12. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 7.1.2014

74. Bestimmen Sie jenes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad ≤ 4, das $p(0) = 0$, $p(1) = 2$, $p(2) = 0$, $p(3) = 1$ und $p(4) = 4$ erfüllt. Für welches $n \in \mathbb{Z}$ ist $p(n) = 1/2$?

75. Seien ${}_GX$ und ${}_HY$ zwei Gruppenaktionen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$(H \times G) \times Y^X \to Y^X, \qquad ((h, g), f) \mapsto \bar{h} \circ f \circ \bar{g}^{-1}$$

eine Gruppenoperation des direkten Produktes $H \times G$ auf Y^X definiert. Dabei ist $\bar{g}$ die Permutationsdarstellung von $g \in G$ auf X und $\bar{h}$ die Permutationsdarstellung von $h \in H$ auf Y.

76. Zeigen Sie, dass die Menge aller Zykel der Länge 3 in S_n ein Erzeugendensystem der alternierenden Gruppe A_n, $n \geq 3$, darstellt.

77. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $*\colon \{\pm 1\} \times T(n) \to T(n)$, $(-1) * d = n/d$, $1 * d = d$, $d \in T(n)$, eine Operation der Gruppe $(\{\pm 1\}, \cdot)$ auf $T(n)$, der Menge der positiven Teiler von n, definiert. Unter Verwendung dieser Tatsache beweisen Sie: Die Zahl n hat genau dann eine ungerade Anzahl von Teilern, wenn n ein Quadrat einer ganzen Zahl ist.

78. Betrachten Sie quadratische Glasfenster, die aus neun kleineren, gleich großen Scheiben zusammengesetzt werden, die in 3 Zeilen und 3 Spalten angeordnet sind. Die kleinen Scheiben sind entweder rot oder blau eingefärbt. Glasfenster, die man durch Rotation um 90, 180, 270 Grad oder durch seitenverkehrtes (Innenseite nach Außen) Einbauen erhält, werden als gleich (oder äquivalent) angesehen. Wieviele nicht äquivalente Glasfenster gibt es?

79. Betrachten Sie einen Würfel im $\mathbb{R}^3$, dessen Ecken in der Punkten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ liegen. Untersuchen Sie all jene Rotationen des Würfels, so dass die Ecken des gedrehten Würfels wieder in den Punkten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ liegen. Wie sehen diese aus? Wie operieren sie auf den sechs Seitenflächen des Würfels? (Geben Sie die Zykelzerlegung der induzierten Permutation der Seitenflächen an.) Nun färbt man die Seiten der Würfel mit den Farben Rot oder Blau ein, wobei für jede Seite nur eine Farbe verwendet wird. Wieviele tatsächlich verschiedene Färbungen gibt es? (Die Färbungen von zwei Würfeln heißen tatsächlich verschieden, wenn es keine Drehung des ersten Würfels gibt, die der Färbung des zweiten Würfels entspricht.) Wieviele Färbungen gibt es eines numerierten Würfels, bei dem nach dem Einfärben der Seiten, die Seitennummern noch sichtbar sind?

    Hinweis: Die Drehgruppe eines Würfels besteht aus 24 Elementen.

80. Sei ${}_GX$ eine endliche, transitive Gruppenoperation, wobei G endlich ist. Für $x_0 \in X$ beweisen Sie

$$|G_{x_0} \backslash\backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|^2 .$$

Hinweis: Wenn G auf X operiert, dann operiert jede Untergruppe $U \leq G$ durch Einschränkung der ursprünglichen Operation auch auf X.

81. Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe. Die Ordnung von $g \in G$ ist definiert als $\mathrm{ord}(g) = \min\{j \in \mathbb{N} \mid g^j = 1\}$. Warum existiert dieses Minimum? Zeigen Sie, dass $\mathrm{ord}(g)$ ein Teiler der Gruppenordnung $|G|$ ist.
Hinweis: Untersuchen Sie die Gruppe $\langle g \rangle$.

Zusatzaufgaben:

1. Beim Ziehen von k Kugeln aus einer Urne, die mit n Kugeln bestückt ist, wollen wir vier verschiedene Methoden unterscheiden.
1. Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
2. Ziehen mit Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
3. Ziehen ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge
4. Ziehen mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge
Beschreiben Sie die Ergebnisse dieser Methoden auf kombinatorische Weise und bestimmen Sie wieviele verschiedene Ergebnisse die einzelnen Methoden liefern.

2. Wir suchen einen kombinatorischen Beweis für

$$((x))_n = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} x^k.$$

Sei $x \in \mathbb{N}$. Die linke Seite zählt alle Vektoren $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $0 \le a_i \le x+n-i-1$, $i \in \langle n \rangle$. Die rechte Seite zählt alle Paare (π, f) mit $\pi \in S_n$ und f eine Abbildung von $C(\pi)$, der Menge der Zykel von π (inklusive der Fixpunkte) nach $\langle x \rangle$. Der Vektor $(a_1, \ldots, a_n)$ bestimmt dabei das Paar (π, f) wie folgt:
Schreibe (n) als ersten Zykel C_1 und definiere $f(C_1) = a_n + 1$. Nun fügen wir der Reihe nach die Zahlen $n-1, n-2, \ldots$ in bestehende Zykel ein oder beginnen mit diesen neue Zykel C_j, für die dann $f(C_j)$ bestimmt werden muß. Seien bereits $n, n-1, \ldots, n-i+1$ abgearbeitet.

Falls $0 \le a_{n-i} \le x-1$, dann beginne einen neuen Zykel $C_{j+1} = (n-i)$ und schreibe diesen, links vor alle anderen Zykel. Definiere $f(C_{j+1}) = a_{n-i} + 1$.

Falls $a_{n-i} \ge x$, dann ist $a_{n-i} = x + k$ mit $0 \le k \le i-1$. Setze die Zahl $n-i$ als $k+1$-te Zahl in die bereits vorhandenen Zykel ein.

Ist das eine Bijektion?

Hier ein Beispiel für $x = 4$, $n = 9$ und $a = (4, 8, 5, 0, 7, 5, 2, 4, 1)$. Wir erhalten
(9), $f(C_1) = 2$,
$(9, 8)$,
$(7)(9, 8)$, $f(C_2) = 3$,
$(7)(9, 6, 8)$,
$(7)(9, 6, 8, 5)$,
$(4)(7)(9, 6, 8, 5)$, $f(C_3) = 1$,
$(4)(7, 3)(9, 6, 8, 5)$,
$(4)(7, 3)(9, 6, 2, 8, 5)$,
$(4, 1)(7, 3)(9, 6, 2, 8, 5)$,
wobei $C_1 = (9, 6, 2, 8, 5)$, $C_2 = (7, 3)$ und $C_3 = (4, 1)$.

Ist das eine bijektive Beziehung?