

5. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 5.11.2012

28. Sei $f = u + iv$ eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet G , wobei $u = \Re f$ und $v = \Im f$. Wann ist $u^2 + iv^2$ ebenfalls holomorph in G ?
29. Beweisen Sie: Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist die Abbildung $u: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \log |z^n|$, harmonisch, aber nicht Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion.
30. Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine monotone Nullfolge (in \mathbb{R}), und $(b_n)_{n \geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass die Folge $(B_n)_{n \geq 0}$ mit

$$B_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

beschränkt ist. Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ konvergiert.

Hinweis: Für $n \geq 0$ drücken Sie $\sum_{k=0}^n a_k b_k$ mittels a_j und B_j , $j \geq 0$, aus.

31. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz,$$

wobei γ der einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Rand der Einheitskugel bezüglich der Norm

$$\|x + iy\| = |x| + |y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

ist.

Hinweis: Finden Sie eine Parametrisierung als Summe von vier Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_4$, die alle bis auf eine multiplikative Konstante übereinstimmen. Machen Sie die unter dem Integral auftretenden Nenner reell, und verwenden Sie bekannte Formeln über $\int f'(x)/f(x)dx$ und $\int 1/(x^2 + 1)dx = \arctan(x)$.