

LINEARE ALGEBRA I**Hausaufgaben** (Bearbeitung bis 26.11.2008)**H 7.1** Bild eines linearen OperatorsBestimmen Sie die Dimension des Bildes $\text{range } T$ von $T : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^3$,

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 9x_4 \\ 5x_1 - 12x_2 - 2x_3 - 9x_4 \end{pmatrix}.$$

H 7.2 Lösen linearer Gleichungssysteme

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{lcl} \begin{array}{rcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 = -1 \\ 6x_1 & +x_2 & +x_3 = -4 \\ (a) \quad 2x_1 & -3x_2 & -x_3 = 0 \\ -x_1 & -7x_2 & -2x_3 = 1 \\ x_1 & -x_2 & = 1 \end{array} & , & \begin{array}{rcl} x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +3x_4 = 9 \\ 3x_1 & +9x_2 & -2x_3 & -11x_4 = -3 \\ (b) \quad 2x_1 & +6x_2 & -3x_3 & -4x_4 = 3 \\ -2x_1 & -6x_2 & -2x_3 & +14x_4 = 12 \end{array} \\ \\ & & \begin{array}{rcl} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 = 2 \\ (c) \quad -4x_1 & +2x_2 & -9x_3 = -2 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 = \frac{1}{2} \end{array} \end{array}$$

H 7.3 Parameterabhängiges GleichungssystemLösen Sie das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit des Parameters $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} (t+1)x_1 + & x_2 + & x_3 = 1 \\ 2x_1 + & (t+2)x_2 + & (t+2)x_3 = 2 \\ x_1 + & x_2 + & (t+1)x_3 = 1 \end{array}$$

H 7.4 Produkt invertierbarer linearer OperatorenSei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $S, T : V \rightarrow V$ lineare Operatoren. Zeigen Sie, dass ST dann und nur dann invertierbar ist, wenn S und T invertierbar sind.**Freiwillige Trainingsbeispiele** (werden von Tutoren korrigiert)**T 7.1** Noch ein lineares Gleichungssystem

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} x_1 - & x_2 + & 2x_3 - & 3x_4 = & 7 \\ 4x_1 & & + & 3x_3 + & x_4 = & 9 \\ 2x_1 - & 5x_2 + & x_3 & & = & 2 \\ 3x_1 - & x_2 - & x_3 + & 2x_4 = & -2 \end{array}$$

T 7.2 Noch ein parameterabhängiges GleichungssystemLösen Sie das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit des Parameters $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - & tx_2 & = & -t \\ x_1 + & tx_2 + & (2t+4)x_3 = & -t \\ x_1 - & tx_2 + & (t+2)x_3 = & -2t-2 \end{array}$$