Lineare Algebra II, Übungen, Sommersemester 2008
4. Übungsblatt, für den 9.4.2008

1. Sei n eine positive ganze Zahl, und sei $ODM(n, \mathbb{K})$ die Menge der oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen über einem Körper $\mathbb{K}$. Mit A, B und C bezeichnen wir Matrizen aus $ODM(n, \mathbb{K})$, mit a_{ij}, b_{ij} und c_{ij} die Komponenten dieser Matrizen für $1 \leq i, j \leq n$.

   (a) Zeigen Sie, dass $ODM(n, \mathbb{K})$ bezüglich der Matrizenmultiplikation abgeschlossen ist.

   (b) Seien $A, B \in ODM(n, \mathbb{K})$ und $C = AB$. Zeigen Sie, dass $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ ist für alle $i = 1, \ldots, n$.

   (c) Zeigen Sie, dass die invertierbaren Matrizen in $ODM(n, \mathbb{K})$ eine Gruppe bilden und die Diagonalelemente von A^{-1} die Reziprokwerte der Diagonalelemente von A sind.

   Hinweis: Falls $A \in ODM(n, \mathbb{K})$ invertierbar ist, gibt es eine Matrix $A^{-1} = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, so dass $A \cdot A^{-1}$ die Einheitsmatrix ist. Bestimmen Sie die x_{ij} aus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

   und folgern sie daraus, dass A^{-1} ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix ist.

   (d) Zeigen Sie, dass es zu jeder Matrix $A \in ODM(n, \mathbb{K})$ eine aufsteigende Folge von n Stück A-invarianten Unterräumen gibt.

2. Seien S und T zwei lineare Operatoren auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V, wobei S invertierbar ist, und sei f ein Polynom über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie:

$$f(S \circ T \circ S^{-1}) = S \circ f(T) \circ S^{-1}.$$

3. Seien S und T zwei lineare Operatoren auf dem endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Zeigen Sie, dass $S \circ T$ und $T \circ S$ die gleichen Eigenwerte besitzen.

   Hinweis: Für Eigenwerte $\neq 0$ ist der Beweis einfach. Der Eigenwert 0 erfordert eine eigene Überlegung.