Lineare Algebra II, Übungen, Sommersemester 2008
9. Übungsblatt, für den 28.5.2008

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit innerem Produkt, wobei $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ steht.

1. Sei T ein linearer Operator auf V. Zeigen Sie:

$$\dim \ker T = \dim \ker T^*, \qquad \dim T(V) = \dim T^*(V).$$

2. Sei T ein positiver linearer Operator auf V. Zeigen Sie, dass T^k positiv ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

3. Sei U ein Unterraum von V. (Dann besitzt V die Darstellung als $U \oplus U^\perp$. Sei P_U die orthogonale Projektion auf U, d.h. falls $V \ni v = u + u'$ mit $u \in U$ und $u' \in U^\perp$, dann ist $P_U(v) := u$.) Zeigen Sie, dass P_U ein positiver Operator ist.

4. Zeigen Sie, dass die Identität auf $\mathbb{K}^2$ unendlich viele Quadratwurzeln besitzt.

5. Sei T der lineare Operator auf $\mathbb{K}^3$ gegeben durch $T(x, y, z) = (z, 2x, 3y)$. Bestimmen Sie die Isometrie S des $\mathbb{K}^3$, sodass $T = S\sqrt{T^*T}$.

6. Sei S ein linearer Operator auf dem n-dimensionalen Vektorraum V. Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel zur Aussage: Falls es eine Orthonormalbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ von V gibt, sodass $\|Se_i\| = 1$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$, dann ist S eine Isometrie.

7. Seien $k < n$ zwei natürliche Zahlen. Berechnen Sie das Produkt $MN^\top$ der zwei Blockmatrizen $M = (I_k, A)$, $N = (-A^\top, I_{n-k})$, wobei I_r die r-zeilige Einheitsmatrix ist ($r \in \mathbb{N}$) und A eine $k \times (n-k)$-Matrix ist.