9. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 3.12.2012

48. Sei f eine ganze Funktion mit $|f(z)| \leq 1$ für $|z| < 1$. Zeigen Sie, dass $|f'(z)| \leq 4$ für $|z| \leq 1/2$.

49. Sei f holomorph auf einem Gebiet G, das den abgeschlossenen Einheitskreis $\overline{\mathbb{E}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ enthält. Weiters existiere eine reelle Zahl $c \geq 0$ mit $|f(z)| = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Zeigen Sie, dass dann f konstant ist oder eine Nullstelle im Inneren von $\overline{\mathbb{E}}$ besitzt.

50. Sei f holomorph auf einem Gebiet G, wobei $G = \{\overline{z} \mid z \in G\}$. Zeigen Sie, dass $f(G \cap \mathbb{R})$ genau dann eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, wenn $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in G$ gilt.

51. Sei G das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. Bestimmen Sie eine auf G holomorphe Funktion f mit $f(0) = \mathrm{i}$, so dass $(f(z))^2 = z^2 - 1$ für alle $z \in G$ gilt.

    Hinweis: Zerlegen Sie $z^2 - 1$ als Produkt von zwei Faktoren und bestimmen Sie für jeden dieser Faktoren eine holomorphe Wurzel.

52. Finden Sie einen direkten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, der auf dem Minimumprinzip beruht.

Sie sollten Aufgbae 39 doch noch vorbereiten.