

HÖHERE MATHEMATIK I

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 13.1.2009)

H 9.1 *Ableitung von Funktionen*

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\sqrt{x^3 + 1}, \quad \frac{1}{(x^4 + 3)^2}, \quad \frac{2x - 1}{(3x + 4)^5}, \quad \sin(x) \cos(x), \quad \frac{\sin x}{x}, \quad x^4 e^x, \quad \sin(3x), \quad x^{\frac{1}{x}}.$$

H 9.2 *Extremwertaufgaben*

- (a) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von  $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ .  
 (b) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von  $g: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^3 e^x$ .  
 (c) Bestimmen Sie das Maximum von  $xy$  für alle  $x, y > 0$  mit  $x + y = 1$ .

H 9.3 *Eine Anwendung des Mittelwertsatzes*Zeigen Sie: Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|.$$

H 9.4 *Die Regel von L'Hôpital*Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte: ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 7x - 6}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - \sin(bx)}{x}.$$

H 9.5 *Extremwertaufgabe Heizkosten*

Für ein Einfamilienhaus fallen im Jahr 1500 Euro Heizkosten an. Eine Isolierung der Wände durch eine zusätzliche Dämmschicht der Dicke  $x$  in cm,  $x < 25$ , würde die jährlichen Heizkosten auf  $\frac{3000}{x+2}$  Euro senken, aber einmalig  $450x$  Euro für die Installation erfordern. Bei welcher Dicke wären die Gesamtkosten (Installation und Heizung) über 10 Jahre minimal? Wie groß wäre dann die jährliche Ersparnis?

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden von Tutoren korrigiert)

T 9.1 *Noch mehr Ableitungen*

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}, \quad \frac{x^3 - x^2 + 1}{5x + 1}.$$

T 9.2 *Nochmal L'Hôpital*Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte: ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2}.$$