Name: .... **Matrikelnr.:** ....

ÜBUNGEN ZUR HÖHEREN MATHEMATIK 3 WS 2007

Klausur, 28. 1. 2008

1. Sei $\gamma\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ die Astroide $\gamma(t) := (3\cos^3 t, 3\sin^3 t)$. Berechnen sie, überall wo es möglich ist, den Mittelpunkt $M(t)$ des Krümmungskreises von γ im Punkt $\gamma(t)$.

2. Ein geheizter Raum von 1000m^3 Rauminhalt habe die Form eines Quaders der Länge ℓ, Breite b und Höhe h. Wie sind unter den folgenden Annahmen die Maße des Raumes zu wählen, so dass der Wärmeverlust minimal wird?

   Der Wärmeverlust ist abhängig von der Fläche der Wand (gemessen in m^2) und von der Temperaturdifferenz zwischen Innen und Außen (gemessen in K). Er wird in $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ also in Watt pro Quadratmeter pro Kelvin angegeben. Im Raum herrsche überall die selbe Innentemperatur, außerhalb des Raumes überall eine konstante Außentemperatur. Der Boden sei so gut isoliert, dass es dort zu keinen Wärmeverlusten kommt. An den Seitenwänden betrage der Wärmeverlust $0.3\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ an der Decke $0.5\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$.

3. Genau eine der beiden folgenden Funktionen ist der Gradient von Funktionen von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$. Welche? Bestimmen sie alle Funktionen, deren Gradient durch diese Funktion gegeben ist.

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2} + \cos(y-x) + x\sin(y-x) \\ \dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2} - x\sin(y-x) + 15y^2 \end{pmatrix} \qquad G(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} + \cos(y-x) + x\sin(y-x) \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} + x\sin(y-x) - 15y^2 \end{pmatrix}$$

4. Bestimmen sie Parametrisierungen der zwei Kurven in $(0,\infty) \times \mathbb{R}$, die implizit durch $(\ln x)^2 + (y^2 + 4y - 3)^2 = 1$ gegeben sind.

5. Bestimmen sie die Punkte auf der Ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$, die von der Geraden $x + y = 2$ den geringsten bzw. größten Abstand haben. Hinweis: Berechnen sie zuerst den Normalabstand zwischen einem beliebigen Punkt (x, y) und der Geraden, und optimieren sie dann diesen Abstand unter der Nebenbedingung, dass (x, y) auf der Ellipse liegt. (Es ist hilfreich zu zeigen, dass sich die Ellipse und Gerade nicht schneiden.)

6. Ein Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ wird durch die drei Koordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ und eine Fläche F begrenzt (siehe Skizze). Die Fläche F ist wie folgt definiert. Im ersten Quadranten der x-z Ebene und im ersten Quadranten der y-z Ebene werden jeweils zwei Viertelkreise mit Radius 1 und Mittelpunkt im Koordinatenursprung eingezeichnet. Je zwei Punkte auf den beiden Viertelkreisen mit gleicher z-Koordinate werden durch eine gerade Strecke verbunden. Die Vereinigung all dieser Strecken gibt die Fläche F. Berechnen sie das Volumen des Körpers K. Beachten sie, dass die Schnittflächen des Körpers mit den Ebenen $z = \text{const.}$ Dreiecke sind.