Höhere Mathematik III, Übungen, Wintersemester 2007
10. Übungsblatt, vom 10. 12. 2007

Die Übungsbeispiele dienen zur Vorbereitung auf die folgenden Übungseinheiten, wo ähnliche Beispiele gerechnet werden.

1. Bestimmen Sie alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die gilt:
   a) $\nabla f = \begin{pmatrix} \cos x \, \cos y \\ -\sin x \, \sin y \end{pmatrix}$, b) $\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 10y \end{pmatrix}$, c) $\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2y - \cos x \\ x^3 + \frac{1}{y} \end{pmatrix}$.

2. Bestimmen Sie eine Koordinatentransformation von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, die das Viereck, das von den Geraden $x - 2y = 0$, $x - 2y = -4$, $x + y = 4$ und $x + y = 1$ eingeschlossen wird, auf ein Quadrat abbildet.

3. Bestimmen Sie eine Koordinatentransformation von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, die die Ellipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in \mathbb{R},\ ab \neq 0,$$
   auf einen Kreis abbildet.

4. a) Was bewirkt die Koordinatentransformation $v \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v$ des $\mathbb{R}^3$ für $\alpha \in [0, 2\pi)$?
   Beschreiben Sie die Rotationen des $\mathbb{R}^3$ um die drei Koordinatenachsen.
   b) Was bewirken die folgenden Transformationen des $\mathbb{R}^3$?
$$v \mapsto \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v, \qquad v \mapsto \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot v, \qquad v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v.$$
   c) Beschreiben Sie die Koordinatentransformation von $\mathbb{R}^3$, die die Zentralspiegelung des Würfels beschreibt, der von den folgenden Eckpunkten aufgespannt wird:
$$(0,0,0), \quad (2,0,0), \quad (0,2,0), \quad (0,0,2).$$

5. Wir betrachten die Koordinatentransformation
$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$
   als Abbildung $\mathbf{f}\colon U \to V$ mit $U = (0,\infty)\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(\xi,0) \mid \xi \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die inverse Koordinatentransformation $\mathbf{g} = \mathbf{f}^{-1}\colon V \to U$, das heißt, lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ im angegebenen Bildbereich nach x und y auf.

6. Für die Koordinatentransformation $\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ aus Beispiel 5 fertigen Sie eine Skizze der Koordinatenlinien $f_1(x,y) = \text{const.}$ und $f_2(x,y) = \text{const.}$ in der (x,y)-Ebene an. Bestimmen Sie den Winkel unter dem sich die beiden Koordinatenlinien $f_1(x,y) = c_1 = f_1(x_0,y_0)$ und $f_2(x,y) = c_2 = f_2(x_0,y_0)$ in einem beliebigen Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ schneiden. Hinweis: Den Winkel unter dem sich zwei Kurven schneiden kann man als den Winkel zwischen zwei *Tangential*vektoren der beiden Kurven oder als den Winkel zwischen zwei *Normal*vektoren auf die beiden Kurven bestimmen. Überlegen Sie, welche Variante für die implizit gegebenen Kurven $f_1(x,y) = c_1$ und $f_2(x,y) = c_2$ günstiger ist.

   Skizzieren Sie die Koordinatenlinien $t \mapsto \gamma_1(t) = \mathbf{f}(x_0 + t, y_0)$ und $s \mapsto \gamma_2(s) = \mathbf{f}(x_0, y_0 + s)$ in der (ξ,η)-Ebene. Die Koordinatenlinien sind die Bilder von Geraden (Gitterlinien) parallel zur x- oder parallel zur y-Achse unter der Abbildung $\mathbf{f}$. Bestimmen Sie den Winkel unter dem sich zwei Koordinatenlinien γ_1 und γ_2 für die Parameterwerte $t = s = 0$ schneiden. Versuchen Sie für beide Skizzen eine möglichst vollständige Klassifikation der geometrischen Lage der Koordinatenlinien anzugeben.