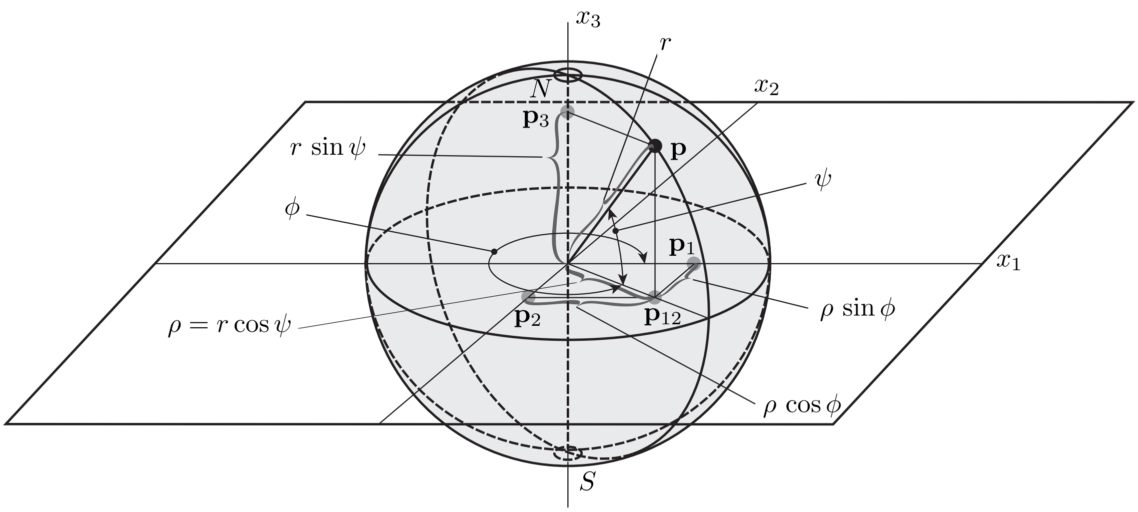
Höhere Mathematik III, Übungen, Wintersemester 2007
1. Übungsblatt, Beispiel 5

Notation: Vektoren im $\mathbb{R}^3$ werden mit Fettbuchstaben, Skalare werden nichtfett kursiv geschrieben. Wir bezeichnen eine Punkt auf der Bahnkurve der Bewegung mit $\mathbf{x}(t)$ wobei t (der Kurvenparameter) die physikalische Zeit ist. Laut Angabe ist $\mathbf{x}(0) = (r, 0, 0)^t$. Punkte auf der Kugel können durch Angabe ihres Längenwinkels ϕ und ihres Breitenwinkels ψ beschrieben werden. Für einen beliebigen Punkt $\mathbf{p}$ auf der Kugel betrachten, können wir die Projektion $\mathbf{p}_{12}$ auf die x_1-x_2 Ebene betrachten. Den Abstand des projizierten Punktes vom Ursprung bezeichnen wir mit ρ. Aus der Zeichnung ergibt sich $\rho = r\cos\psi$. Durch Projektion von $\mathbf{p}_{12}$ auf die x_1- und x_2-Achsen erhalten wir die Punkte $\mathbf{p}_1$ bzw. $\mathbf{p}_2$ mit den Koordinaten $(\rho\cos\phi, 0, 0)^t = (r\cos\psi\cos\phi, 0, 0)^t$ und $(0, \rho\sin\phi, 0)^t = (0, r\cos\psi\sin\phi, 0)^t$. Für die Projektion auf die x_3-Achse bekommen wir $\mathbf{p}_3 = (0, 0, r\sin\psi)$. Die Formeln sind, wie man aus der Zeichnung sieht, sinnvoll für $\phi \in [0, 2\pi)$ und $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Man sieht sofort, aufgrund der Periodizität der Trigonometrischen Funktionen, dass die Darstellung für jedes $\phi \in \mathbb{R}$ sinnvoll ist, wobei Winkel, die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, den gleichen Punkt darstellen. Es ist sinnvoll, den Gültigkeitsbereich der Darstellung durch Längen- und Breitenwinkel auf Breitenwinkel $\psi \in [-\pi, \pi)$ zu erweitern. Für $\psi \in (\pi/2, \pi) \cup [-\pi, -\pi/2)$ wurde die Darstellung "über die Pole hinaus" erweitert. Man erhält den durch einen solchen Breitenwinkel bezeicheten Punkt indem man den Punkt für den entsprechenden Breitenwinkel $\tilde{\psi}$ "diesseits des Pols" mit $\tilde{\psi} = \pi - \psi$ (für $\psi \in (\pi/2, \pi)$) bzw. $\tilde{\psi} = -\pi - \psi$ (für $\psi \in [-\pi, -\pi/2)$) zentral an der x_3-Achse spiegelt. Durch die Periodizität der Winkelfunktionen kann man nun wieder für jeden Winkel $\psi \in \mathbb{R}$ einen Punkt auf der Kugeloberfläche finden, wobei wieder Punkte gleich sind, deren Breitenwinkel sich um ein Vielfaches von 2π unterscheidet.



