

LINEARE ALGEBRA I**Hausaufgaben** (Bearbeitung bis 26.11.2008)**H 7.1** *Bild eines linearen Operators*Bestimmen Sie die Dimension des Bildes range  $T$  von  $T : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^3$ ,

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 9x_4 \\ 5x_1 - 12x_2 - 2x_3 - 9x_4 \end{pmatrix}.$$

**H 7.2** *Lösen linearer Gleichungssysteme*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme:

$$(a) \begin{array}{rcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 = -1 \\ 6x_1 & +x_2 & +x_3 = -4 \\ 2x_1 & -3x_2 & -x_3 = 0 \\ -x_1 & -7x_2 & -2x_3 = 1 \\ x_1 & -x_2 & = 1 \end{array}, \quad (b) \begin{array}{rcl} x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +3x_4 = 9 \\ 3x_1 & +9x_2 & -2x_3 & -11x_4 = -3 \\ 2x_1 & +6x_2 & -3x_3 & -4x_4 = 3 \\ -2x_1 & -6x_2 & -2x_3 & +14x_4 = 12 \end{array},$$

$$(c) \begin{array}{rcl} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 = 2 \\ -4x_1 & +2x_2 & -9x_3 = -2 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 = \frac{1}{2} \end{array}.$$

**H 7.3** *Parameterabhängiges Gleichungssystem*Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit des Parameters  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} (t+1)x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + (t+2)x_2 + (t+2)x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + (t+1)x_3 &= 1 \end{aligned}$$

**H 7.4** *Produkt invertierbarer linearer Operatoren*Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum und  $S, T : V \rightarrow V$  lineare Operatoren. Zeigen Sie, dass  $ST$  dann und nur dann invertierbar ist, wenn  $S$  und  $T$  invertierbar sind.**Freiwillige Trainingsbeispiele** (werden von Tutoren korrigiert)**T 7.1** *Noch ein lineares Gleichungssystem*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 7 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -2 \end{aligned}$$

**T 7.2** *Noch ein parameterabhängiges Gleichungssystem*Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit des Parameters  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} x_1 - tx_2 &= -t \\ x_1 + tx_2 + (2t+4)x_3 &= -t \\ x_1 - tx_2 + (t+2)x_3 &= -2t-2 \end{aligned}$$