4. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 29.10.2013

21. Sei p_n die n-te Primzahl (nach der Größe aufgelistet), d.h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ usw. Zeigen Sie, dass $p_n \leq 2^{(2^{n-1})}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Hinweis: Verwenden Sie Ideen aus Euklids Beweis.

22. Sei $D = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.
    (a) Zeigen Sie, dass die Multiplikation eine innere Verknüpfung auf D ist.
    (b) Eine Zahl $d \in D$ mit $d > 1$ heißt unzerlegbar in D, wenn aus $d = ab$ mit $a, b \in D$ folgt, dass $a = 1$ oder $b = 1$. Bestimmen Sie die ersten zehn unzerlegbaren Zahlen in D. Ist 100 in D zerlegbar oder unzerlegbar?
    (c) Zeigen Sie, dass jedes $d \in D$ als Produkt von in D unzerlegbaren Elementen geschrieben werden kann, und beweisen Sie, dass diese Darstellung i.a. nicht eindeutig ist.
    (d) Definiert man Teilbarkeit und die Primeigenschaft in D analog wie in $\mathbb{Z}$, dann zeigen Sie, dass 4 unzerlegbar aber nicht prim in D ist.

23. Beweisen Sie die Kürzungsregel in $\mathbb{Z}$: Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, gilt. Aus $ab = ac$ folgt $b = c$.

24. Beweisen Sie: Für $p \in \mathbb{P}$ und $a \in \mathbb{Z}$ gilt entweder $p \mid a$ oder $\mathrm{ggT}(p, a) = 1$.

25. Beweisen Sie: Seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Erfüllt die reelle Zahl x die Gleichung

    $$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

    dann ist entweder $x \in \mathbb{Z}$ oder x irrational.

Zusatzaufgaben:

1. Beweisen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $3n + 2$, $n \in \mathbb{N}$.

   Hinweis: Verwenden Sie die Idee aus Euklids Beweis, und bilden Sie aus den bereits bekannten Primzahlen $p_1, \ldots, p_s$ von der gewünschten Form die Zahl $3p_1 \cdots p_s - 1$. Diese ist wieder von der Gestalt $3n + 2$, $n \in \mathbb{N}$. Leiten Sie daraus die Existenz einer weiteren von $p_1, \ldots, p_s$ verschiedenen Primzahl der Form $3n + 2$ her.

2. Beweisen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{Q}^*$ die Formel $w_p(ab) = w_p(a) + w_p(b)$ und falls $a + b \neq 0$ auch $w_p(a + b) \geq \min\{w_p(a), w_p(b)\}$ für alle $p \in \mathbb{P}$ gelten.

3. Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$. Zeigen Sie: Ist $x = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$, eine rationale Lösung von

   $$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots, a_1 x + a_0 = 0,$$

   dann gilt $p \mid a_0$ und $q \mid a_n$.