Wenn wir gemäß der Angabe für die Längenwinkel und Breitenwinkel $\phi = \omega\, t$ und $\psi = \alpha\, t$ einsetzen bekommen wir

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha t\cos\omega t \\ r\cos\alpha t\sin\omega t \\ r\sin\alpha t \end{pmatrix}$$

als Parametrisierung der Bahnkurve der Bewegung. Zweimalige Differentiation gibt

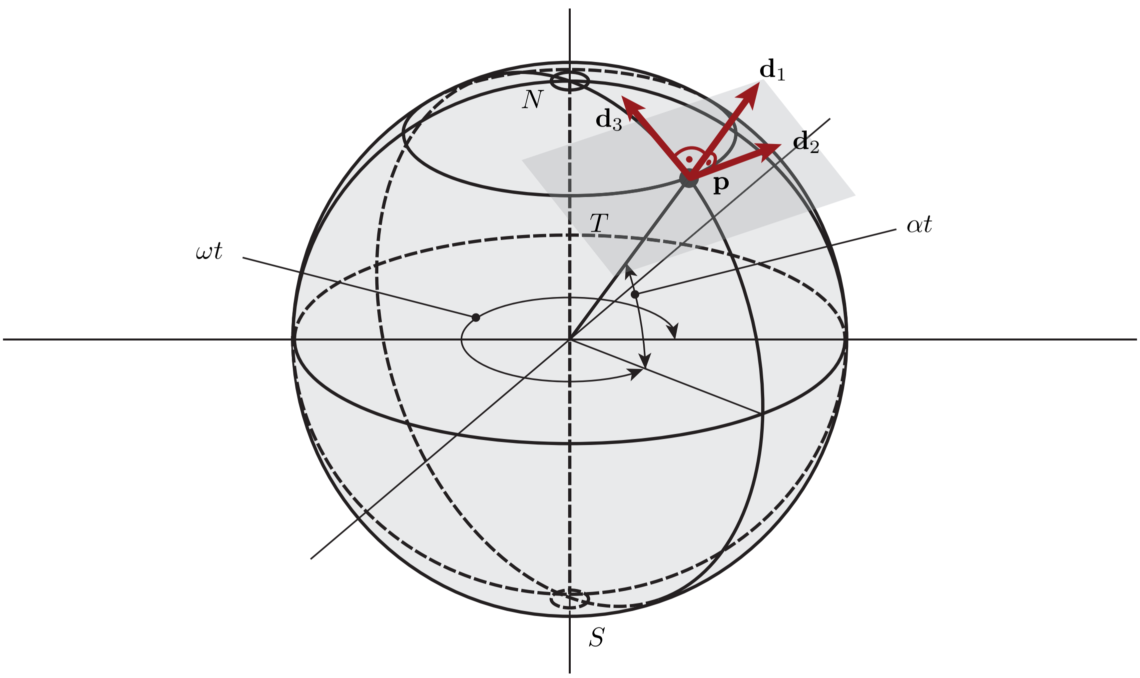
$$\mathbf{x}'(t) = r\begin{pmatrix} -\alpha\sin\alpha t\cos\omega t - \omega\cos\alpha t\sin\omega t) \\ -\alpha\sin\alpha t\sin\omega t + \omega\cos\alpha t\cos\omega t \\ \alpha\cos\alpha t \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{x}''(t) = r \begin{pmatrix} -(\alpha^2+\omega^2)\,\cos\alpha t\,\cos\omega t + 2\alpha\omega\sin\alpha t\,\sin\omega t \\ -(\alpha^2+\omega^2)\,\cos\alpha t\,\sin\omega t - 2\alpha\omega\sin\alpha t\,\cos\omega t \\ -\alpha^2\,\sin\alpha t \end{pmatrix}.$$

Wir führen nun ein (bewegliches, an jeden Punkt der Bahnkurve "angeheftetes") orthonormales Koordinatensystem ein. Die Basisvektoren des Koordinatensystems im Punkt $\mathbf{x}(t)$ sind gegeben durch $\mathbf{d}_1 = \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} = (\cos\alpha t\,\cos\omega t, \cos\alpha t\,\sin\omega t, \sin\alpha t)^t$ (d.h. der Basisvektor in radialer Richtung, vom Kugelmittelpunkt weg zeigend), $\mathbf{d}_2 = (-\sin\omega t, \cos\omega t, 0)^t$ (d.h. der Basisvektor tangential zur Kugeloberfläche und parallel zum Breitenkreis) und

$$\mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha t\,\cos\omega t \\ \cos\alpha t\,\sin\omega t \\ \sin\alpha t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha t\,\cos\omega t \\ -\sin\alpha t\,\sin\omega t \\ \cos\alpha t \end{pmatrix}$$



