Clason, Fripertinger, Kainrath, Seidel UE 621.003, 646.835, 621.005, 646.804

Blatt 04 WS 2008/09

Höhere Mathematik I

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 4.11.2008)

H 4.1 *Grenzwerte von Funktionen*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} 3x^2+7x-12\,,\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}\,,\qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-5}{x^3-2x}\,.$$

H 4.2 *Einseitige Grenzwerte*

Gegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\quad f(x)=\begin{cases} x^4-2x^3+x & x<2\\ x^3-x^2-2x+2 & x\geqslant 2\end{cases}\,.$$

Berechnen Sie die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, und zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existiert.

H 4.3 *Mehr einseitige Grenzwerte*

Gegeben sei wieder die Funktion $\lfloor x\rfloor := \max\{k\in\mathbb{Z}:\ k\leqslant x\}$. Bestimmen Sie direkt mit Hilfe der ε-δ-Definition die folgenden einseitigen Grenzwerte:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1^+}\lfloor x\rfloor\,,\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 1^-}\lfloor x\rfloor\,,\qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to \frac{1}{2}^+}\lfloor x\rfloor\,,\qquad \text{(d)}\ \lim_{x\to \frac{1}{2}^-}\lfloor x\rfloor\,.$$

Existiert der Grenzwert in 1? Existiert der Grenzwert in $\frac{1}{2}$?

H 4.4 *Der Sandwich-Satz*

Gegeben sei wieder die Funktion $\gamma(x) := x-\lfloor x\rfloor$. Verwenden Sie den Sandwich-Satz, um den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} x\gamma\left(\frac{1}{x}\right)$$

zu bestimmen.

H 4.5 *Häufungspunkte einer Menge*

Zeigen Sie, dass -1 und 1 Häufungspunkte der Menge $\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$ sind.

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden von Tutoren korrigiert)

T 4.1 *Noch mehr Grenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{1-x}\,,\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-5x+6}\,.$$

T 4.2 *Noch mehr einseitige Grenzwerte*

Bestimmen Sie direkt mit Hilfe der ε-δ-Definition die folgenden einseitigen Grenzwerte:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}\,,\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\,.$$