Höhere Mathematik III, Übungen, Wintersemester 2007
4. Übungsblatt, vom 29. 10. 2007

Die Übungsbeispiele dienen zur Vorbereitung auf die folgenden Übungseinheiten, wo ähnliche Beispiele gerechnet werden.

1. Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve $\gamma(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$.

2. Bestimmen Sie die Funktion $F(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, $x \in \mathbb{R}$, so, dass die Kurve $(x, F(x))$ die Eigenschaften besitzt.

   (a) Sie verbindet die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$.

   (b) In $(0, 0)$ hat sie die Steigung 0, in $(1, 1)$ die Steigung 1.

   (c) In $(0, 0)$ und $(1, 1)$ ist ihre Krümmung gleich 0.

3. Finden Sie die Punkte der Kurve $\gamma(t) = (5 \cos t, 3 \sin t)$, wo die Krümmung maximal wird. Bestimmen Sie in diesen Punkten den Krümmungskreis.

Weitere Beispiele um Ihre Fertigkeit zu fördern:

4. Bestimmen Sie die Krümmung und den Krümmungskreis der Kurve

$$\gamma(t) = (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$$

   im Punkt $(3/2, 3/2)$.

5. Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve

$$\gamma(t) = (a \sin(2t), b \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

   wobei $a, b > 0$ feste Parameter sind. Wenn man bei der Berechnung der Krümmung in $\mathbb{R}^2$ im Zähler die Betragsstriche weglässt, dann spricht man von der orientierten Krümmung. Wo ist diese positiv, wo ist diese negativ? Was passiert, wenn man anstelle von γ die Kurve $\sigma(t) := \gamma(2\pi - t)$, $t \in [0, 2\pi]$, betrachtet?

6. Berechnen Sie die Krümmung der Kurve, die in Polarkoordinaten gegeben ist durch $r(\phi) := 1+\sin \phi$ für $\phi \in [0, 2\pi]$.