11. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 17.12.2013

68. Finden Sie einen kombinatorischen Beweis für die Rekursion der Stirlingschen Zahlen 2. Art.

69. Welche Rekursionsformel erfüllen die Zahlen $(-1)^{n-k}s_{n,k}$?

70. Sei n eine positive ganze Zahl.

    (a) Sei $n = k\ell$. Bestimmen Sie die Anzahl der Mengenpartitionen $\{A_1, \ldots, A_k\}$ von $\langle n\rangle$ mit $|A_i| = \ell$, $i \in \langle k\rangle$.

    (b) Sei $n = k\ell$. Wieviele Permutationen gibt es in S_n, die aus k zueinander disjunkten Zykeln der Länge ℓ bestehen?

    (c) Sei $a \vDash n$ ein Zykeltyp. Wieviele Mengenpartitionen von $\langle n\rangle$ sind vom Typ a? (D.h., für jedes $i \in \langle n\rangle$ kommen genau a_i Blöcke der Mächtigkeit i vor.)

    (d) Sei $a \vDash n$. Wieviele Permutationen gibt es in S_n, deren Zykeltyp gleich a ist?

71. Wieviele fixpunktfreie Permutationen gibt es in S_n, $n \geq 0$?

    Hinweis: Verwenden Sie die Siebformel.

72. Sei n eine positive ganze Zahl. Zeigen Sie, dass jede Permutation π in S_n konjugiert zu ihrer Inversen π^{-1} ist.

73. Sei n eine positive ganze Zahl, sei $\pi := (1, \ldots, n)$ ein Zykel der Länge n in S_n und sei C_n die von π erzeugte Untergruppe von S_n. Welche Zykeltypen $a \vDash n$ sind Zykeltypen von Elementen aus C_n? Wieviele Elemente gibt es in C_n von diesen Zykeltypen?

Zusatzaufgaben:

1. Beweisen Sie die bijektive Beziehung zwischen den Zykeltypen von n und den Konjugiertenklassen der S_n.

2. Beweisen Sie, dass $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{n-c(\pi)}$ gilt für $\pi \in S_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

3. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$

$$S_{n+1,k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S_{i,k-1}.$$

4. Seien $n, k, d \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq (k-1)d$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der k-elementigen Teilmengen K von $\langle n\rangle$ mit $|r-s| > d$ für jeweils zwei verschiedene Zahlen $r, s \in K$ gleich

$$f_d(n,k) = \binom{n-(k-1)d}{k}$$

ist.

Hinweis: Identifizieren Sie die Teilmengen mit streng monotonen Abbildungen.

5. Seien $n, k, d \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq kd$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der k-elementigen Teilmengen K von $\langle n \rangle$ mit $n - d > |r - s| > d$ für jeweils zwei verschiedene Zahlen $r, s \in K$ gleich
$$g_d(n, k) = \frac{n}{n - kd}\binom{n - kd}{k}$$
ist. (Das ist eine Verallgemeinerung des vorigen Beispiels, wo wir die Elemente von $\langle n \rangle$ kreisförmig anordnen, und die Abstände zwischen den Elementen aus K in beiden Richtungen größer als d sein müssen.)

   Hinweis: Sei $\mathcal{K}$ die Menge all der K mit den gewünschten Eigenschaften. Untersuchen Sie die Mengen $\mathcal{K}_i$, $i \in \langle d \rangle$, der Teilmengen $K \in \mathcal{K}$ mit $i \in K$, und die Menge $\mathcal{K}_0$, die die Teilmengen $K \in \mathcal{K}$ mit $K \cap \langle d \rangle = \emptyset$ enthält. Zeigen Sie, dass die $\mathcal{K}_i$, $0 \leq i \leq d$, eine Partition von $\mathcal{K}$ darstellen. Bestimmen Sie die Mächtigkeiten der $\mathcal{K}_i$ für $i = 0$ (als $f_d(n - d, k)$) und $i \in \langle d \rangle$ (als $f_d(n - 2d - 1, k - 1)$).