Anzahl der Semi-Isometrieklassen linearer Codes

Harald Fripertinger

Karl-Franzens-Universität Graz

Anzahl der Semi-Isometrieklassen linearer Codes

Harald Fripertinger
Karl-Franzens-Universität Graz

Wie können die Methoden zur Abzählung der Isometrieklassen linearer Codes auf Semi-Isometrieklassen verallgemeinert werden?

Anzahl der Semi-Isometrieklassen linearer Codes

Harald Fripertinger
Karl-Franzens-Universität Graz

Wie können die Methoden zur Abzählung der Isometrieklassen linearer Codes auf Semi-Isometrieklassen verallgemeinert werden?

1. Einführung

Anzahl der Semi-Isometrieklassen linearer Codes

Harald Fripertinger

Karl-Franzens-Universität Graz

Wie können die Methoden zur Abzählung der Isometrieklassen linearer Codes auf Semi-Isometrieklassen verallgemeinert werden?

1. Einführung
2. Beschreibung der Isometrieklassen bzw. Semi-Isometrieklassen als Kranzprodukt oder verallgemeinertes Kranzprodukt.

Anzahl der Semi-Isometrieklassen linearer Codes

Harald Fripertinger
Karl-Franzens-Universität Graz

Wie können die Methoden zur Abzählung der Isometrieklassen linearer Codes auf Semi-Isometrieklassen verallgemeinert werden?

1. Einführung
2. Beschreibung der Isometrieklassen bzw. Semi-Isometrieklassen als Kranzprodukt oder verallgemeinertes Kranzprodukt.
3. Operation auf Vektorräumen, Basen und Funktionenmengen.

Anzahl der Semi-Isometrieklassen linearer Codes

Harald Fripertinger
Karl-Franzens-Universität Graz

Wie können die Methoden zur Abzählung der Isometrieklassen linearer Codes auf Semi-Isometrieklassen verallgemeinert werden?

1. Einführung
2. Beschreibung der Isometrieklassen bzw. Semi-Isometrieklassen als Kranzprodukt oder verallgemeinertes Kranzprodukt.
3. Operation auf Vektorräumen, Basen und Funktionenmengen.
4. Vereinfachen der Situation unter Verwendung des (verallgemeinerten) Lehmannschen Lemmas.

Anzahl der Semi-Isometrieklassen linearer Codes

Harald Fripertinger
Karl-Franzens-Universität Graz

Wie können die Methoden zur Abzählung der Isometrieklassen linearer Codes auf Semi-Isometrieklassen verallgemeinert werden?

1. Einführung
2. Beschreibung der Isometrieklassen bzw. Semi-Isometrieklassen als Kranzprodukt oder verallgemeinertes Kranzprodukt.
3. Operation auf Vektorräumen, Basen und Funktionenmengen.
4. Vereinfachen der Situation unter Verwendung des (verallgemeinerten) Lehmannschen Lemmas.
5. Zykelindexpolynome für die natürliche Operation von $\mathrm{PGL}_k(q)$ oder $\mathrm{P\Gamma L}_k(q)$ auf $\mathrm{PG}_{k-1}(q)$.

Grundlagen

Endliche Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^r$, $r \geq 1$. Unterschiede zwischen Isometrieklassen und Semi-Isometrieklassen nur für $r > 1$.

Grundlagen

Endliche Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^r$, $r \geq 1$. Unterschiede zwischen Isometrieklassen und Semi-Isometrieklassen nur für $r > 1$.

Galoisgruppe $Gal := Gal\,[\mathbb{F}_q : \mathbb{F}_p]$ ist die Gruppe aller $\mathbb{F}_p$-Automorphismen von $\mathbb{F}_q$. Sie ist eine zyklische Gruppe der Ordnung r erzeugt vom Frobenius-Automorphismus $\tau\colon \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q$, $\tau(\kappa) := \kappa^p$.

Grundlagen

Endliche Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^r$, $r \geq 1$. Unterschiede zwischen Isometrieklassen und Semi-Isometrieklassen nur für $r > 1$.

Galoisgruppe $Gal := Gal\,[\mathbb{F}_q : \mathbb{F}_p]$ ist die Gruppe aller $\mathbb{F}_p$-Automorphismen von $\mathbb{F}_q$. Sie ist eine zyklische Gruppe der Ordnung r erzeugt vom Frobenius-Automorphismus $\tau\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$, $\tau(\kappa) := \kappa^p$.

Ein linearer (n,k)-Code C über $\mathbb{F}_q$ ist ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{F}_q^n$, beschrieben durch eine Generatormatrix, eine $k \times n$-Matrix über $\mathbb{F}_q$, deren Zeilen eine Basis von C bilden. Die Elemente von $\mathbb{F}_q^n$ schreiben wir als Zeilenvektoren $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$.

Die Hamming-Metrik auf $\mathbb{F}_q^n$ ist gegeben durch

$$d\colon \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{Z}_{\geq 0} : d(v,w) := \left|\{i \in n \mid v_i \neq w_i\}\right|.$$

Home Page

Title Page

Contents

Page 3 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Die Hamming-Metrik auf $\mathbb{F}_q^n$ ist gegeben durch

$$d\colon \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{Z}_{\geq 0} : d(v,w) := \left|\{i \in n \mid v_i \neq w_i\}\right|.$$

Die codierungstheoretischen Eigenschaften eines Codes C werden durch seine Minimaldistanz

$$\operatorname{dist}(C) := \min\{d(c,c') \mid c, c' \in C,\ c \neq c'\} = \min\{d(c,0) \mid c \in C \setminus \{0\}\}$$

beschrieben.

Die Hamming-Metrik auf $\mathbb{F}_q^n$ ist gegeben durch

$$d\colon \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{Z}_{\geq 0} : d(v,w) := \left|\{i \in n \mid v_i \neq w_i\}\right|.$$

Die codierungstheoretischen Eigenschaften eines Codes C werden durch seine Minimaldistanz

$$\operatorname{dist}(C) := \min\{d(c,c') \mid c, c' \in C,\ c \neq c'\} = \min\{d(c,0) \mid c \in C \setminus \{0\}\}$$

beschrieben. Codes mit gleicher metrischer Struktur haben gleiche Eigenschaften, werden daher als äquivalent angesehen.

Äquivalenzklassen linearer Codes

Wir betrachten drei verschiedene Äquivalenzrelationen auf der Menge linearer Codes zu gegebenen Parametern. Permutations-Äquivalenz, Äquivalenz definiert durch Isometrie, Äquivalenz definiert durch Semi-Isometrie.

