6. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 12.11.2012

32. Seien $r, a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_\gamma f(z)\,dz$ für
    (a) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $f(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$.
    (b) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $f(z) = z^{-n}$, $z \in \mathbb{C}^*$.
    (c) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, $f(z) = z^{-1}$, $z \in \mathbb{C}^*$.
    (d) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a\cos t + \mathrm{i}b\sin t$, $f(z) = \Re(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

33. Vorbemerkung über Logarithmusfunktionen auf einem Gebiet G: Eine auf G stetige Funktion $l\colon G \to \mathbb{C}$ heißt eine Logarithmusfunktion auf G, wenn $\exp(l(z)) = z$ für alle $z \in G$.

    Zeigen Sie: Eine Logarithmusfunktion auf G ist holomorph auf G.

    Hinweis: Zeigen Sie dass in jedem Punkt $z_0 \in G$ der Grenzwert $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert.

34. Geben Sie maximale Sterngebiete G in $\mathbb{C}^*$ an, auf denen $f(z) := 1/z$, $z \in \mathbb{C}^*$, eine Stammfunktion besitzt. Geben Sie in jedem dieser Gebiete eine Stammfunktion an.

    Hinweis: $F\colon G \to \mathbb{C}$ ist eine Stammfunktion von f in G, falls F holomorph auf G ist, und $F' = f$.

35. Lösen Sie Aufgabe 31 unter Verwendung von Stammfunktionen auf geeigneten Gebieten.

36. Für $R \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $\gamma(t) = R\exp(\mathrm{i}t)$, $t \in [0, \pi/4]$, ein Weg. Beweisen Sie die Abschätzungen:
    (a) $\sin(2t) \geq 4t/\pi$, $t \in [0, \pi/4]$
    (b) $|\int_\gamma \exp(\mathrm{i}z^2)\,dz| < \pi/(4R)$.

37. Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ und $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$.

    Hinweise: Untersuchen Sie die Funktion $\exp(\mathrm{i}z^2)$ auf der nicht-negativen reellen Halbachse, und auf der Halbgeraden $r(1+\mathrm{i})$ für $r \geq 0$. Unter Verwendung des vorigen Beispiels finden Sie einen geeigneten geschlossenen Weg, über den Sie integrieren können, der eine Beziehung zwischen den gesuchten Integralen und $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ herstellt. Ohne Beweis dürfen Sie die Tatsache verwenden, dass $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$ ist.