Lineare Algebra II, Übungen, Sommersemester 2008
11. Übungsblatt, für den 11.6.2008

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, wobei $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ steht.

1. Sei $m \in \mathbb{N}$, $v \in V \setminus \{0\}$, T ein linearer Operator auf V, $T^{m-1}v \neq 0$ und $T^m v = 0$. Zeigen Sie, dass die Vektoren v, Tv, $\ldots$, $T^{m-1}v$ linear unabhängig sind.

2. Seien S und T lineare Operatoren auf V. Beweisen Sie:
   (a) Falls ST nilpotent ist, dann ist auch TS nilpotent.
   (b) Falls S nilpotent ist und $ST = TS$, dann ist auch TS nilpotent.
   (c) Falls S und T nilpotent sind und $ST = TS$, dann ist $S + T$ nilpotent.

3. Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, und $A - I_n$ sei nilpotent. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und bestimmen Sie A^{-1}.

4. Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix über $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Welche Eigenwerte kann A besitzen?
   (b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.
   (c) Bestimmen Sie die Menge aller diagonalisierbaren nilpotenten $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$.
   (d) Geben Sie eine nilpotente Matrix vom Rang 3 an.

5. Zeigen Sie, dass es nilpotente Matrizen A und B gibt, sodass zugleich $A+B$ und AB nicht nilpotent sind.

6. Bestimmen Sie alle verallgemeinerten Eigenvektoren der Operatoren S und T auf $\mathbb{C}^2$ gegeben durch $S(x, y) := (y, 0)$ und $T(x, y) := (-y, x)$ für $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

7. Betrachten Sie den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ mit dem inneren Produkt $\langle v, w\rangle = v\overline{w}$, für $v, w \in \mathbb{C}$.

   Bestimmen Sie
   (a) alle Basen von $\mathbb{C}$,
   (b) alle Orthonormalbasen von $\mathbb{C}$,
   (c) alle linearen Operatoren auf $\mathbb{C}$ also die Menge $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ (mit genauer Herleitung),
   (d) alle invertierbaren Operatoren auf $\mathbb{C}$,
   (e) alle selbstadjungierten Operatoren auf $\mathbb{C}$,
   (f) alle normalen Operatoren auf $\mathbb{C}$,
   (g) alle positiven Operatoren auf $\mathbb{C}$,
   (h) alle Isometrien auf $\mathbb{C}$,
   (i) alle diagonalisierbaren Operatoren auf $\mathbb{C}$,
   (j) alle trigonalisierbaren Operatoren auf $\mathbb{C}$,
   (k) alle nilpotenten Operatoren auf $\mathbb{C}$.

   Sei T ein linearer Operator auf $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie
   (l) alle Eigenwerte von T,
   (m) das charakteristische Polynom von T,
   (n) alle Operatoren auf $\mathbb{C}$, die ähnlich zu T sind,
   (o) alle Operatoren, mit denen T vertauschbar ist,
   (p) die Menge aller Operatoren auf $\mathbb{C}$, die mit allen Operatoren vertauschbar sind.

   (q) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ ein zu $\mathbb{C}$ isomorpher Vektorraum ist, geben Sie einen Isomorphismus an, bestimmen Sie $\dim \mathcal{L}(\mathbb{C})$ und beantworten Sie die Fragen (a)–(p) für $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ anstelle von $\mathbb{C}$.