Wir projizieren jetzt die zweite Ableitung auf die drei Basisvektoren d_1, d_2 und d_2. Dazu berechnen wir die inneren Produkte $\langle \mathbf{x}'', \mathbf{d}_i \rangle$ für $i = 1, 2, 3$. Wir erhalten

$$\langle \mathbf{x}'', \mathbf{d}_1 \rangle = -r\left((\alpha^2+\omega^2)\cos^2\alpha t + \alpha^2\right)\sin^2\alpha t = -r\,(\alpha^2+\omega^2\,\cos^2\alpha t) = -r\left(\alpha^2 + \frac{\omega^2}{2}(1+\cos 2\alpha t)\right),$$

$$\langle \mathbf{x}'', \mathbf{d}_2 \rangle = -2r\alpha\omega\,\sin\alpha t$$

und

$$\langle \mathbf{x}'', \mathbf{d}_3 \rangle = r\big((\alpha^2+\omega^2)\sin\alpha t\,\cos\alpha t - \alpha^2\sin\alpha t\,\cos\alpha t\big) = r\omega^2\sin\alpha t\,\cos\alpha t = \frac{r\omega^2}{2}\sin 2\alpha t.$$

Hier wurde ziemlich oft die Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ für $x = \alpha t$ bzw. $x = \omega t$ verwendet. Zum umwandeln der trigonometrischen Funktionen mit Frequenz $\alpha/2\pi$ auf die doppelte Frequenz α/π haben wir die trigonometrischen Additionstheoreme verwendet. Wir erhalten also die Darstellung des Beschleunigungsvektor in Bezug auf die Basis $[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3]$:

$$\mathbf{x}''(t) = -r\left(\alpha^2 + \frac{\omega^2}{2}(1+\cos 2\alpha t)\right)\mathbf{d}_1 - \big(2r\alpha\omega\,\sin\alpha t\big)\,\mathbf{d}_2 + \frac{r\omega^2}{2}(\sin 2\alpha t)\,\mathbf{d}_3.$$

Physikalische Interpretation: Wenn wir nach dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetz das Produkt aus Masse mal Beschleunigungsvektor der notwendigerweise wirkenden Kraft gleichsetzen, dann entspricht der Kraftanteil in $\mathbf{d}_1$-Richtung einer Kraft die das Teilchen auf der Kugeloberfläche festhält und verhindert, dass das Teilchen normal zur Kugeloberfäche wegfliegt. Diese Zentripedalkraft hat einen Anteil der einer gleichförmigen Drehbewegung entlang des Meridians entspricht $(-r\alpha^2)$ und einer Drehbewegung entlang eines Breitkreises mit variablem Radius $(-r\frac{\omega^2}{2}(1+\cos 2\alpha t))$. Der zweite Anteil verschwindet an den Polen und ist maximal am Äquator. Der $\mathbf{d}_3$-Anteil entspricht einer Kraft, die verhindert, dass das Teilchen *auf der Kugeloberfläche* durch die Fliehkraft zum Äquator zurückgetrieben wird. Dieser Anteil verschwindet am Äquator und an den Polen (d.h. für $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$). Der Anteil der Kraft in $\mathbf{d}_2$-Richtung schließlich ist notwendig um das Teilchen exakt auf Kurs in Richtung des Pols zu halten. Wenn diese Kraft nicht wirkte, würde das Teichen von der Bewegung entlang des Meridian abgelenkt werden. Diesen Anteil nennt man *Corioliskraft.* Sie verschwindet am Äquator und ist an den Polen maximal. Sie wirkt für die Teile der Bahnkurve jeweils vom Äquator zum nächsten Pol der Drehbewegung am Breitenkreis *entgegen* und für die Teile der Bahnkurve vom Pol zum Äquator *in* Richtung der Drehbewegung. Für die Bewegung zum Pol hin wird der Radius des Breitenkreises kleiner, das heißt, die Tangentialgeschwindigkeit der Rotation um die Polachse wird kleiner. Das Teilchen muss also in seiner Bewegung entlang des Breitenkreises *abgebremst* werden. Deshalb wirkt die Corioliskraft auf diesem Teil der Bahnkurve der Bewegung entgegen. Auf dem Teil der Bahnkurve vom Pol zum Äquator nimmt das Teilchen in Richtung des Breitenkreises wieder Fahrt auf, eine Kraft zur *Beschleunigung* in Bewegungsrichtung entlang des Breitenkreises ist also notwendig.