Name: .... **Matrikelnr.:** ....

Lineare Algebra II, Übungen, Sommersemester 2008

2. Klausur am 25.6.2008

Bitte markieren Sie Ihre Lehrveranstaltungsgruppe durch Ankreuzen:

Gruppe Fripertinger — Gruppe Schöpf

1. Sei $n \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ und sei $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\pi(x) := x - \langle x, v\rangle v$, wobei $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ für $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Was bedeutet π im Fall $n = 2$ geometrisch?
   (b) Zeigen Sie, dass π keine Isometrie ist und dass $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
   (c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von π.
   (d) Zeigen Sie, dass π selbst-adjungiert ist.
   (e) Beschreiben Sie alle Orthonormalbasen von $\mathbb{R}^n$, bezüglich der die Matrizendarstellungen von π Diagonalgestalt besitzen. Geben Sie eine solche Diagonalmatrix an.
2. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit innerem Produkt, wobei $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ steht, $\dim V = n$, $n \in \mathbb{N}$. Sei T ein normaler linearer Operator auf V und sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V, so dass T bezüglich dieser Basis eine Matrixdarstellung als obere Dreiecksmatrix besitzt. Zeigen Sie, dass diese Matrix sogar eine Diagonalmatrix ist.
3. Geben Sie einen linearen Operator T auf $\mathbb{C}^4$ an, dessen charakteristisches Polynom gegeben ist durch $z(z-2)^2(z+i)$, und dessen Minimalpolynom gleich $z(z-2)(z+i)$ ist. Begründen Sie ausführlich, warum das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von diesem Operator T von der geforderten Gestalt sind.
4. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit innerem Produkt, wobei $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ steht. Zeigen Sie: wenn T ein nilpotenter selbst-adjungierter Operator auf V ist, dann ist $T = 0$.

Lösung:

1. (a) Sei $x \in \mathbb{R}^2$, dann ist $\pi(x)$ die Projektion von x auf das orthogonale Komplement von $[v] = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   (b) Berechne $\pi(v) = v - \langle v, v\rangle v = v - \|v\|^2 v = v - v = 0$. Also ist $\|\pi(v)\| = 0 \neq 1 = \|v\|$, weshalb π keine Isometrie ist.

   Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig, dann ist

$$\begin{aligned}
\|\pi(x)\|^2 &= \big\langle x - \langle x, v\rangle v, x - \langle x, v\rangle v\big\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle x, v\rangle\langle v, x\rangle - \langle x, v\rangle\langle x, v\rangle + \langle x, v\rangle^2\langle v, v\rangle \\
&= \|x\|^2 - 2\langle x, v\rangle^2 + \langle x, v\rangle\|v\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \langle x, v\rangle^2 \\
&\leq \|x\|^2,
\end{aligned}$$

da $\langle x, v\rangle^2 \geq 0$.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Für $x \in [v]$ gilt $x = \mu v$ mit $\mu \neq 0$ und $\pi(x) = \mu v - \langle \mu v, v\rangle v = \mu v - \mu v = 0$. Also ist x ein Eigenvektor zum Eigenwert 0.

Für $x \in [v]^\perp$ ist $\pi(x) = x$, da $\langle x, v\rangle = 0$ ist. Also ist x ein Eigenvektor zu dem Eigenwert 1.

Es gilt $\mathbb{R}^n = [v] \oplus [v]^\perp$, mit $\dim[v]^\perp = n-1$. Sei $x = w_1 + w_2$ mit $w_1 \neq 0 \neq w_2$, $w_1 \in [v]$ und $w_2 \in [v]^\perp$, dann ist x kein Eigenvektor von π, denn $\pi(x) = \pi(w_1+w_2) = \pi(w_1)+\pi(w_2) = 0+w_2 \notin \{\mu(w_1+w_2) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$. Also sind 0 und 1 die Eigenwerte von π.

(d) Zu zeigen: $\langle \pi(x), y\rangle = \langle x, \pi(y)\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\langle \pi(x), y\rangle &= \big\langle x - \langle x, v\rangle v, y\big\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - \langle x, v\rangle\langle v, y\rangle\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\langle x, \pi(y)\rangle &= \big\langle x, y - \langle y, v\rangle v\big\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - \langle y, v\rangle\langle x, v\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - \langle x, v\rangle\langle v, y\rangle.\end{aligned}$$

Also ist π selbstadjungiert.