Äquivalenzklassen linearer Codes

Wir betrachten drei verschiedene Äquivalenzrelationen auf der Menge linearer Codes zu gegebenen Parametern. Permutations-Äquivalenz, Äquivalenz definiert durch Isometrie, Äquivalenz definiert durch Semi-Isometrie.

1. Zwei (n,k)-Codes C_1 und C_2 heißen permutations-äquivalent, falls es ein $\pi \in S_n$ gibt mit $\pi(C_1) = C_2$. Dabei ist $\pi(C_1) := \{\pi(v) \mid v \in C_1\}$ und $\pi(v) = (v_{\pi^{-1}(0)}, \ldots, v_{\pi^{-1}(n-1)})$.

2. Zwei (n,k)-Codes C_1 und C_2 heißen isometrisch, falls es eine Isometrie $\varphi\colon C_1 \longrightarrow C_2$ gibt, so dass $\varphi(C_1) = C_2$ ist.

Jede Isometrie φ kann man zu einer Isometrie $\Phi\colon \mathbb{F}_q^n \longrightarrow \mathbb{F}_q^n$ erweitern. Die Isometrie φ wird als paar $(\psi;\pi)$ geschrieben mit $\psi \in (\mathbb{F}_q^*)^n$ und $\pi \in S_n$. Für $v \in \mathbb{F}_q^n$ ist

$$\varphi(v) = \left(\psi(0)v_{\pi^{-1}(0)}, \ldots, \psi(n-1)v_{\pi^{-1}(n-1)}\right)$$

2. Zwei (n,k)-Codes C_1 und C_2 heißen isometrisch, falls es eine Isometrie $\varphi\colon C_1 \longrightarrow C_2$ gibt, so dass $\varphi(C_1) = C_2$ ist.

Jede Isometrie φ kann man zu einer Isometrie $\Phi\colon \mathbb{F}_q^n \longrightarrow \mathbb{F}_q^n$ erweitern. Die Isometrie φ wird als paar $(\psi;\pi)$ geschrieben mit $\psi \in (\mathbb{F}_q^*)^n$ und $\pi \in S_n$. Für $v \in \mathbb{F}_q^n$ ist

$$\varphi(v) = \left(\psi(0)v_{\pi^{-1}(0)}, \dots, \psi(n-1)v_{\pi^{-1}(n-1)}\right) = v \cdot M^t_{(\psi;\pi)},$$

wobei $M_{(\psi;\pi)}$ die monomiale Matrix

$$\begin{pmatrix} \psi(\pi(0))e^{(\pi(0))} \\ \vdots \\ \psi(\pi(n-1))e^{(\pi(n-1))} \end{pmatrix} = \left(\psi(0)e^{(\pi^{-1}(0))^t} \;\middle|\; \dots \;\middle|\; \psi(n-1)e^{(\pi^{-1}(n-1))^t}\right)$$

ist.

2. Zwei (n,k)-Codes C_1 und C_2 heißen isometrisch, falls es eine Isometrie $\varphi\colon C_1 \to C_2$ gibt, so dass $\varphi(C_1) = C_2$ ist.

Jede Isometrie φ kann man zu einer Isometrie $\Phi\colon \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{F}_q^n$ erweitern. Die Isometrie φ wird als paar $(\psi;\pi)$ geschrieben mit $\psi \in (\mathbb{F}_q^*)^n$ und $\pi \in S_n$. Für $v \in \mathbb{F}_q^n$ ist

$$\varphi(v) = \left(\psi(0)v_{\pi^{-1}(0)}, \dots, \psi(n-1)v_{\pi^{-1}(n-1)}\right) = v \cdot M^t_{(\psi;\pi)},$$

wobei $M_{(\psi;\pi)}$ die monomiale Matrix

$$\begin{pmatrix} \psi(\pi(0))e^{(\pi(0))} \\ \vdots \\ \psi(\pi(n-1))e^{(\pi(n-1))} \end{pmatrix} = \left(\psi(0)e^{(\pi^{-1}(0))^t} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \psi(n-1)e^{(\pi^{-1}(n-1))^t}\right)$$

ist. Die Isometriegruppe ist das Kranzprodukt $\mathbb{F}_q^* \wr_n S_n$ bzw. die volle monomiale Gruppe $M_n(q)$.

3. Zwei (n,k)-Codes C_1 und C_2 heißen äquivalent, falls es eine Semi-Isometrie $\sigma\colon C_1 \to C_2$ gibt, so dass $\sigma(C_1) = C_2$ ist.

$\sigma\colon \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{F}_q^n$ ist eine Semi-Isometrie, falls es ein $\alpha \in Gal$ gibt, so dass

$$\sigma(v+w) = \sigma(v) + \sigma(w), \quad \sigma(\kappa v) = \alpha(\kappa)\sigma(v), \quad v,w \in \mathbb{F}_q^n,\ \kappa \in \mathbb{F}_q,$$

und

$$d(v,w) = d(\sigma(v),\sigma(w)), \qquad v,w \in \mathbb{F}_q^n,$$

erfüllt ist.

3. Zwei (n,k)-Codes C_1 und C_2 heißen äquivalent, falls es eine Semi-Isometrie $\sigma\colon C_1 \to C_2$ gibt, so dass $\sigma(C_1) = C_2$ ist.

$\sigma\colon \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{F}_q^n$ ist eine Semi-Isometrie, falls es ein $\alpha \in Gal$ gibt, so dass

$$\sigma(v+w) = \sigma(v) + \sigma(w), \quad \sigma(\kappa v) = \alpha(\kappa)\sigma(v), \quad v,w \in \mathbb{F}_q^n,\ \kappa \in \mathbb{F}_q,$$

und

$$d(v,w) = d(\sigma(v), \sigma(w)), \qquad v,w \in \mathbb{F}_q^n,$$

erfüllt ist. σ wird beschrieben durch $\alpha \in Gal$ und $(\psi;\pi) \in \mathbb{F}_q^* \wr_n S_n$.

$$\sigma(v) = \left(\psi(0)\alpha(v_{\pi^{-1}(0)}), \ldots, \psi(n-1)\alpha(v_{\pi^{-1}(n-1)})\right).$$

Wir schreiben die Semi-Isometrie σ in der Form $(\psi;(\alpha,\pi))$. Verwenden wir

$$(v'_0,\ldots,v'_{n-1}) = \left(\psi_1(0)\alpha_1(v_{\pi_1^{-1}(0)}),\ldots,\psi_1(n-1)\alpha_1(v_{\pi_1^{-1}(n-1)})\right),$$

dann liefert die Anwendung zweier Semi-Isometrien:

$$(\psi_2;(\alpha_2,\pi_2))\big((\psi_1;(\alpha_1,\pi_1))(v_0,\ldots,v_{n-1})\big) =$$
$$(\psi_2;(\alpha_2,\pi_2))(v'_0,\ldots,v'_{n-1}) =$$

