9. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 3.12.2013

49. Zeichnen Sie die Hassediagramme der folgenden partiell geordneten Mengen.

    (a) $(T(60), |)$.

    (b) $(\mathrm{Pot}(\{1,2,3\}), \subseteq)$.

    (c) $(\langle 3\rangle^{\langle 3\rangle}, \leq_p)$ (siehe Übungsaufgabe 7).

50. Sei X eine endliche Menge der Mächtigkeit n. Eine binäre Relation auf X ist eine Teilmenge R von $X \times X$.

    (a) Wieviele binäre Relationen gibt es auf X?

    (b) Wieviele reflexive, binäre Relationen gibt es auf X?

    (c) Wieviele symmetrische, binäre Relationen gibt es auf X?

    (d) Wieviele symmetrische, binäre Relationen auf X sind reflexiv?

51. Für $n \geq 1$ sei L_n der binäre gespiegelte Graycode der Länge n.

    (a) Zeigen Sie für $0 < k < n$: Der erste Vektor in L_n mit k Einsen ist gleich $1^k 0^{n-k}$. Der letzte Vektor in L_n mit k Einsen ist gleich $1^{k-1}0^{n-k}1$. Wie sehen diese Vektoren für $k = 0$ oder $k = n$ aus?

    (b) Sei $0 \leq k \leq n$. Beweisen Sie: Betrachtet man die Vektoren mit k Einsen in der Reihenfolge ihres Auftretens in L_n, dann unterscheiden sich zwei aufeinanderfolgende Vektoren stets an genau zwei Stellen.

    (c) Für $0 \leq k \leq n$ sei $L_{n,k}$ die Liste der Wörter aus L_n, die man durch Streichung aller Vektoren, die nicht k Einsen enthalten, erhält. Beweisen Sie die rekursive Beziehung $L_{n,0} = (0^n)$, $L_{n,n} = (1^n)$, $n \geq 1$, $L_{n,k} = (L_{n-1,k} \cdot 0) \cup (\overline{L_{n-1,k-1}} \cdot 1)$, $0 < k < n$.

    (d) Schreiben wir die Vektoren $(x_1, \ldots, x_n)$ in $L_{n,k}$ als k-Tupel $(i_1, \ldots, i_k)$ mit $i_j < i_{j+1}$, $j \in \langle k-1\rangle$, und $\{i_1, \ldots, i_k\} = \{j \in \langle n\rangle \mid x_j = 1\}$. Zeigen Sie, dass $\Gamma_{n,k}$, die Liste dieser k-Tupel, die rekursive Darstellung $\Gamma_{n,k} = \Gamma_{n-1,k} \cup (\overline{\Gamma_{n-1,k-1}} \cdot n)$ besitzt, wobei $\Gamma_{n,0} = (\epsilon)$ (ϵ ist das leere Wort. Das ist die einzige Funktion $f\colon \emptyset \to \{0,1\}$.) und $\Gamma_{n,n} = (1, 2, \ldots, n)$.

52. Sei $n \in \mathbb{N}$, und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine rekursive Definition zur Bestimmung eines Graycodes für die Elemente von $\prod_{j=1}^{n} \langle 0, a_j - 1\rangle$, und beweisen Sie, dass sich aufeinanderfolgende Vektoren (oder Funktionen) an genau einer Stelle unterscheiden. Kann man diesen Graycode auch zyklisch schließen?

53. Sei $n \in \mathbb{N}$, und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Geben Sie einen Algorithmus an, der zufällig Elemente aus dem kartesischen Produkt $\prod_{j=1}^{n} \langle 0, a_j - 1\rangle$ bestimmt aber nicht auf einer Rangfunktion auf dem kartesischen Produkt beruht, so dass für jedes $f \in$

$\prod_{j=1}^{n}\langle 0, a_j - 1\rangle$ die Wahrscheinlichkeit, dass f ausgegeben wird, gleich groß ist. Beweisen Sie, dass Ihr Algorithmus diese Eigenschaft besitzt. (Diesen Algorithmus kann man dann zur zufälligen Bestimmung von großen Zahlen verwenden.)

Zusatzaufgaben:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und
$$Q_n = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(i+1)!} \;\Big|\; a_i \in \langle 0, i\rangle,\ i \in \langle n\rangle \Big\}.$$
Zeigen Sie, dass
$$Q_n = \Big\{ \frac{k}{(n+1)!} \;\Big|\; k \in \langle 0, (n+1)! - 1\rangle \Big\}.$$
Daher besitzt jedes $x \in Q_n$ eine eindeutige Darstellung in dieser Form. Weiters gilt $Q_n \subset Q_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in Q_n \cap Q_{n+1}$ mit $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(i+1)!}$ und $x = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{b_i}{(i+1)!}$ gilt $a_i = b_i$ für $1 \le i \le n$ und $b_{n+1} = 0$.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und
$$M_n = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} i! \cdot a_i \;\Big|\; a_i \in \langle 0, i\rangle,\ i \in \langle 1, n\rangle \Big\}.$$
Zeigen Sie, dass $M_n = \langle 0, (n+1)! - 1\rangle$. Daher besitzt jedes $x \in M_n$ eine eindeutige Darstellung in dieser Form. Weiters gilt $M_n \subset M_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in M_n \cap M_{n+1}$ mit $x = \sum_{i=1}^{n} i! \cdot a_i$ und $x = \sum_{i=1}^{n+1} i! \cdot b_i$ gilt $a_i = b_i$ für $1 \le i \le n$ und $b_{n+1} = 0$.

3. Es gilt
$$\bigcup_{n\ge 1} Q_n = \mathbb{Q} \cap [0,1), \quad \text{und} \quad \bigcup_{n \ge 1} M_n = \mathbb{N}_0.$$
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi_n \colon M_n \to Q_n$, wobei für $x = \sum_{i=1}^{n} i! \cdot a_i$ der Funktionswert $\varphi_n(x)$ als $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(i+1)!}$ definiert ist, eine Bijektion. Falls $n > 1$ und x bereits in M_{n-1} liegt, dann ist $a_n = 0$ und es gilt $\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x)$. Es gilt sogar, falls $x \in M_k$ mit $k < n$, dann ist $\varphi_k(x) = \varphi_{k+1}(x) = \ldots = \varphi_n(x)$. Daher können wir eine Bijektion von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{Q} \cap [0,1)$ wie folgt definieren. Sei $x \in \mathbb{N}_0$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < (n+1)!$, also $x \in M_n$, und wir setzen $\psi(x) = \varphi_n(x)$. Zeigen Sie, dass dadurch eine Funktion von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{Q} \cap [0,1)$ definiert wird, die bijektiv ist, und $\psi(0) = 0$ erfüllt.

4. Die Abbildung $f \colon (0,1) \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x-1} + 4 & \text{falls } x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$
ist bijektiv mit $f(\mathbb{Q} \cap (0,1)) = \mathbb{Q}$. Daher ist die Abbildung $x \mapsto (f \circ \psi)(x)$ eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$. Für welches $n \in \mathbb{N}$ ist $(f \circ \psi)(n) = 1/2$?