(e) Behauptung: Die Menge aller Orthonormalbasen von $\mathbb{R}^n$, bezüglich der die Matrizendarstellungen von π Diagonalgestalt besitzen, ist

$$\Big\{B \cup \{v\},\ B \cup \{-v\} \mid B \text{ ist eine Orthonormalbasis von } [v]^\perp\Big\}.$$

Sei B eine Orthonormalbasis von $[v]^\perp$. Dann sind die Elemente von B Eigenvektoren zum Eigenwert 1, und die Matrizendarstellung von von π eingeschränkt auf $[v]^\perp$ ist eine $(n-1)\times(n-1)$-Diagonalmatrix deren Diagonalelemente alle gleich 1 sind.

$B \cup \{v\}$ bzw. $B \cup \{-v\}$ sind dann Orthonormalbasen von $\mathbb{R}^n$, da $\|v\| = \|-v\| = 1$ und $v, -v \in [v]$.

Also sind $B \cup \{v\}$ bzw. $B \cup \{-v\}$ Orthonormalbasen von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren, und die Matrizendarstellungen von π bezüglich dieser Basen hat Diagonalgestalt

$$\operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, 0).$$

Bisher haben wir gezeigt, dass die Matrizendarstellungen von π bezüglich aller Basen der Form $B \cup \{v\}$ oder $B \cup \{-v\}$, wobei B eine Orthonormalbasis von $[v]^\perp$ ist, Diagonalgestalt besitzen.

Falls umgekehrt π bezüglich einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ Diagonalgestalt besitzt, so müssen die Basiselemente Eigenvektoren von π sein. Sie liegen also in $[v]$ oder $[v]^\perp$. Die einzigen Vektoren der Länge 1 in $[v]$ sind v und $-v$. Die Basiselemente, die in $[v]^\perp$ liegen, bilden eine Orthonormalbasis von $[v]^\perp$. Also ist jede Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, bezüglich der die Matrixdarstellung von π Diagonalgestalt besitzt, von der Form $B \cup \{v\}$ oder $B \cup \{-v\}$, wobei B eine Orthonormalbasis von $[v]^\perp$ ist.

2. Sei die Matrixdarstellung von T gegeben durch

$$M := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Da T normal ist, ist T mit T^* vertauschbar, d.h. $MM^* = M^*M$. Sei $MM^* = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ und $M^*M = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Dann ist $b_{ii} = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\overline{a_{ij}}$ und $c_{ii} = \sum_{j=1}^{i} \overline{a_{ji}}a_{ji}$ für $1 \leq i \leq n$. Aus $b_{11} = c_{11}$ folgt

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|^2 = |a_{11}|^2.$$

Deshalb ist $\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|^2 = 0$, woraus $a_{1j} = 0$ folgt für $2 \leq j \leq n$. Nun folgt daraus zusammen mit $b_{22} = c_{22}$, dass

$$\sum_{j=2}^{n} |a_{2j}|^2 = \sum_{j=1}^{2} |a_{j2}|^2 = |a_{22}|^2,$$

woraus dann $a_{2j} = 0$ folgt für $3 \leq j \leq n$. Analog zeigt man dann zeilenweise, dass $a_{ij} = 0$ für $3 \leq i \leq n$ und $i+1 \leq j \leq n$.

3. Sei T der Operator

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Da dieser Operator durch eine Diagonalmatrix (wir nennen sie M) gegeben ist, sind seine Eigenwerte in der Diagonale als $0, 2$ und $-i$ ablesbar, und das charakteristische Polynom von T ist $z(z-2)^2(z+i)$, da der Eigenwert 2 zweimal auftritt.

Es bleibt zu zeigen, dass das Minimalpolynom dieses Operators gleich $z(z-2)(z+i)$ ist. Dazu berechnen wir $M \cdot (M - 2I_4) \cdot (M + iI_4) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da das Produkt von Diagonalmatrizen wieder eine Diagonalmatrix ist, wobei jeweils die Elemente, die in der j-ten Diagonalposition stehen, miteinander multipliziert werden müssen. Das zeigt, dass das Minimalpolynom von T ein Teiler von $z(z-2)(z+i)$ ist. Da dieses Polynom normiert ist, und jeden Eigenwert von T genau einmal als Nullstelle besitzt, ist dieses Polynom das Minimalpolynom von T.

4. Da T nilpotent ist, sind alle Eigenwerte von T gleich 0. Da T selbst-adjungiert ist, gibt es nach dem Spektraltheorem eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von T. Bezüglich dieser Basis besitzt T Diagonalgestalt, wobei in der Diagonale die Eigenwerte (also 0) stehen. Also ist diese Diagonalmatrix die 0-Matrix und T der 0-Operator.

   2. Lösung: Da T selbst-adjungiert ist, ist T auch normal, also ist $\ker T = \ker T^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da T nilpotent ist, ist $\ker T^{\dim V} = V$, also $\ker T = V$, d.h. $T = 0$.