, $1 \leq r \leq 6$, $\tau_6 = T^6(\tau_2)$ und $\tau_5 = T^6(\tau_3)$ gilt.*

Die Menge der Bahnen von Tonreihen, deren Stabilisatortyp die Konjugiertenklasse von $\langle (TI, S^6), (T^6, R) \rangle$ ist, besteht aus 96 Elementen. Diese wurden von Peter Lackner unabhängig von dieser Arbeit bereits 1988 bestimmt und in einer Tabelle zusammengefasst.

Home Page
Title Page
Contents
Page 29 of 37
Go Back
Full Screen
Close
Quit



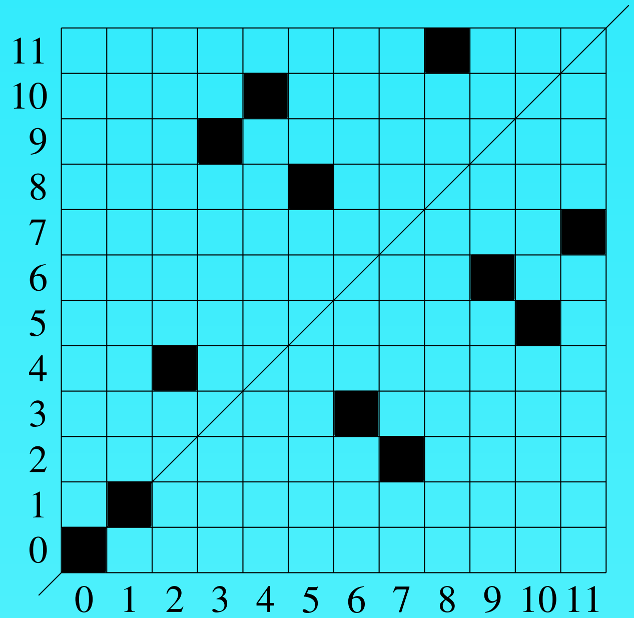


Der Parametertausch

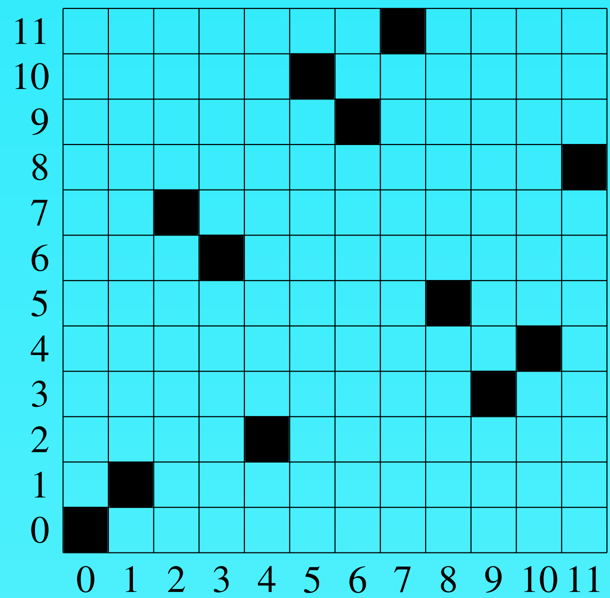
ist eine Operation auf Tonreihen, die nicht durch Operationen auf Definitions- oder Bildbereich induziert wird. Wir sehen nun f als eine bijektive Abbildung von $\mathbb{Z}_{12}$ auf $\mathbb{Z}_{12}$ an. Zeichnet man f als eine Matrix M_f, und spiegelt an der Diagonale, dann erhält man $M_{f^{-1}}$. Z.B.

$f = (0,1,4,9,10,8,3,2,11,6,5,7)$

$M_f =$



$M_{f^{-1}} =$



Sei $P: \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}, (i,j) \mapsto (j,i)$.

Der Parametertausch von f ist dann $P * f = f^{-1}$.

Theorem. Sei $\Phi \leq S_n$, und $\mathfrak{G}_n$ erzeugt von $\Phi \times \Phi$ und P eine Permutationsgruppe auf $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Dann operiert $\mathfrak{G}_n$ auch auf S_n, der Menge der Tonreihen in $\mathbb{Z}_n$, und es gilt:

$$|\mathfrak{G}_n \backslash\backslash S_n| = \frac{1}{2}\left(|(\Phi \times \Phi)\backslash\backslash S_n| + \frac{1}{|\Phi|} \sum_{\phi \in \Phi} \left| \{ f \in S_n \mid f^2 = \phi \} \right| \right).$$

Theorem. Sei $\Phi \leq S_n$, und $\mathfrak{G}_n$ erzeugt von $\Phi \times \Phi$ und P eine Permutationsgruppe auf $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Dann operiert $\mathfrak{G}_n$ auch auf S_n, der Menge der Tonreihen in $\mathbb{Z}_n$, und es gilt:

$$|\mathfrak{G}_n \backslash\backslash S_n| = \frac{1}{2}\left(|(\Phi \times \Phi)\backslash\backslash S_n| + \frac{1}{|\Phi|}\sum_{\phi \in \Phi} \left|\{f \in S_n \mid f^2 = \phi\}\right| \right).$$

