7. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 19.11.2013

36. Der Hörsaal H besitzt abzählbar unendlich viele Sitzplätze. Mit Ausnahme von 3 Plätzen sind alle besetzt. Zwei Minuten nach Beginn der Vorlesung kommen noch 4 Studierende in die Vorlesung. Einer von ihnen will sich gerade auf den Fußboden setzen, als der Vortragende, Professor Hilbert, gut mit abzählbar unendlich großen Hörsälen vertraut, für ihn einen weiteren Sitzplatz freimacht, sodass nun alle Studierenden einen Sitzplatz haben. Er berücksichtigte dabei auch, dass die Personen in der ersten Reihe (Sitzplatz 1 bis 999) aufgrund einer Sehschwäche nicht versetzt werden sollen. Wie ging er wohl vor?

    Nachdem wieder Ruhe eingekehrt ist, öffnet sich nochmals die Tür und alle Studierenden aus dem ebenfalls bis auf den letzten Platz gefüllten Hörsaal I, der ebenfalls abzählbar unendlich viele Sitzplätze aufweist, treten ein. Leider hat Professor X wieder seine Vorlesung überzogen. Gelingt es dem Vortragenden, sie alle auf Sitzplätzen unterzubringen, so dass höchstens eine Person auf einem Platz sitzt? Helfen Sie ihm dabei!

37. Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $t(n) = |T(n)|$, die Anzahl der positiven Teiler von n, und zeigen Sie, dass t eine multiplikative Funktion im Sinn der Zahlentheorie ist. Hinweis: Bestimmen Sie aus der kanonische Primfaktorzerlegung von n eine "kombinatorische Struktur" von $T(n)$.

38. Bestimmen Sie die Anzahlen der möglichen Standard- und Wunschkennzeichen für Graz (Unterscheidungszeichen G) und Graz Umgebung (Unterscheidungszeichen GU). Es gelten folgende Regelungen:

    Auf ein „Unterscheidungszeichen“, das den Bezirk oder die Stadt angibt, folgt ein Wappen und das „Vormerkzeichen“.

    Für die Standardkennzeichen gelten folgende Regelungen: Die Vormerkzeichen müssen vier bis fünf Zeichen, in den Landeshauptstädten und in Wien fünf bis sechs Zeichen enthalten. Sie müssen mit einer Ziffer beginnen und mit einem Buchstaben enden sowie mindestens eine Ziffer und ein bis drei Buchstaben enthalten. Es müssen alle Ziffern und alle Buchstaben je in geschlossen Blöcken auftreten; ein „Mischen“ von Ziffern und Buchstaben ist nicht erlaubt. Der Buchstabe „O“ an der ersten Stelle im Buchstabenblock (außer es handelt sich um ein Kennzeichen für Funktionäre oder staatliche Institutionen) ist nicht erlaubt.

    Für die Wunschkennzeichen sehen die Regeln wie folgt aus: Die Vormerkzeichen müssen mindestens drei und können bis zu fünf Zeichen, bei den in den Landeshauptstädten und in Wien zugewiesenen Kennzeichen mindestens drei und bis zu sechs Zeichen enthalten. Sie müssen mindestens einen Buchstaben und mindestens eine Ziffer enthalten, mit einem Buchstaben beginnen und mit einer Ziffer enden, wobei alle Buchstaben und alle Ziffern nur je in geschlossenen Blöcken vorkommen dürfen. Das Verwenden von Buchstaben abwechselnd mit Ziffern ist unzulässig. Die gewünschte Kombination kann von der Behörde auch abgelehnt werden!

Für beide Arten von Kennzeichen gilt: Es dürfen nur Großbuchstaben verwendet werden; die Verwendung des Buchstaben Q und der Umlaute Ä, Ö und Ü ist nicht gestattet. Die Ziffer „0“ an der ersten Stelle im Ziffernblock ist unzulässig;

39. Wieviele Zahlen zwischen 10000 und 99999 gibt es, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer 1 mindestens dreimal vorkommt?

40. Untersuchen Sie, ob es in der Folge 7, 77, 777, 7777, ... eine Zahl gibt, die durch 2013 teilbar ist.

Zusatzaufgaben:

1. Wieviele echt k-stellige Zahlen gibt es in g-adischer Darstellung?

2. Sei $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage. Sie wissen, wenn $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Braucht man noch zusätzliche Bedingungen, und wenn ja welche, dass man sich sicher sein kann, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3. Beweisen Sie, dass $2^{2^n}+3^{2^n}+5^{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Vielfaches von 19 ist. Verwenden Sie die in 2. angedeutete Methode.

4. Fortsetzung von Aufgabe 36.
   Die Universität besitzt abzählbar unendlich viele abzählbare Hörsäle. Da Professor Hilbert sehr angesehen ist versammeln sich schließlich die Studierenden aus allen Hörsälen in seiner Vorlesung. Wir gelingt es ihm, allen StudentInnen einen Sitzplatz zuzuteilen?

   Am Ende der Vorlesung verteilt Prof. Hilbert stets Geschenke an die Studierenden. Diesmal hat er alle reellen Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ mitgebracht. Einige Zeit nachdem er begonnen hat, die Zahlen an die Studierenden auszugeben, stellt er fest, dass er wahscheinlich zu viele Zahlen mitgebracht hat und verschenkt sie in Bündeln zu 10, 100, 1000 Stück. Schließlich erkennt er aber, auch wenn er abzählbar unendlich viele Zahlen zu Päckchen zusammengefasst verschenkt, wird er nicht alle Zahlen verteilen. Wieso?