Wir schreiben die Semi-Isometrie σ in der Form $(\psi;(\alpha,\pi))$. Verwenden wir

$$(v'_0,\dots,v'_{n-1}) = \big(\psi_1(0)\alpha_1(v_{\pi_1^{-1}(0)}),\dots,\psi_1(n-1)\alpha_1(v_{\pi_1^{-1}(n-1)})\big),$$

dann liefert die Anwendung zweier Semi-Isometrien:

$$(\psi_2;(\alpha_2,\pi_2))\big((\psi_1;(\alpha_1,\pi_1))(v_0,\dots,v_{n-1})\big) =$$
$$(\psi_2;(\alpha_2,\pi_2))(v'_0,\dots,v'_{n-1}) =$$
$$\big(\psi_2(0)\alpha_2(v'_{\pi_2^{-1}(0)}),\dots,\psi_2(n-1)\alpha_2(v'_{\pi_2^{-1}(n-1)})\big) =$$

Wir schreiben die Semi-Isometrie σ in der Form $(\psi;(\alpha,\pi))$. Verwenden wir

$$(v'_0,\ldots,v'_{n-1}) = \left(\psi_1(0)\alpha_1(v_{\pi_1^{-1}(0)}),\ldots,\psi_1(n-1)\alpha_1(v_{\pi_1^{-1}(n-1)})\right),$$

dann liefert die Anwendung zweier Semi-Isometrien:

$$(\psi_2;(\alpha_2,\pi_2))\big((\psi_1;(\alpha_1,\pi_1))(v_0,\ldots,v_{n-1})\big) =$$
$$(\psi_2;(\alpha_2,\pi_2))(v'_0,\ldots,v'_{n-1}) =$$
$$\left(\psi_2(0)\alpha_2(v'_{\pi_2^{-1}(0)}),\ldots,\psi_2(n-1)\alpha_2(v'_{\pi_2^{-1}(n-1)})\right) =$$
$$\Big(\psi_2(0)\alpha_2\big(\psi_1(\pi_2^{-1}(0))\alpha_1(v_{\pi_1^{-1}(\pi_2^{-1}(0))})\big),\ldots,$$
$$\ldots,\psi_2(n-1)\alpha_2\big(\psi_1(\pi_2^{-1}(n-1))\alpha_1(v_{\pi_1^{-1}(\pi_2^{-1}(n-1))})\big)\Big) =$$

Wir schreiben die Semi-Isometrie σ in der Form $(\psi;(\alpha,\pi))$. Verwenden wir

$$(v'_0,\dots,v'_{n-1}) = \big(\psi_1(0)\alpha_1(v_{\pi_1^{-1}(0)}),\dots,\psi_1(n-1)\alpha_1(v_{\pi_1^{-1}(n-1)})\big),$$

dann liefert die Anwendung zweier Semi-Isometrien:

$$\begin{gathered}
(\psi_2;(\alpha_2,\pi_2))\big((\psi_1;(\alpha_1,\pi_1))(v_0,\dots,v_{n-1})\big) = \\
(\psi_2;(\alpha_2,\pi_2))(v'_0,\dots,v'_{n-1}) = \\
\big(\psi_2(0)\alpha_2(v'_{\pi_2^{-1}(0)}),\dots,\psi_2(n-1)\alpha_2(v'_{\pi_2^{-1}(n-1)})\big) = \\
\Big(\psi_2(0)\alpha_2\big(\psi_1(\pi_2^{-1}(0))\alpha_1(v_{\pi_1^{-1}(\pi_2^{-1}(0))})\big),\dots, \\
\dots,\psi_2(n-1)\alpha_2\big(\psi_1(\pi_2^{-1}(n-1))\alpha_1(v_{\pi_1^{-1}(\pi_2^{-1}(n-1))})\big)\Big) = \\
\Big(\psi_2(0)\alpha_2(\psi_1(\pi_2^{-1}(0)))(\alpha_2\circ\alpha_1)(v_{(\pi_2\circ\pi_1)^{-1}(0)}),\dots, \\
\dots,\psi_2(n-1)\alpha_2(\psi_1(\pi_2^{-1}(n-1)))(\alpha_2\circ\alpha_1)(v_{(\pi_2\circ\pi_1)^{-1}(n-1)})\Big).
\end{gathered}$$

Die Gruppe der Semi-Isometrien

Wir schreiben die Semi-Isometrie σ in der Form $(\psi;(\alpha,\pi))$ und definieren auf der Menge $(\mathbb{F}_q^*)^n \times (Gal \times S_n)$ die folgende Verknüpfung:

$$(\psi_2;(\alpha_2,\pi_2))\cdot(\psi_1;(\alpha_1,\pi_1)) := (\psi_2\psi_{1(\alpha_2,\pi_2)};(\alpha_2\alpha_1,\pi_2\circ\pi_1)),$$

mit

$$\psi_{1(\alpha_2,\pi_2)}(i) := \alpha_2(\psi_1(\pi_2^{-1}(i))), \qquad i \in n$$

und

$$\psi_2\psi_1(i) := \psi_2(i)\psi_1(i), \qquad i \in n.$$

Das ist ein verallgemeinertes Kranzprodukt.

Die Gruppe der Semi-Isometrien

Wir schreiben die Semi-Isometrie σ in der Form $(\psi;(\alpha,\pi))$ und definieren auf der Menge $(\mathbb{F}_q^*)^n \times (Gal \times S_n)$ die folgende Verknüpfung:

$$(\psi_2;(\alpha_2,\pi_2))\cdot(\psi_1;(\alpha_1,\pi_1)) := (\psi_2\psi_{1(\alpha_2,\pi_2)};(\alpha_2\alpha_1,\pi_2\circ\pi_1)),$$

mit

$$\psi_{1(\alpha_2,\pi_2)}(i) := \alpha_2(\psi_1(\pi_2^{-1}(i))), \qquad i \in n$$

und

$$\psi_2\psi_1(i) := \psi_2(i)\psi_1(i), \qquad i \in n.$$

Das ist ein verallgemeinertes Kranzprodukt.

Neutrales Element: $(1;(\tau^0,\mathrm{id}))$, wobei 1 die Abbildung $i \mapsto 1$, $i \in n$, ist.

