8. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 26.11.2012

43. Sei G ein Gebiet und ℓ_1, ℓ_2 Logarithmusfunktionen auf G. Was kann man über die Differenz $\ell_1 - \ell_2$ aussagen?

44. Sei ℓ eine Logarithmusfunktion auf G und sei $p_\sigma\colon G \to \mathbb{C}$, $p_\sigma(z) = \exp(\sigma\ell(z))$, $z \in G$, die Potenzfunktion mit Exponenten $\sigma \in \mathbb{C}$ bezüglich ℓ. Zeigen Sie, dass p_σ holomorph ist, dass $p'_\sigma = \sigma p_{\sigma-1}$ gilt, dass $p_\sigma p_\tau = p_{\sigma+\tau}$ ist für $\tau \in \mathbb{C}$, und dass $p_n(z) = z^n$ ist für alle $z \in G$ und jedes $n \in \mathbb{N}$.

    Konstruieren Sie sich auf diese Weise holomorphen Quadratwurzeln auf G. Sind diese in 0 definiert?

45. Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ist das n-te Legendrepolynom gegeben durch

$$P_n(z) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n.$$

Zeigen Sie, dass

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(z + \mathrm{i}\sqrt{1 - z^2} \sin t\Big)^n \, dt, \qquad z \neq \pm 1.$$

Achtung, wofür steht $\sqrt{1 - z^2}$?
Hinweis: Zeigen Sie zuerst unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel, dass

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{2^n(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta, \qquad z \in \mathbb{C},$$

wobei γ eine im positiven Sinn einfach durchlaufene Kreislinie um den Punkt z ist. Für $z \neq \pm 1$ betrachten Sie dann die Kreislinie um z mit Radius $\sqrt{|z^2 - 1|}$. Wie hängen $\sqrt{|z^2 - 1|}$ und $\sqrt{1 - z^2}$ zusammen?

46. Bestimmen Sie die Art der Singularitäten und bei Polstellen zusätzlich deren Ordnung:

$$\frac{\exp z}{z^{17}}, \qquad \frac{(\exp(z) - 1)^2}{z^2}, \qquad \frac{z}{\exp(z) - 1}, \qquad \frac{\cos(z) - 1}{z^2},$$

$$\frac{\cos z}{z^2}, \qquad \frac{z^7 + 1}{z^7}, \qquad \frac{\exp(z) - 1}{z^4}, \qquad \frac{(z - 1)^2(z + 3)}{1 - \sin(\pi z/2)}.$$

47. Zeigen Sie, dass eine nicht hebbare Singularität c von der in $D \setminus \{c\}$ holomorphen Funktion f stets eine wesentliche Singularität von $\exp \circ f$ ist.

Allgemeine Information. Die Klausur findet am 17. Dezember statt.