Beweis. Das Lemma von Cauchy–Frobenius liefert

$$|\mathfrak{G}_n \backslash\backslash S_n| = \frac{1}{2|\Phi|^2}\sum_{(\pi,\phi)\in\Phi\times\Phi} |(S_n)_{(\pi,\phi)}| + \frac{1}{2|\Phi|^2}\sum_{(\pi,\phi)\in\Phi\times\Phi} |(S_n)_{(\pi,\phi)\circ P}|.$$

Die erste Summe ist $1/2|(\Phi \times \Phi)\backslash\backslash S_n|$ und kann mit Standardmethoden berechnet werden.

Für die zweite Summe gilt, $f \in S_n$ ist genau dann ein Fixpunkt von $(\pi,\phi)\circ P$, wenn $\phi = f\circ\pi\circ f$, oder dazu äquivalent $\phi\pi = (f\pi)^2$. Daher ist die zweite Summe gleich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2|\Phi|^2}\sum_{\pi\in\Phi}\sum_{\phi\in\Phi}\left|\left\{f\in S_n \mid (f\pi)^2=\phi\pi\right\}\right| \\
&=\frac{1}{2|\Phi|^2}\sum_{\pi\in\Phi}\sum_{\phi\in\Phi}\left|\left\{\tilde f\in S_n \mid \tilde f^2=\phi\pi\right\}\right| \\
&=\frac{1}{2|\Phi|^2}|\Phi|\sum_{\phi\in\Phi}\left|\left\{f\in S_n \mid f^2=\phi\right\}\right|.
\end{aligned}$$

Das ist die Hälfte der durchschnittlichen Anzahl von Quadratwurzeln aller Elemente von Φ. Aus dem Zykeltyp von ϕ kann man die Anzahl der Quadratwurzeln von ϕ bestimmen.

Für die zweite Summe gilt, $f \in S_n$ ist genau dann ein Fixpunkt von $(\pi, \phi) \circ P$, wenn $\phi = f \circ \pi \circ f$, oder dazu äquivalent $\phi\pi = (f\pi)^2$. Daher ist die zweite Summe gleich

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2|\Phi|^2} \sum_{\pi \in \Phi} \sum_{\phi \in \Phi} \left|\{f \in S_n \mid (f\pi)^2 = \phi\pi\}\right| \\ &= \frac{1}{2|\Phi|^2} \sum_{\pi \in \Phi} \sum_{\phi \in \Phi} \left|\{\tilde{f} \in S_n \mid \tilde{f}^2 = \phi\pi\}\right| \\ &= \frac{1}{2|\Phi|^2} |\Phi| \sum_{\phi \in \Phi} \left|\{f \in S_n \mid f^2 = \phi\}\right|. \end{aligned}$$

Das ist die Hälfte der durchschnittlichen Anzahl von Quadratwurzeln aller Elemente von Φ. Aus dem Zykeltyp von ϕ kann man die Anzahl der Quadratwurzeln von ϕ bestimmen.

Für $n = 12$:

	operierende Gruppe	# der Bahnen
9.	$\langle D_{12} \times D_{12}, P \rangle$	420 948
10.	$\langle \mathrm{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12}) \times \mathrm{Aff}_1(\mathbb{Z}_{12}), P \rangle$	106 986

Die Datenbank

http://www.uni-graz.at/˜fripert/db/

Die Daten wurden unter Verwendung von SYMMETRICA [5] und GAP [4] berechnet.

Die Suchroutinen wurden in perl programmiert. Graphik verwendet javascript.

Datenbank: Database on tone rows and tropes

1. Wir suchen Information über “Le Merle Noir”.

2. Wir bestimmen die gesamte Information, die über diese Tonreihe vorliegt.

3. Suche nach Allintervallreihen und musikalische Information über jene Reihen, die Alban Berg verwendete. Wer benützte zu diesen äquivalente Tonreihen?

Literatur

[1] Solomon Wolf Golomb and Lloyd Richard Welch. On the enumeration of polygons. *American Mathematical Monthly*, 87:349–353, 1960.

[2] David James Hunter and Paul T. von Hippel. How rare is symmetry in musical 12-tone rows? *American Mathematical Monthly*, 110(2):124–132, 2003.

[3] Ronald C. Read. Combinatorial problems in the theory of music. *Discrete Mathematics*, 167-168(1-3):543–551, 1997.

[4] M. Schönert et al. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming*. Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, fifth edition, 1995.

[5] SYMMETRICA. A program system devoted to representation theory, invariant theory and combinatorics of finite symmetric groups and related classes of groups. Copyright by “Lehrstuhl II für Mathematik, Universität Bayreuth, 95440 Bayreuth”.

`http://www.algorithm.uni-bayreuth.de/en/research/SYMMETRICA/.`

Contents