Clason, Fripertinger, Kainrath, Seidel — UE 621.003, 646.835, 621.005, 646.804

Blatt 03 — WS 2008/09

Höhere Mathematik I

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 28.10.2008)

H 3.1 *Umkehrfunktionen*

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen injektiv sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Umkehrfunktion:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{-4\} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{2x-3}{x+4}$,

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f_2(x) = \frac{x}{|x|+1}$,

(c) $f_3 : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \sqrt{x}$,

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \sqrt[3]{x}$.

H 3.2 *Lineare Abbildungen*

Gegeben seien folgende lineare Abbildungen:

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5,\ f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad f_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3,\ f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

(a) $f_1(x)$, $x = (1, 2, 3)^T$ und $f_1(y)$, $y = (-1, 0, 1)^T$,

(b) $f_2(x)$, $x = (1, 0, 2, -1, 1)^T$ und $f_2(y)$, $y = (-1, 2, 0, -2, 1)^T$.

Sind f_1 und f_2 injektiv?

H 3.3 *Monotonie*

Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Teilmengen des Definitionsbereichs, in denen sie monoton wachsen bzw. fallen:

(a) $f_1 : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x}$,

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$,

(c) $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \frac{2-x}{x-1}$,

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}$ (d.h. die eindeutig bestimmte größte ganze Zahl kleiner oder gleich x).

H 3.4 *Gerade und ungerade Funktionen*

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ eine gerade oder ungerade Funktion?

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x - a| + b$ eine gerade Funktion?

H 3.5 *Translation von Funktionen*

Betrachten Sie die Funktion $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Existiert ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\gamma(x + c) = \gamma(x)$ gilt?

Bitte wenden!

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden von Tutoren korrigiert)

T 3.1 *Permutationen*

Gegeben sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und die Funktionen $f_1, f_2 : M \to M$, definiert durch

$$\begin{aligned} &f_1(1) = 2, \quad f_1(2) = 3, \quad f_1(3) = 1, \quad f_1(4) = 4, \\ &f_2(1) = 4, \quad f_2(2) = 3, \quad f_2(3) = 2, \quad f_2(4) = 1. \end{aligned}$$

Sind f_1 und f_2 bijektiv? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion. Gilt $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$?

T 3.2 *Komposition linearer Abbildungen*

Gegeben seien die beiden linearen Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad g(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Matrix C, so dass $Cx = (f \circ g)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt, sowie eine Matrix D, so dass $Dx = (g \circ f)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt.