CLASON, FRIPERTINGER, KAINRATH
BLATT 03

UE 621.011
WS 2008/09

LINEARE ALGEBRA I

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 22.10.2008)

H 3.1 *Teilmengen und Unterräume*

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sowie den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume des jeweiligen Vektorraums?

(a) $\{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$,
(b) $\{(a, 1, 0) : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$,
(c) $\{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$,
(d) $\{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$,
(e) $\{z \in \mathbb{C} : z = -\bar{z}\} \subset \mathbb{C}$.

H 3.2 *Die Unterraum-Bedingung I*

Finden Sie eine nichtleere Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$, die zu jedem Element $a \in U$ auch das additive Inverse $-a$ enthält und abgeschlossen ist unter der Addition, die aber kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

H 3.3 *Die Unterraum-Bedingung II*

Finden Sie eine nichtleere Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$, die abgeschlossen ist unter der Multiplikation mit Skalaren, die aber kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

H 3.4 *Vereinigung von Unterräumen*

Gegeben seien zwei Unterräume U_1, U_2 eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ dann und nur dann ein Unterraum von V ist, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt.

H 3.5 *Summe von Unterräumen*

Seien X, Y, Z Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen gilt:

$$(X + Y) \cap Z \neq (X \cap Z) + (Y \cap Z).$$

In welchem Falle gilt dennoch die Gleichheit?

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden von Tutoren korrigiert)

T 3.1 *Noch mehr Teilmengen und Unterräume*

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{K}^3$ ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^3$?

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$,
(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$,
(c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : x_1 x_2 x_3 = 0\}$,
(d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : x_1 = 5x_3\}$.

T 3.2 *Durchschnitt von Unterräumen*

Beweisen Sie, dass der Durchschnitt beliebig vieler Unterräume eines Vektorraums V wieder ein Unterraum von V ist.