Lineare Algebra II, Übungen, Sommersemester 2008
6. Übungsblatt, für den 23.4.2008

1. Sei I das Intervall $[a, b]$ für zwei reelle Zahlen $a < b$, und sei $\mathcal{C}(I)$ die Menge aller stetigen Funktionen von I nach $\mathbb{R}$. Auf $\mathcal{C}(I)$ sei eine innere Verknüpfung gegeben durch:

$$+\colon \mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I), \qquad (f, g) \mapsto f + g, \quad (f + g)(r) := f(r) + g(r),\ r \in I$$

und eine Multiplilkation mit Skalaren aus $\mathbb{R}$:

$$\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I), \qquad (s, f) \mapsto s \cdot f, \quad (s \cdot f)(r) := s \cdot f(r),\ r \in I.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{C}(I)$ ist mit diesen Verknüpfungen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) Durch

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(r)g(r)\,dr, \qquad f, g \in \mathcal{C}(I)$$

ist ein inneres Produkt auf $\mathcal{C}(I)$ gegeben.

(c) Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $p_k\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $r \mapsto r^k$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $P_n(I)$ aller Polynomabbildungen von I nach $\mathbb{R}$, deren Grad $\leq n$ ist, ein $(n + 1)$-dimensionaler Unterraum von $\mathcal{C}(I)$ ist, und beweisen Sie, dass $\{p_0, \ldots, p_n\}$ eine Basis von $P_n(I)$ ist.

Hinweis zu (b): Führen Sie den Beweis in folgender Reihenfolge: Warum existiert das Integral $\langle f, g\rangle$? Weisen Sie die Bilinearität und dann die positive Definitheit von $\langle\cdot, \cdot\rangle$ nach. Wenn $f \in \mathcal{C}(I)$ ungleich Null ist, warum ist dann $\langle f, f\rangle > 0$?

2. Sei $I = [-\pi, \pi]$. Ausgehend von der Basis $\{1, x, \ldots, x^3\}$ von $P_3(I)$ bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $P_3(I)$. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\tilde{\sigma}$ von $\sigma := \sin|_I \in \mathcal{C}(I)$ auf $P_3(I)$ und zeichnen Sie die Graphen von σ, $\tilde{\sigma}$ und des Taylorpolynoms von σ vom Grad 3.

3. **Fakultativ:** Sei $I = [-1, 1]$. Die Legendre-Polynome $(L_k)_{k\geq 0}$ sind gegeben durch

$$L_k(x) := \frac{1}{2^k k!}\,\frac{d^k}{dx^k}\left((x^2 - 1)^k\right), \qquad k \geq 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $L_k(x)$ ein Polynom vom Grad k ist.

(b) In $\mathcal{C}(I)$ sind für $k \neq \ell$ die Polynome L_k und L_ℓ orthogonal.

(c) Beweisen Sie: In $\mathcal{C}(I)$ gilt $\|L_k\|^2 = 2/(2k + 1)$, $k \geq 0$.

(d) Ausgehend von der Standardbasis bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $P_5(I)$. Welche Beziehung besteht zwischen dem Legendre-Polynom L_k und dem entsprechenden Element der Orthonormalbasis für $k \leq 5$?

Hinweis: Zu (b): Falls $k < \ell$ ist, genügen $k + 1$ partielle Integrationen, um das innere Produkt $\langle L_k, L_\ell\rangle$ zu bestimmen.
Zu (c): Sie sollten k Mal partiell integrieren, um bei einem Faktor unter dem Integral den Operator d/dx zu eliminieren, und dann k Mal partiell integrieren, um das verbleibende Integral zu bestimmen.