12. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 19.1.2016

Aufgabe 45 vom letzten Übungsblatt.

46. Sei n eine positive ganze Zahl, sei $\pi := (1, \ldots, n)$ ein Zykel der Länge n in S_n und sei C_n die von π erzeugte Untergruppe von S_n. Das ist die Menge $\{\pi^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$. Welche Zykeltypen $a \vdash\!\dashv n$ sind Zykeltypen von Elementen aus C_n? Wieviele Elemente gibt es in C_n von diesen Zykeltypen?

47. (a) Sei $G = (V, E)$ ein nicht zusammenhängender Graph. Ist dann das Komplement $\overline{G}$ zusammenhängend?
(b) Gibt es Graphen, so dass G und $\overline{G}$ zusammenhängend sind?
(c) Charakterisieren Sie, wann das Komplement eines bipartiten Graphen zusammenhängend ist.

48. Zeigen Sie, dass es in einem endlichen Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ stets zwei Knoten mit gleichem Grad gibt.

Zusatzaufgaben

1. Sei n eine positive ganze Zahl.
   (a) Sei $n = k\ell$. Bestimmen Sie die Anzahl der Mengenpartitionen $\{A_0, \ldots, A_{k-1}\}$ von $[\![n]\!]$ mit $|A_i| = \ell$, $i \in [\![k]\!]$.
   (b) Sei $n = k\ell$. Wieviele Permutationen gibt es in S_n, die aus k zueinander disjunkten Zykeln der Länge ℓ bestehen?
   (c) Sei $a \vdash\!\dashv n$ ein Zykeltyp. Wieviele Mengenpartitionen von $[\![n]\!]$ sind vom Typ a? (D.h., für jedes $i \in [\![1, n]\!]$ kommen genau a_i Blöcke der Mächtigkeit i vor.)
   (d) Sei $a \vdash\!\dashv n$. Wieviele Permutationen gibt es in S_n, deren Zykeltyp gleich a ist?

2. Sei X eine Menge $\sigma \in S_X$ eine Permutation. Konjugieren mit σ ist die Abbildung
$$S_X \to S_X, \qquad \pi \mapsto \sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1}.$$
Die Konjugiertenklasse von π in S_n ist die Menge $\{\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n\}$.
Zeigen Sie: Sei $X = \mathbf{n}$, und $\pi \in S_n$ besitze die Zerlegung in paarweise disjunkte Zykel
$$\pi = \prod_{i=1}^{r} (x_i, \pi(x_i), \ldots, \pi^{\ell_i - 1}(x_i)),$$
dann ist
$$\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1} = \prod_{i=1}^{r} (\sigma(x_i), \sigma(\pi(x_i)), \ldots, \sigma(\pi^{\ell_i - 1}(x_i))).$$
Folgern Sie: Die Menge $\{\tau \in S_n \mid a(\tau) = a(\pi)\}$ ist die Konjugiertenklasse von π in S_n.

3. Zeichnen Sie eine vollständiges Repräsentantensystem der Isomorphieklassen aller gewöhnlichen Graphen auf 4 Knoten.