Inverses Element von $(\psi;(\alpha,\pi))$ ist $(\psi^{-1}_{(\alpha^{-1},\pi^{-1})};(\alpha^{-1},\pi^{-1}))$ mit $\psi^{-1}(i) := (\psi(i))^{-1}$.

Home Page

Title Page

Contents

Page 9 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Das ist ein semidirektes Produkt von $(\mathbb{F}_q^*)^n$ und $Gal \times S_n$. Wir verwenden dafür das Symbol $\mathbb{F}_q^* \wr \wr_n (Gal \times S_n)$.

Das ist ein semidirektes Produkt von $(\mathbb{F}_q^*)^n$ und $Gal \times S_n$. Wir verwenden dafür das Symbol $\mathbb{F}_q^* \wr\wr_n (Gal \times S_n)$.

Ordnung $\left|\mathbb{F}_q^* \wr\wr_n (Gal \times S_n)\right| = (q-1)^n \cdot r \cdot n!$.

Das ist ein semidirektes Produkt von $(\mathbb{F}_q^*)^n$ und $Gal \times S_n$. Wir verwenden dafür das Symbol $\mathbb{F}_q^* \wr\wr_n (Gal \times S_n)$.

Ordnung $\left|\mathbb{F}_q^* \wr\wr_n (Gal \times S_n)\right| = (q-1)^n \cdot r \cdot n!$.

Operation auf $\mathbb{F}_q^n$:

$$\mathbb{F}_q^* \wr\wr_n (Gal \times S_n) \times \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{F}_q^n$$

$$\big((\psi;(\alpha,\pi)),v\big) \mapsto \big(\psi(0)\alpha(v_{\pi^{-1}(0)}),\ldots,\psi(n-1)\alpha(v_{\pi^{-1}(n-1)})\big).$$

Das ist die oben eingeführte Operation der Semi-Isometrien auf $\mathbb{F}_q^n$.

Operation der Gruppe der (Semi)-Isometrien auf der Menge der Codes

Beschreibung eines (n,k)-Codes C mittels Generatormatrix Γ ist i.a. nicht eindeutig. Der Code C wird beschrieben als die Bahn

$$\mathrm{GL}_k(q)(\Gamma) = \{A \cdot \Gamma \mid A \in \mathrm{GL}_k(q)\}\,.$$

Operation der Gruppe der (Semi)-Isometrien auf der Menge der Codes

Beschreibung eines (n,k)-Codes C mittels Generatormatrix Γ ist i.a. nicht eindeutig. Der Code C wird beschrieben als die Bahn

$$\mathrm{GL}_k(q)(\Gamma) = \{A \cdot \Gamma \mid A \in \mathrm{GL}_k(q)\}\,.$$

Sei $\mathbb{F}_q^{k\times n,s}$ die Menge der $k \times n$-Matrizen vom Rang s über $\mathbb{F}_q$, dann ist $\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\mathbb{F}_q^{k\times n,k}$ die Menge aller (n,k)-Codes. Die Menge der Isometrieklassen dieser Codes ist die Bahnenmenge

$$M_n(q)\backslash\backslash\left(\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\mathbb{F}_q^{k\times n,k}\right).$$

Operation der Gruppe der (Semi)-Isometrien auf der Menge der Codes

Beschreibung eines (n,k)-Codes C mittels Generatormatrix Γ ist i.a. nicht eindeutig. Der Code C wird beschrieben als die Bahn

$$\mathrm{GL}_k(q)(\Gamma) = \{A \cdot \Gamma \mid A \in \mathrm{GL}_k(q)\}\,.$$

Sei $\mathbb{F}_q^{k\times n,s}$ die Menge der $k \times n$-Matrizen vom Rang s über $\mathbb{F}_q$, dann ist $\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\mathbb{F}_q^{k\times n,k}$ die Menge aller (n,k)-Codes. Die Menge der Isometrieklassen dieser Codes ist die Bahnenmenge

$$M_n(q)\backslash\backslash \left(\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\mathbb{F}_q^{k\times n,k}\right).$$

Die Operationen von $M_n(q)$ und $\mathrm{GL}_k(q)$ auf $\mathbb{F}_q^{k\times n,k}$ kommutieren, also sind die Isometrieklassen die Bahnen der Operation des direkten Produkts

$$(M_n(q) \times \mathrm{GL}_k(q)) \times \mathbb{F}_q^{k\times n,k} \to \mathbb{F}_q^{k\times n,k} : \left((M_{(\psi;\pi)}, A), \Gamma\right) \mapsto A \cdot \Gamma \cdot M^t_{(\psi;\pi)}.$$

Wir beschreiben die Generatormatrix Γ als die Abbildung $\Gamma\colon n \longrightarrow \mathbb{F}_q^k$ wobei $\Gamma(i)$ die i-te Spalte von Γ bezeichnet.

Um die Rechnung zu vereinfachen, betrachten wir nicht mehr die Menge aller Generatormatrizen, also die Menge der Abbildungen, die Matrizen vom Rang k definieren, sondern nur mehr die Menge aller Abbildungen $\Gamma\colon n \longrightarrow \mathbb{F}_q^k \setminus \{0\}$. Wir betrachten nur Codes “ohne Nullspalten”. Am Ende der Rechnung sieht man, dass die an dieser Stelle verlorene Rangbedingung doch noch berücksichtigt werden kann.

Wir beschreiben die Generatormatrix Γ als die Abbildung $\Gamma\colon n \longrightarrow \mathbb{F}_q^k$ wobei $\Gamma(i)$ die i-te Spalte von Γ bezeichnet.

Um die Rechnung zu vereinfachen, betrachten wir nicht mehr die Menge aller Generatormatrizen, also die Menge der Abbildungen, die Matrizen vom Rang k definieren, sondern nur mehr die Menge aller Abbildungen $\Gamma\colon n \longrightarrow \mathbb{F}_q^k \setminus \{0\}$. Wir betrachten nur Codes “ohne Nullspalten”. Am Ende der Rechnung sieht man, dass die an dieser Stelle verlorene Rangbedingung doch noch berücksichtigt werden kann.

Ziel: Berechnung der Anzahl der Bahnen in

$$(\mathbb{F}_q^* \wr_n S_n \times \mathrm{GL}_k(q)) \backslash\backslash (\mathbb{F}_q^k \setminus \{0\})^n$$

bezüglich der Operation

$$\Big(((\psi;\pi),A),\Gamma\Big) \mapsto \tilde{\Gamma} \quad \text{mit} \quad \tilde{\Gamma}(i) = \psi(i)(A \cdot \Gamma(\pi^{-1}(i))^t)^t.$$

Zu Beginn untersuchen wir die Aktion von $\mathbb{F}_q^* \wr_n S_n$ auf $(\mathbb{F}_q^k \setminus \{0\})^n$.

