

HÖHERE MATHEMATIK I

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 18.11.2008)

H 5.1 *Grenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{(x^2 - 1)|x|}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{(x^2 - 1)|x|}.$$

H 5.2 *Stetigkeit stückweise definierter Funktionen*

Wo ist die folgende Funktion stetig?

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x < 2, \\ 5 & x = 2 \\ x^3 & x > 2 \end{cases}$$

H 5.3 *Stetigkeit und Verkettung*Sind die folgenden Funktionen stetig in \mathbb{R} ?

$$(a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{e^{\frac{1}{x^2+1}} + 1},$$

$$(b) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \gamma(x) := x - \lfloor x \rfloor,$$

$$(c) h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \sin(\pi x)\gamma(x).$$

Hinweis: Sie dürfen e^x und $\sin(x)$ als stetig voraussetzen, und annehmen, dass $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und $\sin(k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

H 5.4 *Stetige Fortsetzung*

Bestimmen Sie die stetige Fortsetzung von

$$(a) f: \mathbb{R}_{\geq -4} \setminus \{5\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} \text{ in } x_0 = 5,$$

$$(b) g: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x+1} \text{ in } x_0 = -1.$$

H 5.5 *Eine Anwendung der Stetigkeit*

Es sei $V(s) = s^3$ das Volumen (in m^3) eines Würfels der Kantenlänge s (in m). Sie sollen nun einen Würfel konstruieren, dessen Volumen nicht um mehr als $\varepsilon = 0.1 \text{m}^3$ von einem vorgegebenem Wert V_0 abweichen darf. Mit welcher Toleranz δ dürfen Sie die Seitenlänge s_0 wählen, falls $V_0 = V(s_0) = 1 \text{m}^3$ ist? Welche Toleranz müssen Sie für $V_0 = 8 \text{m}^3$ einhalten?

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden von Tutoren korrigiert)

T 5.1 *Noch eine stückweise definierte Funktion*Ist die folgende Funktion stetig in \mathbb{R} ?

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & x < 2, \\ x^3 & x \geq 2 \end{cases}$$

T 5.2 *Noch eine stetige Fortsetzung*Bestimmen Sie die stetige Fortsetzung von $f: \mathbb{R} \setminus \{5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$ in $x_0 = 5$.