# 7. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 19.11.2012

38. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

$$\text{(a)} \int_{C_a} \frac{z^2+z+1}{(z-\mathrm{i})^2}\,dz, \qquad \text{(b)} \int_{C_b} \frac{e^z}{(z+1)^3}\,dz, \qquad \text{(c)} \int_{C_c} \frac{z}{(z+1)(z+3)}\,dz,$$

wobei $C_a$ das positiv orientierte Rechteck mit Ecken $-1, 1, 1+2\mathrm{i}, -1+2\mathrm{i}$, $C_b$ den zweimal im Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis mit Radius 2 um $z=0$, und $C_c$ das negativ orientierte Rechteck mit Ecken $2 \pm \mathrm{i}$ und $-2 \pm \mathrm{i}$ bezeichnen.

39. *Warum zählt die Indexfunktion* $\operatorname{Ind}_\gamma(c)$ *die Anzahl der Umläufe der Kurve* $\gamma$ *um den Punkt* $c$*?*

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener stückweise stetig differenzierbarer Weg in $\mathbb{C}$.
a) Zeigen Sie: Für $c \notin |\gamma|$ gilt $\operatorname{Ind}_\gamma(c) = \operatorname{Ind}_{\gamma-c}(0)$.
b) Wir berechnen also $\operatorname{Ind}_\gamma(0)$, wobei $0 \notin |\gamma|$. Sei $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Für $1 \le j \le n$ sei $B_{r_j}(p_j)$ eine Kreisscheibe vom Radius $r_j$ um den Punkt $p_j$, die 0 nicht enthält, und $\gamma_j([t_{j-1}, t_j]) \subseteq B_{r_j}(p_j)$. Auf $B_{r_j}(p_j)$ sei $L_j(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg_j(z)$, $z \in B_{r_j}(p_j)$, eine Logarithmusfunktion, wobei $\arg_j$ eine Argumentfunktion auf $B_{r_j}(p_j)$ ist. Zeigen Sie: $L_j(z)$ ist eine Stammfunktion von $1/z$ auf $B_{r_j}(p_j)$, und berechnen Sie $\operatorname{Ind}_\gamma(0)$ als

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_1+\ldots+\gamma_n} \frac{1}{\zeta}\,d\zeta.$$

40. Für die ganze Funktion $f$ existiere $M \in \mathbb{R}$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die Beziehung $\Re(f(z)) \le M$ gilt. Beweisen Sie, dass $f$ konstant ist.

Hinweis: Untersuchen Sie $\exp \circ f$.

41. Seien $\omega_1$ und $\omega_2$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängige komplexe Zahlen. Die ganze Funktion $f$ erfülle $f(z) = f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie $\operatorname{Per}(f)$.

42. Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie

$$G(z) := \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{z-x}\,dx, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$$

ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$, und berechnen Sie

$$\oint_{|z|=2} G(z)\,dz.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Fubini: Sei $h\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, dann gilt

$$\int_a^b \int_c^d h(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b h(x,y)\,dx\,dy.$$