Wenn die Galoisgruppe Gal auf den Vektorräumen $\mathbb{F}_q^n$ oder $\mathbb{F}_q^{k \times n}$ komponentenweise operiert, dann ist die induzierte Abbildung ein Vektorraumisomorphismus.

Wenn die Galoisgruppe Gal auf den Vektorräumen $\mathbb{F}_q^n$ oder $\mathbb{F}_q^{k\times n}$ komponentenweise operiert, dann ist die induzierte Abbildung ein Vektorraumisomorphismus.

Wenn die Galoisgruppe Gal auf der Gruppe $\mathrm{GL}_k(q)$ komponentenweise operiert, dann ist die induzierte Abbildung ein Gruppenisomorphismus.

Wenn die Galoisgruppe Gal auf den Vektorräumen $\mathbb{F}_q^n$ oder $\mathbb{F}_q^{k\times n}$ komponentenweise operiert, dann ist die induzierte Abbildung ein Vektorraumisomorphismus.

Wenn die Galoisgruppe Gal auf der Gruppe $\mathrm{GL}_k(q)$ komponentenweise operiert, dann ist die induzierte Abbildung ein Gruppenisomorphismus.

Die Menge der Semi-Isometrieklassen von (n,k)-Codes ist die Bahnenmenge

$$\mathbb{F}_q^* \wr\wr_n (Gal \times S_n) \backslash\backslash \left(\mathrm{GL}_k(q) \backslash\backslash \mathbb{F}_q^{k\times n,k}\right)$$

für die Operation

$$\big((\psi;(\alpha,\pi)), \mathrm{GL}_k(q)(\Gamma)\big) \mapsto \mathrm{GL}_k(q)(\hat{\Gamma}) \quad \text{mit} \quad \hat{\Gamma}(i) = \psi(i)\alpha(\Gamma(\pi^{-1}(i))).$$

Wenn die Galoisgruppe Gal auf den Vektorräumen $\mathbb{F}_q^n$ oder $\mathbb{F}_q^{k\times n}$ komponentenweise operiert, dann ist die induzierte Abbildung ein Vektorraumisomorphismus.

Wenn die Galoisgruppe Gal auf der Gruppe $\mathrm{GL}_k(q)$ komponentenweise operiert, dann ist die induzierte Abbildung ein Gruppenisomorphismus.

Die Menge der Semi-Isometrieklassen von (n,k)-Codes ist die Bahnenmenge

$$\mathbb{F}_q^* \wr \wr_n (Gal \times S_n) \backslash\backslash \left(\mathrm{GL}_k(q) \backslash\backslash \mathbb{F}_q^{k\times n,k}\right)$$

für die Operation

$$\left((\psi;(\alpha,\pi)), \mathrm{GL}_k(q)(\Gamma)\right) \mapsto \mathrm{GL}_k(q)(\hat{\Gamma}) \quad \text{mit} \quad \hat{\Gamma}(i) = \psi(i)\alpha(\Gamma(\pi^{-1}(i))).$$

Diese ist wohldefiniert, denn für $A \in \mathrm{GL}_k(q)$ und $\tilde{\Gamma}$ definiert durch $\tilde{\Gamma}(i) := \psi(i)\alpha((A\cdot\Gamma)(\pi^{-1}(i)))$ gilt $\mathrm{GL}_k(q)(\tilde{\Gamma}) = \mathrm{GL}_k(q)(\hat{\Gamma})$, da $\tilde{\Gamma}(i) = \psi(i)\alpha(A)\cdot\alpha(\Gamma(\pi^{-1}(i)))$ und $\alpha(A) \in \mathrm{GL}_k(q)$.

Die Operationen von $\mathbb{F}_q^* \wr\wr_n (Gal \times S_n)$ und $\mathrm{GL}_k(q)$ auf $\mathbb{F}_q^{k\times n,k}$ kommutieren i.a. nicht. Für $A \in \mathrm{GL}_k(q)$, $(\psi;(\alpha,\pi)) \in \mathbb{F}_q^* \wr\wr_n (Gal \times S_n)$ und $\Gamma \in (\mathbb{F}_q^k \setminus \{0\})^n$ gilt:

$$A \cdot (\psi;(\alpha,\pi))\Gamma =$$

$$\left(\psi(0)A\cdot\alpha(\Gamma(\pi^{-1}(0))),\ldots,\psi(n-1)A\cdot\alpha(\Gamma(\pi^{-1}(n-1)))\right)$$

und

$$(\psi;(\alpha,\pi))A\cdot\Gamma =$$

$$\left(\psi(0)\alpha(A)\cdot\alpha(\Gamma(\pi^{-1}(0))),\ldots,\psi(n-1)\alpha(A)\cdot\alpha(\Gamma(\pi^{-1}(n-1)))\right).$$

Die Operationen von $\mathbb{F}_q^* \wr\wr_n (Gal \times S_n)$ und $\mathrm{GL}_k(q)$ auf $\mathbb{F}_q^{k\times n,k}$ kommutieren i.a. nicht. Für $A \in \mathrm{GL}_k(q)$, $(\psi;(\alpha,\pi)) \in \mathbb{F}_q^* \wr\wr_n (Gal \times S_n)$ und $\Gamma \in (\mathbb{F}_q^k \setminus \{0\})^n$ gilt:

$$A \cdot (\psi;(\alpha,\pi))\Gamma =$$
$$\left(\psi(0)A\cdot\alpha(\Gamma(\pi^{-1}(0))),\ldots,\psi(n-1)A\cdot\alpha(\Gamma(\pi^{-1}(n-1)))\right)$$

und

$$(\psi;(\alpha,\pi))A\cdot\Gamma =$$
$$\left(\psi(0)\alpha(A)\cdot\alpha(\Gamma(\pi^{-1}(0))),\ldots,\psi(n-1)\alpha(A)\cdot\alpha(\Gamma(\pi^{-1}(n-1)))\right).$$

Ziel: Berechnung der Anzahl der Bahnen in

$$\mathbb{F}_q^* \wr\wr_n (Gal \times S_n) \backslash\backslash \left(\mathrm{GL}_k(q) \backslash\backslash (\mathbb{F}_q^k \setminus \{0\})^n\right).$$

Das Lehmannsche Lemma und eine Verallgemeinerung

Seien ${}_GX$ und ${}_HY$ zwei Gruppenaktionen. Dann gilt für die natürliche Operation des Kranzprodukts $H \wr_X G$ auf Y^X:

1. Sei φ die Abbildung

$$\varphi\colon Y^X \to (H\backslash\backslash Y)^X : f \mapsto \varphi(f) \ \text{ mit } \ \varphi(f)(x) = H(f(x)),$$

   dann ist

$$\Phi\colon H \wr_X G\backslash\backslash Y^X \to G\backslash\backslash((H\backslash\backslash Y)^X) : H \wr_X G(f) \mapsto G(\varphi(f))$$

   eine Bijektion, wobei G auf natürliche Weise auf $(H\backslash\backslash Y)^X$ operiert.

