8. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 26.11.2013

41. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \sigma(n)$, die Summe aller positiven Teiler von n, eine multiplikative Funktion im Sinn der Zahlentheorie ist.

42. Für welche Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$ kann man sinnvoll der Begriff $\mathrm{ggT}(A)$ und $\mathrm{kgV}(A)$ definieren? Argumentieren Sie!

43. Sei $X \neq \emptyset$ eine endliche Menge und $x_0 \in X$. Gibt es mehr, (gleich viele, oder weniger) Teilmenge von X, die x_0 enthalten, als, (wie, als) Teilmengen von X, die x_0 nicht enthalten? Geben Sie einen kombinatorischen Beweis.

44. Wählen Sie 100 Punkte aus einem Würfel mit Kantenlänge 1 m. Zeigen Sie, dass es darunter 4 Punkte gibt, die einen allgemeinen Tetraeder aufspannen, dessen Volumen höchstens $1/99\,\mathrm{m}^3$ beträgt.

45. Auf wieviele Weisen können Sie die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ so anordnen, dass keine Zahl mehrfach auftritt, und dass mit Ausnahme des ersten Elements (in so einer Anordnung) die Zahl k nur dann verwendet werden kann, wenn bereits vorher $k-1$ oder $k+1$ verwendet wurde.

46. Wieviele (echt) 5-stellige Zahlen gibt es im Dezimalsystem, deren mittlere Stelle gleich 6 ist, und die durch 3 teilbar sind?

47. Es sind 200 Kugeln auf 100 Urnen aufgeteilt. Keine Urne enthält mehr als 100 Kugeln. Jede Urne enthält mindestens eine Kugel. Zeigen Sie, dass es Urnen gibt, die zusammen genau 100 Kugeln enthalten.

    Hinweis: Untersuchen Sie die Fälle, dass alle Urnen gleich viele Kugeln enthalten, und dass nicht alle Urnen gleich viele Kugeln enthalten. Sortieren Sie die Urnen von 1 bis 100 und zeigen Sie, dass es $j, k \in \langle 100 \rangle$ gibt, so dass die Urnen U_i für $i \in \langle j, k \rangle$ die 100 Kugeln enthalten.

48. Welche Aussage der Vorlesung kann man auch genau so beweisen, wie wir zeigten, dass jede ganze Zahl ≥ 7 als Summe von paarweise verschiedenen Primzahlen darstellbar ist?

Zusatzaufgaben:

1. Beweisen Sie, dass $\mathbb{N}$ nicht endlich ist. Hinweis: Indirekter Beweis.

2. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.
   (1) M ist abzählbar unendlich.
   (2) Es gibt eine surjektive Funktion $h\colon \mathbb{N} \to M$.
   Hinweis: Für den Beweis von (2)$\Rightarrow$(1) zeigen Sie zuerst, dass es eine nicht-endliche Teilmenge A von n gibt, so dass die Einschränkung $h|_A$ eine bijektive Funktion

von A nach M ist. Finden Sie dann eine Funktion $g\colon \mathbb{N} \to A$, die bijektiv ist, etwa dadurch dass $g(1), g(2), \ldots,$ die Elemente von A der Größe nach auflistet. Wie kann man so eine Funktion definieren. Die Komposition $g \circ h$ ist dann eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und M.

3. Mit der obigen Charakterisierung zeigen Sie nun: Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

4. Herr und Frau Muster laden vier befreundete Paare ein. Einige davon sind mit Frau Muster andere mit Herrn Muster bekannt. Bei der Ankunft der Gäste begrüßt man sich gegenseitig durch Handschütteln, falls man einander bereits kennt, oder durch Kopfnicken, falls man einander noch nicht kennt. (Ehepartner begrüßen sich nicht!) Danach stellt Herr Muster fest, dass es, unter den gemeinsam mit ihm anwesenden Personen, wobei er sich selber nicht berücksichtigt, keine zwei Personen, die gleich vielen Personen die Hand geschüttelt haben. Wieviele Personen hat Frau Muster durch Handschütteln begrüßt?