CLASON, FRIPERTINGER, KAINRATH UE 621.011
BLATT 04 WS 2008/09

LINEARE ALGEBRA I

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 29.10.2008)

H 4.1 *Direkte Summe von Unterräumen*

Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel) folgende Aussage:

Wenn U_1, U_2 und W Unterräume eines Vektorraums V sind, für die gilt

$$V = U_1 \oplus W \quad \text{und} \quad V = U_2 \oplus W,$$

dann ist $U_1 = U_2$.

H 4.2 *Summe und direkte Summe von Unterräumen*

Gegeben seien die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \qquad U_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

Ist die Summe von U_1 und U_2 eine direkte Summe?

H 4.3 *Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit*

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren $u, v, w \in V$. Zeigen Sie:

(a) Die Vektoren $u + v - 2w$, $u - v - w$ und $u + w$ sind linear unabhängig.

(b) Die Vektoren $u + v - 3w$, $u + 3v - w$ und $v + w$ sind linear abhängig.

H 4.4 *Lineare Unabhängigkeit und Basen*

(a) Ist die Menge $S = \{(1,1,1,1), (2,-4,11,2), (0,2,-3,0)\} \subset \mathbb{R}^4$ linear unabhängig? Geben Sie eine Teilmenge an, die eine Basis von $\operatorname{span} S$ ist.

(b) Ergänzen Sie die linear unabhängige Menge $\{(1,1,1,1), (0,2,-3,0)\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

H 4.5 *Dimension von Unterräumen*

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und U ein Unterraum von V mit $\dim U = \dim V$. Zeigen Sie, dass dann $U = V$ ist.

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden von Tutoren korrigiert)

T 4.1 *Noch einmal lineare Unabhängigkeit*

Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n\}$$

linear unabhängig ist.

T 4.2 *Noch eine Basis*

Geben Sie eine Basis des folgenden Unterraums von $\mathbb{R}^5$ an:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : \; x_1 = 3x_2 \text{ und } x_3 = 7x_4\}.$$