Das Lehmannsche Lemma und eine Verallgemeinerung

Seien ${}_G X$ und ${}_H Y$ zwei Gruppenaktionen. Dann gilt für die natürliche Operation des Kranzprodukts $H \wr_X G$ auf Y^X:

1. Sei φ die Abbildung

$$\varphi\colon Y^X \to (H\backslash\backslash Y)^X : f \mapsto \varphi(f) \ \text{ mit } \ \varphi(f)(x) = H(f(x)),$$

   dann ist

$$\Phi\colon H \wr_X G\backslash\backslash Y^X \to G\backslash\backslash((H\backslash\backslash Y)^X) : H \wr_X G(f) \mapsto G(\varphi(f))$$

   eine Bijektion, wobei G auf natürliche Weise auf $(H\backslash\backslash Y)^X$ operiert.

2. Die Bahn von $f \in Y^X$ unter der Aktion von $H \wr_X G$ ist dann

$$H \wr_X G(f) = \varphi^{-1}(\Phi(H \wr_X G(f))) = \varphi^{-1}(G(\varphi(f))).$$

Anwendung dieses Lemmas liefert für die Isometrieklassen eine Bijektion zwischen

$$\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\left(\mathbb{F}_q^* \wr_n S_n\backslash\backslash(\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\})^n\right)$$

und

$$\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\left(S_n\backslash\backslash\left(\mathbb{F}_q^*\backslash\backslash\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\}\right)^n\right).$$

Hier ist $\mathbb{F}_q^*\backslash\backslash\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\}$ die $(k-1)$-dimensionale projektive Geometrie $\mathrm{PG}_{k-1}(q)$.

Anwendung dieses Lemmas liefert für die Isometrieklassen eine Bijektion zwischen

$$\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\left(\mathbb{F}_q^* \wr_n S_n\backslash\backslash(\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\})^n\right)$$

und

$$\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\left(S_n\backslash\backslash\left(\mathbb{F}_q^*\backslash\backslash\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\}\right)^n\right).$$

Hier ist $\mathbb{F}_q^*\backslash\backslash\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\}$ die $(k-1)$-dimensionale projektive Geometrie $\mathrm{PG}_{k-1}(q)$.

Wir müssen also

$$\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\left(S_n\backslash\backslash\,\mathrm{PG}_{k-1}(q)^n\right)$$

untersuchen. Dabei operiert S_n auf natürliche Weise am Definitionsbereich n.

Wie operiert $\mathrm{GL}_k(q)$ auf den Elementen von $S_n\backslash\backslash\,\mathrm{PG}_{k-1}(q)^n$?

Natürliche Aktion von $\mathrm{GL}_k(q)$ auf $\mathrm{PG}_{k-1}(q)$:

$$\mathrm{GL}_k(q) \times \mathrm{PG}_{k-1}(q) \to \mathrm{PG}_{k-1}(q) : (A, \mathbb{F}_q^*(w)) \mapsto \mathbb{F}_q^*((A \cdot w^t)^t).$$

Dies induziert eine natürliche Aktion von $\mathrm{GL}_k(q)$ auf $\mathrm{PG}_{k-1}(q)^n$ und auf $S_n \backslash\backslash \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n$.

Natürliche Aktion von $\mathrm{GL}_k(q)$ auf $\mathrm{PG}_{k-1}(q)$:

$$\mathrm{GL}_k(q) \times \mathrm{PG}_{k-1}(q) \to \mathrm{PG}_{k-1}(q) : (A, \mathbb{F}_q^*(w)) \mapsto \mathbb{F}_q^*((A \cdot w^t)^t).$$

Dies induziert eine natürliche Aktion von $\mathrm{GL}_k(q)$ auf $\mathrm{PG}_{k-1}(q)^n$ und auf $S_n \backslash\backslash \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n$.

Aus dem 2. Teil des Lehmannschen Lemmas folgt:
Sei $A \in \mathrm{GL}_k(q)$ und sei φ gegeben durch

$$\varphi\colon (\mathbb{F}_q^k \setminus \{0\})^n \to \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n : f \mapsto \varphi(f) \;\text{ mit }\; \varphi(f)(i) := \mathbb{F}_q^*(f(i)),$$

dann ist

$$\varphi\left(\mathbb{F}_q^* \wr_n S_n(Af)\right) = A(S_n(\varphi(f))), \qquad f \in (\mathbb{F}_q^k \setminus \{0\})^n.$$

Natürliche Aktion von $\mathrm{GL}_k(q)$ auf $\mathrm{PG}_{k-1}(q)$:

$$\mathrm{GL}_k(q) \times \mathrm{PG}_{k-1}(q) \to \mathrm{PG}_{k-1}(q) : (A, \mathbb{F}_q^*(w)) \mapsto \mathbb{F}_q^*((A \cdot w^t)^t).$$

Dies induziert eine natürliche Aktion von $\mathrm{GL}_k(q)$ auf $\mathrm{PG}_{k-1}(q)^n$ und auf $S_n \backslash\backslash \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n$.

Aus dem 2. Teil des Lehmannschen Lemmas folgt:
Sei $A \in \mathrm{GL}_k(q)$ und sei φ gegeben durch

$$\varphi \colon (\mathbb{F}_q^k \setminus \{0\})^n \to \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n : f \mapsto \varphi(f) \text{ mit } \varphi(f)(i) := \mathbb{F}_q^*(f(i)),$$

dann ist

$$\varphi\left(\mathbb{F}_q^* \wr_n S_n(Af)\right) = A(S_n(\varphi(f))), \qquad f \in (\mathbb{F}_q^k \setminus \{0\})^n.$$

Somit können wir die Aktion von $\mathrm{GL}_k(q) \times \mathbb{F}_q^* \wr_n S_n$ auf $(\mathbb{F}_q^k \setminus \{0\})^n$ durch die Aktion von $\mathrm{GL}_k(q) \times S_n$ auf $\mathrm{PG}_{k-1}(q)^n$ ersetzen, wobei $\mathrm{GL}_k(q)$ auf dem Bildbereich und S_n auf dem Definitionsbereich operiert.

