Höhere Mathematik III, Übungen, Wintersemester 2007
7. Übungsblatt, vom 19. 11. 2007

Die Übungsbeispiele dienen zur Vorbereitung auf die folgenden Übungseinheiten, wo ähnliche Beispiele gerechnet werden.

1. Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ zwei differenzierbare Funktionen gegeben durch

$$f(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(y_1,\dots,y_m) = \begin{pmatrix} g_1(y_1,\dots,y_m) \\ \vdots \\ g_\ell(y_1,\dots,y_m) \end{pmatrix}.$$

   Dann ist $h := g \circ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ ebenfalls differenzierbar.

   Wie sehen die ℓ Komponenten von h aus? Wie kann die Ableitung von h im Punkt $x^{(0)} = (x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$ unter Verwendung der Ableitungen von f und g geschrieben werden?

2. Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (2\cos t, \sin t)$, und $g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 1/(x^2+y^2)$, zwei Funktionen. Berechnen Sie auf zwei verschiedene Weisen die Ableitung von $h := g \circ f$ im Punkt $t_0 \in \mathbb{R}$.

3. Gegeben seien zwei Funktionen $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Ableitung von $h := f \circ g$ im Punkt $(0,1)$ auf zwei verschiedene Weisen:

   a) $f(x,y) = x \ln y$, $g(x,y) = \begin{pmatrix} 3x - y \\ x^2 + y^2 + 1 \end{pmatrix}$

   b) $f(x,y) = x^2\sqrt{y}$, $g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^2 - y^3 \\ x + 4y \end{pmatrix}$.