Verallgemeinerung des Lehmannschen Lemmas, um die Situation der Semi-Isometrieklassen zu vereinfachen.

Sei φ die Abbildung

$$\varphi\colon \mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash(\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\})^n \to \mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\left(\mathbb{F}_q^*\backslash\backslash(\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\})\right)^n$$

$$\mathrm{GL}_k(q)(\Gamma)\mapsto \mathrm{GL}_k(q)(\mathbb{F}_q^*(\Gamma)) \text{ mit } \mathbb{F}_q^*(\Gamma)(i)=\mathbb{F}_q^*(\Gamma(i)),$$

dann ist

$$\begin{aligned}\Phi\colon \left(\mathbb{F}_q^*\wr\wr_n(Gal\times S_n)\right)\backslash\backslash\,\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash(\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\})^n &\to\\ (Gal\times S_n)\backslash\backslash\left(\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\left(\mathbb{F}_q^*\backslash\backslash(\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\})\right)^n\right)&\end{aligned}$$

$$\left(\mathbb{F}_q^*\wr\wr_n(Gal\times S_n)\right)(\mathrm{GL}_k(q)(\Gamma))\mapsto(Gal\times S_n)(\varphi(\mathrm{GL}_k(q)(\Gamma)))$$

eine Bijektion. $(\alpha,\pi)\,\mathrm{GL}_k(q)(\mathbb{F}_q^*(\Gamma))=\mathrm{GL}_k(q)(\mathbb{F}_q^*(\hat{\Gamma}))$ mit $\hat{\Gamma}(i)=\alpha(\Gamma(\pi^{-1}(i)))$.

Verallgemeinerung des Lehmannschen Lemmas, um die Situation der Semi-Isometrieklassen zu vereinfachen.

Sei φ die Abbildung

$$\varphi\colon \mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash(\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\})^n \to \mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\left(\mathbb{F}_q^*\backslash\backslash(\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\})\right)^n$$

$$\mathrm{GL}_k(q)(\Gamma)\mapsto \mathrm{GL}_k(q)(\mathbb{F}_q^*(\Gamma)) \text{ mit } \mathbb{F}_q^*(\Gamma)(i)=\mathbb{F}_q^*(\Gamma(i)),$$

dann ist

$$\begin{aligned}\Phi\colon \left(\mathbb{F}_q^*\wr\wr_n(Gal\times S_n)\right)\backslash\backslash\,\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash(\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\})^n \to&\\ (Gal\times S_n)\backslash\backslash\left(\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\left(\mathbb{F}_q^*\backslash\backslash(\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\})\right)^n\right)&\end{aligned}$$

$$\left(\mathbb{F}_q^*\wr\wr_n(Gal\times S_n)\right)(\mathrm{GL}_k(q)(\Gamma))\mapsto (Gal\times S_n)(\varphi(\mathrm{GL}_k(q)(\Gamma)))$$

eine Bijektion. $(\alpha,\pi)\,\mathrm{GL}_k(q)(\mathbb{F}_q^*(\Gamma))=\mathrm{GL}_k(q)(\mathbb{F}_q^*(\hat{\Gamma}))$ mit $\hat{\Gamma}(i)=\alpha(\Gamma(\pi^{-1}(i)))$. Also ist

$$\left|\left(\mathbb{F}_q^*\wr\wr_n(Gal\times S_n)\right)\backslash\backslash\,\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash(\mathbb{F}_q^k\setminus\{0\})^n\right|=$$

$$\left|(Gal\times S_n)\backslash\backslash\left(\mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\,\mathrm{PG}_{k-1}(q)^n\right)\right|.$$

Die projektiven Gruppen

1. Der Durchschnitt der Stabilisatoren aller Elemente in $\mathrm{PG}_{k-1}(q)$ unter der Aktion von $\mathrm{GL}_k(q)$ ist

$$\bigcap_{v \in \mathrm{PG}_{k-1}(q)} \mathrm{GL}_k(q)_v = \left\{\kappa \cdot I_k \;\middle|\; \kappa \in \mathbb{F}_q^*\right\} = C(\mathrm{GL}_k(q)),$$

das Zentrum von $\mathrm{GL}_k(q)$.

2. Sei ${}_GX$ eine Gruppen Aktion, dann ist

$$N := \bigcap_{x\in X} G_x$$

ein Normalteiler von G. Die induzierte Aktion der Faktorgruppe G/N auf X ist gegeben durch

$$(G/N)\times X \to X : (gN,x) \mapsto gx.$$

Für jedes $x \in X$ stimmen die Bahnen $G(x)$ und $(G/N)(x)$ überein, weshalb

$$(G/N)\backslash\backslash X = G\backslash\backslash X.$$

2. Sei ${}_GX$ eine Gruppen Aktion, dann ist

$$N := \bigcap_{x \in X} G_x$$

ein Normalteiler von G. Die induzierte Aktion der Faktorgruppe G/N auf X ist gegeben durch

$$(G/N) \times X \to X : (gN, x) \mapsto gx.$$

Für jedes $x \in X$ stimmen die Bahnen $G(x)$ und $(G/N)(x)$ überein, weshalb

$$(G/N)\backslash\backslash X = G\backslash\backslash X.$$

3. Die projektive lineare Gruppe $\mathrm{PGL}_k(q) := \mathrm{GL}_k(q)/C(\mathrm{GL}_k(q))$ operiert auf natürliche Weise auf $\mathrm{PG}_{k-1}(q)$, und

$$\mathrm{PGL}_k(q)\backslash\backslash\,\mathrm{PG}_{k-1}(q) = \mathrm{GL}_k(q)\backslash\backslash\,\mathrm{PG}_{k-1}(q).$$

Isometrieklassen – Semi-Isometrieklassen

Isometrieklassen

$$(\mathrm{PGL}_k(q) \times S_n) \backslash\backslash \, \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n$$

Isometrieklassen – Semi-Isometrieklassen

Isometrieklassen

$$(\mathrm{PGL}_k(q) \times S_n) \backslash\backslash \, \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n$$

Semi-Isometrieklassen

$$(Gal \times S_n) \backslash\backslash (\mathrm{PGL}_k(q) \backslash\backslash \, \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n) =$$

Isometrieklassen – Semi-Isometrieklassen

Isometrieklassen

$$(\mathrm{PGL}_k(q) \times S_n)\backslash\backslash\, \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n$$

Semi-Isometrieklassen

$$(Gal \times S_n)\backslash\backslash(\mathrm{PGL}_k(q)\backslash\backslash\, \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n) =$$

$$Gal\backslash\backslash\big((\mathrm{PGL}_k(q) \times S_n)\backslash\backslash\, \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n\big) =$$

Isometrieklassen – Semi-Isometrieklassen

Isometrieklassen

$$(\mathrm{PGL}_k(q) \times S_n) \backslash\backslash \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n$$

Semi-Isometrieklassen

$$(Gal \times S_n) \backslash\backslash (\mathrm{PGL}_k(q) \backslash\backslash \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n) =$$

$$Gal \backslash\backslash \left((\mathrm{PGL}_k(q) \times S_n) \backslash\backslash \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n\right) =$$
$$(\mathrm{P\Gamma L}_k(q) \times S_n) \backslash\backslash \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n\Big),$$

da

$$\alpha(\mathbb{F}_q^*(w)) = \mathbb{F}_q^*(\alpha(w)), \qquad w \in \mathbb{F}_q^k,$$

und

$$\mathrm{P\Gamma L}_k(q)(y) = \bigcup_{\alpha \in Gal} \mathrm{PGL}_k(q)(\alpha(y)), \qquad y \in \mathrm{PG}_{k-1}(q).$$

Zykelindizes – Erzeugende Funktionen

Sei ${}_HY$ eine endliche Gruppenaktion. Dann ist die erzeugende Funktion der Anzahl der $(H \times S_n)$-Bahnen auf Y^n gleich

$$\sum_{n\geq 0} |(H \times S_n)\backslash\backslash Y^n| \cdot x^n = C(H,Y)\big|_{z_i:=\sum_{j=0}^{\infty} x^{i\cdot j}}.$$

Zykelindizes – Erzeugende Funktionen

Sei ${}_HY$ eine endliche Gruppenaktion. Dann ist die erzeugende Funktion der Anzahl der $(H \times S_n)$-Bahnen auf Y^n gleich

$$\sum_{n\geq 0} |(H \times S_n)\backslash\backslash Y^n| \cdot x^n = C(H,Y)\Big|_{z_i := \sum_{j=0}^{\infty} x^{i \cdot j}}.$$

Für die Menge Y^n_{inj} der injektiven Funktionen erhält man

$$\sum_{n\geq 0} |(H \times S_n)\backslash\backslash Y^n_{\mathrm{inj}}| \cdot x^n = C(H,Y)\Big|_{z_i := 1 + x^i}.$$

Zykelindizes – Erzeugende Funktionen

Sei ${}_HY$ eine endliche Gruppenaktion. Dann ist die erzeugende Funktion der Anzahl der $(H \times S_n)$-Bahnen auf Y^n gleich

$$\sum_{n\geq 0} |(H \times S_n)\backslash\backslash Y^n| \cdot x^n = C(H,Y)\Big|_{z_i:=\sum_{j=0}^{\infty} x^{i\cdot j}}.$$

Für die Menge Y^n_{inj} der injektiven Funktionen erhält man

$$\sum_{n\geq 0} |(H \times S_n)\backslash\backslash Y^n_{\text{inj}}| \cdot x^n = C(H,Y)\Big|_{z_i:=1+x^i}.$$

Dabei ist

$$C(H,Y) := \frac{1}{|H|} \sum_{g\in H} \prod_{i=1}^{|Y|} z_i^{a_i(\bar{g})} \in \mathbb{Q}[z_1, z_2, \ldots, z_{|Y|}],$$

der Zykelindex der Aktion von H auf Y, wobei $(a_1(\bar{g}), \ldots, a_{|Y|}(\bar{g}))$ der Zykeltyp der Permutation $\bar{g}$ ist.

Sei

$$T_{nkq} := |(\mathrm{PGL}_k(q) \times S_n) \backslash\backslash \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n|$$

dann ist $T_{nkq} - T_{n,k-1,q}$ die Anzahl der Isometrieklassen von (n,k)-Codes über $\mathbb{F}_q$. Die erzeugende Funktion der T_{nkq} erhält man durch Substitution aus dem Zykelindex

$$C(\mathrm{PGL}_k(q), \mathrm{PG}_{k-1}(q)).$$

Sei

$$T_{nkq} := |(\mathrm{PGL}_k(q) \times S_n) \backslash\backslash \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n|$$

dann ist $T_{nkq} - T_{n,k-1,q}$ die Anzahl der Isometrieklassen von (n,k)-Codes über $\mathbb{F}_q$. Die erzeugende Funktion der T_{nkq} erhält man durch Substitution aus dem Zykelindex

$$C(\mathrm{PGL}_k(q), \mathrm{PG}_{k-1}(q)).$$

Sei

$$\tilde{T}_{nkq} := |(\mathrm{P\Gamma L}_k(q) \times S_n) \backslash\backslash \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n|$$

dann ist $\tilde{T}_{nkq} - \tilde{T}_{n,k-1,q}$ die Anzahl der Semi-Isometrieklassen von (n,k)-Codes über $\mathbb{F}_q$. Die erzeugende Funktion der $\tilde{T}_{nkq}$ erhält man durch Substitution aus dem Zykelindex

$$C(\mathrm{P\Gamma L}_k(q), \mathrm{PG}_{k-1}(q)).$$

Sei

$$T_{nkq} := |(\mathrm{PGL}_k(q) \times S_n) \backslash\backslash \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n|$$

dann ist $T_{nkq} - T_{n,k-1,q}$ die Anzahl der Isometrieklassen von (n,k)-Codes über $\mathbb{F}_q$. Die erzeugende Funktion der T_{nkq} erhält man durch Substitution aus dem Zykelindex

$$C(\mathrm{PGL}_k(q), \mathrm{PG}_{k-1}(q)).$$

Sei

$$\tilde{T}_{nkq} := |(\mathrm{P\Gamma L}_k(q) \times S_n) \backslash\backslash \mathrm{PG}_{k-1}(q)^n|$$

dann ist $\tilde{T}_{nkq} - \tilde{T}_{n,k-1,q}$ die Anzahl der Semi-Isometrieklassen von (n,k)-Codes über $\mathbb{F}_q$. Die erzeugende Funktion der $\tilde{T}_{nkq}$ erhält man durch Substitution aus dem Zykelindex

$$C(\mathrm{P\Gamma L}_k(q), \mathrm{PG}_{k-1}(q)).$$

Für $q = 4$ gibt es die ersten Unterschiede zwischen den Anzahlen von Isometrieklassen und Semi-Isometrieklassen linear Codes bei $n = 8$ und $k = 3$.

Inhalt